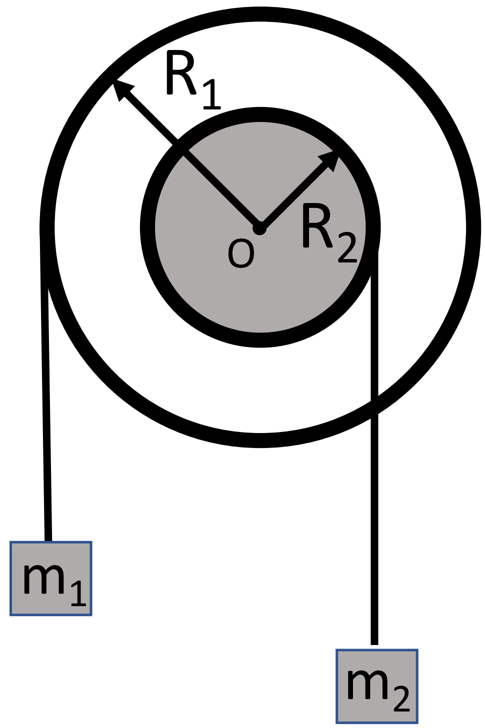
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 7/06/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Due dischi concentrici sono fissati uno sull'altro e possono ruotare alla stessa velocità angolare intorno ad un asse privo di attrito che passa per il centro dei due dischi (O, nella figura). Si arrotola una corda connessa ad una massa m_1 intorno alla circonferenza del disco di raggio maggiore (R_1) ed una seconda corda collegata ad una massa m_2 intorno alla circonferenza del disco di raggio minore (R_2). Le due corde sono inestensibili e di massa trascurabile e non slittano rispetto ai dischi su cui sono avvolte. Inoltre, se il sistema dei due dischi è in rotazione una delle due corde si arrotola e l'altra si srotola. Il momento d'inerzia complessivo dei due dischi rispetto al centro O (vedi figura), vale $I = 38\ kg \cdot m^2$. I raggi dei dischi sono sono $R_1 = 120\ cm$ e $R_2 = 50\ cm$.

1. Se $m_1 = 25\ kg$, quale dovrebbe essere il valore di m_2 affinchè l'accelerazione angolare del sistema dei due dischi sia nulla?

$m_2 =$ ....

La massa m_1 viene ora portata a 35 kg ed il sistema rilasciato dalla posizione di riposo. Supponendo che m_2 sia quello ottenuto al punto precedente, determinare:

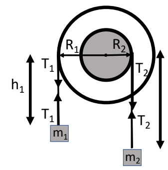
2. L'accelerazione angolare del sistema costituito dai due dischi, α

$\alpha =$ ....

3. Le tensioni di entrambe le corde, T_1, T_2

$T_1 =$ .... $T_2 =$ ....

Soluzione Esercizio 1



1. All'equilibrio la forza agente sulla massa m_1 e quella agente sulla massa m_2 sono entrambe nulle inoltre il sistema dei due dischi non ruota, pertanto il momento delle forze rispetto ad O è nullo. Di conseguenza abbiamo un sistema di tre equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 g - T_1 = 0 \\ \mathrm{m}_2 g - T_2 = 0 \\ \mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2 = 0 \end{cases}$$

Dalle quali:

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 60\ kg$$

2. Quando $m_1 = 35\ kg$, la massa m_1 scende con accelerazione lineare $a_1 = \alpha R_1$, la massa m_2 sale con accelerazione lineare $a_2 = \alpha R_2$. Ovviamente:

$$a_1 = a_2 \frac{R_1}{R_2} > a_2$$

Durante il moto vale il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 a_1 = m_1 g - T_1 \\ \mathrm{m}_2 a_2 = T_2 - m_2 g \\ (\mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2)\hat{z} = I\alpha\hat{z} \end{cases}$$

Ricordando che $a_1 = \alpha R_1$ e $a_2 = \alpha R_2$, si ottiene:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 \alpha R_1 = m_1 g - T_1 \\ \mathrm{m}_2 \alpha R_2 = T_2 - m_2 g \\ (\mathrm{R}_1 T_1 - R_2 T_2) = I\alpha \end{cases}$$

o anche moltiplicando la prima per R_1 e la seconda per R_2:

$$\begin{cases} \mathrm{m}_1 \alpha R_1^2 = m_1 g R_1 - T_1 R_1 \\ \mathrm{m}_2 \alpha R_2^2 = T_2 R_2 - m_2 g R_2 \\ \mathrm{I}\alpha = (R_1 T_1 - R_2 T_2) \end{cases}$$

e sommando le prime due equazioni del sistema alla terza

$$\alpha \left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I \right) = g \left(m_1 R_1 - m_2 R_2 \right)$$

dalle quali

$$\alpha = g \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)}{(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I)} = 1.14\ rad/s^2$$

Un altro modo per determinare α consiste, non essendoci in gioco forze non conservative, nell'utilizzare la conservazione dell'energia del sistema. Scegliendo l'origine dell'energia potenziale in $h_1 = h_2 = 0$ e ricordando che il sistema ruota in senso antiorario e che per m_1 che scende di $R_1\theta$ rispetto alla quota di partenza (h_1, m_2 sale di $R_2\theta$ (rispetto a h_2), l'energia del sistema è data da:

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\omega R_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\omega R_2\right)^2 + m_1 g \left(-h_1 - R_1\theta\right) + m_2 g \left(-h_2 + R_2\theta\right) = costante$$

Derivando l'energia, imponendo la conservazione dell'energia $\frac{dE}{dt} = 0$ e poichè $\dot{\theta} = \omega$, otteniamo:

$$0 = I\omega\dot{\omega} + m_1 R_1^2 \omega\dot{\omega} + m_2 R_2^2 \omega\dot{\omega} - m_1 R_1 \omega + m_2 R_2 \omega$$

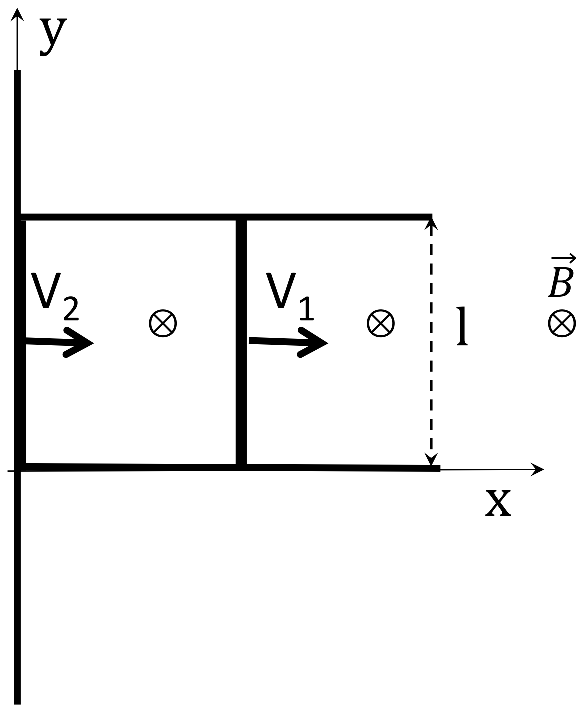
Per cui dividendo per ω e risolvendo l'equazione troviamo $\dot{\omega}$ e quindi, poichè $\dot{\omega} = \alpha$, otteniamo α.

3. Utillizzando le prime due equazioni del secondo sistema di equazioni del punto [2], otteniamo:

$$T_1 = m_1\,(g - R_1\alpha) = 295\ N$$

$$T_2 = m_2\,(g + R_2\alpha) = 623\ N$$

Esercizio 2



Due sbarrette conduttrici, ciascuna di resistenza $R = 2\ \Omega$, poggiano e possono scorrere senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 1.3\ m$. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.5\ T$, entrante nel piano della figura. Le sbarrette si muovono con velocità costante $v_1 = 8\ m/s$ e $v_2 = 3\ m/s$.
Determinare

1. L'intensità della corrente circolante (il suo modulo), i, e il verso (se orario e antiorario) giustificando la risposta

   $i =$ ....

2. Le forze esterne $\vec{F}_{ext1}$, $\vec{F}_{ext2}$ che debbono essere applicate per mantenere rispettivamente v_1 e v_2 costanti.

   $\vec{F}_{ext1} =$ .... $\vec{F}_{ext2} =$ ....

3. Determinare la potenza necessaria a mantenere in moto rispettivamente la sbarretta 1, P_1, e la sbarretta 2, P_2.

   $P_1 =$ .... $P_2 =$ ....

Dati: $R = 2\ \Omega$, $l = 1.3\ m$, $B = 0.5\ T$, $v_1 = 8\ m/s$, $v_2 = 3\ m/s$.

Soluzione Esercizio 2

1. Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie del circuito, che coincide con la superficie tra le sbarrette vale:
$$\phi = Bl\,(x_1 - x_2)$$
Quindi la forza elettromotrice indotta vale:
$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\,(v_1 - v_2)$$
per cui la corrente indotta (con il suo segno) vale
$$i_{ind} = \frac{fem}{2R}$$
ed il suo verso è antiorario, infatti, dato che l'area aumenta, la corrente circolante deve essere tale da generare un campo che si oppone a quello entrante. L'intensità della corrente indotta è data pertanto da:
$$i = |i_{ind}| = 0.8\ A$$

2. Sulla sbarretta 1 viene esercitata una forza frenante diretta lungo l'asse x:
$$\overrightarrow{F}_1 = -ilB\hat{x}$$
mentre la forza esercitata sulla sbarretta 2
$$\overrightarrow{F}_2 = ilB\hat{x}$$
con $ilB = 0.53N$. Per mantenere in moto con velocità costante le sbarrette la forza risultante su ciascuna di esse deve essere nulla, pertanto le forze esterne da applicare rispettivamente sulla sbarretta 1 e la sbarretta 2 sono:
$$\overrightarrow{F}_{ext1} = ilB\hat{x}$$
$$\overrightarrow{F}_{ext2} = -ilB\hat{x}$$

3. La potenza necessaria è fornita dalle forze esterne applicate.
$$P_1 = \overrightarrow{F}_{ext1} \bullet \overrightarrow{v_1} = ilBv_1 = 4.2\ W$$
$$P_2 = \overrightarrow{F}_{ext2} \bullet \overrightarrow{v_2} = -ilBv_2 = -1.6\ W$$
La somma di P_1 e P_2 è pari alla potenza dissipata per effetto Joule: $P_{Tot} = 2Ri^2 = 2.6\ W$