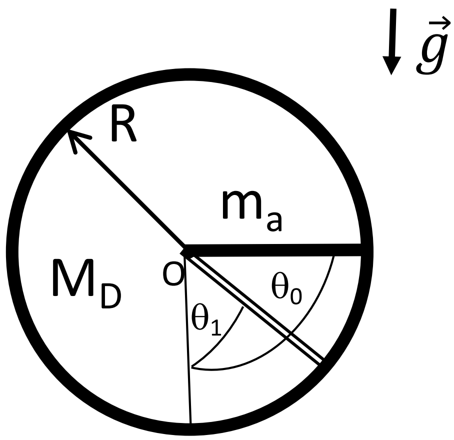
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 28/06/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un'asta omogenea di massa m_a e di lunghezza R è rigidamente vincolata ad un disco omogeneo di massa M_D e raggio R. Il sistema è libero di ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale passante per il centro del disco (O, in figura) e perpendicolare al disco.

1. Calcolare la distanza d del centro di massa del sistema dal centro del disco (O).

$d =$ ....

2. Determinare il momento di inerzia I_O del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco e calcolare la velocità angolare del sistema (ω_1) quando esso raggiunge posizione indicata in figura (θ_1) una volta lasciato libero di ruotare dalla posizione corrispondente a θ_0.

$I_O =$ .... $\omega_1 =$ ....

3. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni T, attorno alla posizione di equilibrio del sistema.

$T =$ ....

Dati: $m_a = 10\ g$, $M_D = 60\ g$, $R = 30\ cm$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Soluzione Esercizio 1

1. Considerando la massa del disco posizionata nel centro di massa del disco (a distanza nulla da O) e la massa dell'asta posizionata nel centro di massa dell'asta (a distanza $R/2$ da 0), il centro di massa giace sull'asta e la distanza del centro di massa del sistema da O è data da:

$$d = \frac{M_D x_D + m_a x_a}{M_D + m_a} = \frac{m_a R/2}{M_D + m_a} = 2.14 \times 10^{-2}\ m$$

2. Il momento di inerzia I_O del sistema rispetto all'asse di rotazione passante per il centro del disco (O), dal teorema di Steiner è dato da:

$$I_O = I^{cm}_{asta} + I^{cm}_{disco} + m_a \left(\frac{R}{2}\right)^2 = 3 \times 10^{-3}\ kgm^2$$

dove abbiamo indicato con I^{cm}_{asta} e I^{cm}_{disco} rispettivamente i momenti di inerzia dell'asta e del disco rispetto ai relativi centri di massa.
Il sistema è assimilabile ad un pendolo fisico. La posizione di equilibrio stabile del sistema è quella corrispondente all'asta in basso in posizione verticale ($\theta = 0$). Se posto in questa questa posizione, il sistema resta in questa configurazione, e se il sistema è ruotato di un piccolo angolo θ_0, esso inizierà ad oscillare attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$. Assumendo l'origine dell'energia potenziale del sistema nella posizione di equilibrio stabile, l'energia del sistema quando l'angolo è θ_1 è data da:

$$E(\theta_1) = \frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta_1))$$

con $\omega_1 = \dot{\theta}_1$. Poichè non ci sono forze dissipative, e il sistema è lasciato libero di ruotare (velocità angolare iniziale nulla) dalla posizione iniziale θ_0, vale:

$$E(\theta_1) = E(\theta_0) = (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta_0)) = costante$$

Di conseguenza:

$$\frac{1}{2} I_O \omega_1^2 = (m_a + M_D)\, gd(cos\,(\theta_1) - cos\,(\theta_0))$$

per cui:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\,(m_a + M_D)\, gd(cos\,(\theta_1) - cos\,(\theta_0))}{I_O}} = 2.63\ s^{-1}$$

3 Ci sono due procedure per risolvere il problema. La prima considera la conservazione dell'energia che per una posizione arbitraria del pendolo composto, θ, ci permette di esprimere l'energia del sistema come:

$$E(\theta) = \frac{1}{2} I_O \omega^2 + (m_a + M_D)\, gd(1 - cos\,(\theta)) = costante$$

Per cui:

$$\frac{dE}{dt} = 0 = I_O \omega \dot{\omega} + (m_a + M_D)\, gdsin\,(\theta)\, \dot{\theta}$$

Ricordando che $\omega = \dot{\theta}$ e $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, dividendo per ω l'ultima equazione, otteniamo:

$$I_O \ddot{\theta} + (m_a + M_D)\, gdsin\,(\theta) = 0$$

Per piccole oscillazioni: $sin\,(\theta) \simeq \theta$, per cui l'equazione diviene:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_a + M_D)\, gd\theta}{I_O} = 0$$

che è l'equazione differenziale dei moti oscillatori non smorzati. La legge oraria del moto è:

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\Omega t)$$

con

$$\Omega = \sqrt{\frac{(m_a + M_D)\, gd}{I_O}} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{(m_a + M_D)\, gd}} = 2.84\ s$$

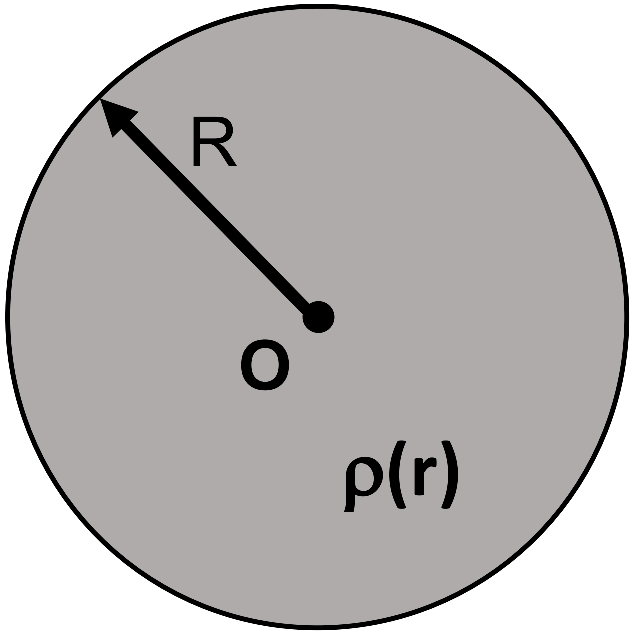
La seconda procedura sfrutta la II^a equazione cardinale. Quando il pendolo composto viene spostato dalla posizione di equilibrio ($\theta = 0$) ad una posizione in cui l'angolo è θ, utilizzando per il calcolo del momento delle forze O come polo, si ha un momento ($\overrightarrow{M}^O$) non nullo. In particolare:

$$\overrightarrow{M}^O = I_O\dot{\omega}\hat{z} = -(m_a + M_D)gdsin\,(\theta)\,\hat{z} \quad \Rightarrow \quad I_O\ddot{\theta} + (m_a + M_D)\,gdsin\,(\theta) = 0$$

che per piccole oscillazioni, tenendo conto che $\omega = \dot{\theta}$ porta alla stessa equazione ottenuta con il metodo della conservazione dell'energia:

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_a + M_D)\,gd\theta}{I_O} = 0$$

Esercizio 2



Una nuvola sferica di raggio R, ha una densità di carica variabile con la distanza dal centro con la legge:

$$\rho = A\frac{r^2}{R^2} \qquad per\ 0 \leq r \leq R$$

La nuvola ha una carica totale Q.
Determinare:

1. Il valore di A.

$$A = ...$$

2. Il campo elettrico ad una distanza dal centro della nuvola pari a R/2, $\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right)$, e a distanza pari a $2R$, $\overrightarrow{E}\,(2R)$.

$$\overrightarrow{E}\left(\frac{R}{2}\right) = ... \qquad \overrightarrow{E}\,(2R) = ...$$

3. Determinare la differenza di potenziale tra il centro, C, della nuvola e l'infinito, dovuta alla distribuzione di carica della nuvola, $V(C) - V(\infty)$.

$$V(C) - V(\infty) = ...$$

Dati: $Q = 5\ nC$, $R = 10\ cm$

Soluzione Esercizio 2

1. La carica in un guscio sferico di raggio r e spessore dr: è data da:

$$dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = A\frac{r^2}{R^2}4\pi r^2 dr$$

Quindi la carica totale è data da:

$$Q = \frac{4\pi A}{R^2}\int_0^R r^4 dr = \left(\frac{4\pi A}{5}\right)R^3$$

per cui

$$A = \frac{5Q}{4\pi R^3} = 2\times 10^{-6}\frac{C}{m^3}$$

2.1 All'interno della nuvola sferica per $0 \leq r \leq R$ le linee di forza del CE sono radiali e uscenti e il modulo del CE per il teorema di Gauss soddisfa la relazione:

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{4\pi A}{\epsilon_0 R^2}\int_0^r r'^4 dr' = \frac{4\pi A}{\epsilon_0 R^2}\frac{r^5}{5}$$

Per cui per $0 \leq r \leq R$:

$$E(r) = \frac{Ar^3}{5\epsilon_0 R^2}$$

con $E\left(\frac{R}{2}\right) = 562\ V/m$

2.2 Le linee di forza del campo elettrico all'esterno della distribuzione sono radiali uscenti. Il modulo del campo elettrico in ogni punto esterno alla nuvola sferica, per $R \leq r$ per il teorema di Gauss è dato da:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

In particolare per r=2R:

$$E(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2} = 11.23\times 10^2\ V/m$$

3 La differenza di potenziale tra il centro (C) della nuvola ed il suo bordo, utilizzando l'espressione di $E(r)$ per $0 \leq r \leq R$, è data da:

$$V(0) - V(R) = \int_0^R E(r)dr = \frac{A}{5\epsilon_0 R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{AR^2}{20\epsilon_0} = 112\ V$$

Mentre la differenza di potenziale tra il bordo della nuvola e l'infinito, utilizzando l'espressione di $E(r)$ per $R \leq r$, è data da:

$$V(R) - V(\infty) = \int_R^\infty E(r)dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = 449\ V$$

Per cui:

$$V(0) - V(R) + V(R) - V(\infty) = V(0) - V(\infty) = 561\ V$$