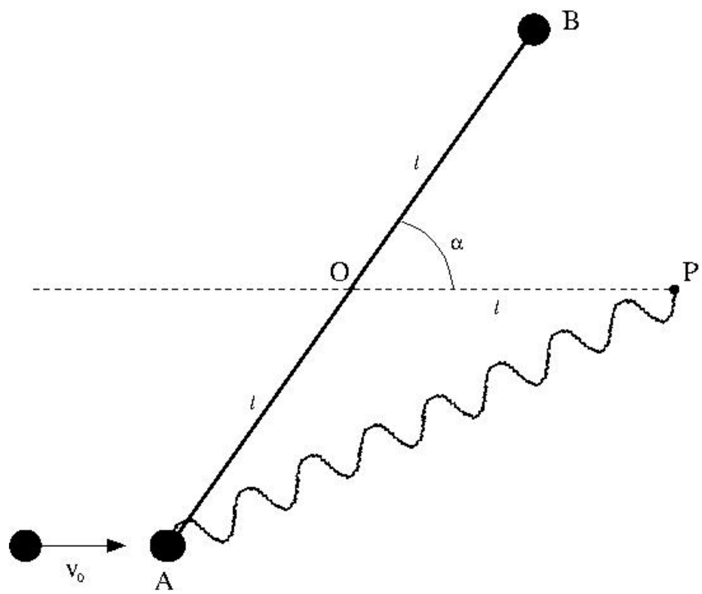
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 1/2/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Due masse, $m_A = m$ e $m_B = 2m$, assimilabili a due punti materiali, sono connesse da una sbarretta di massa $3m$ e lunghezza $2l$, incernierata nel suo punto medio O, sul piano verticale. La massa m_A è collegata al punto P, che si trova ad una distanza l da O e alla stessa quota di O, tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile. Inizialmente il sistema è in equilibrio nella configurazione di figura con angolo $\alpha = \pi/3$.

1. Calcolare la costante elastica della molla, k.

$$k = ...$$

Al tempo $t = 0$ un punto materiale di massa m colpisce il punto di massa m_A con velocità v_0, orizzontale e diretta verso destra. L'urto è perfettamente anelastico.

2. Calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, ω, e l'energia dissipata nell'urto, E_{diss}.

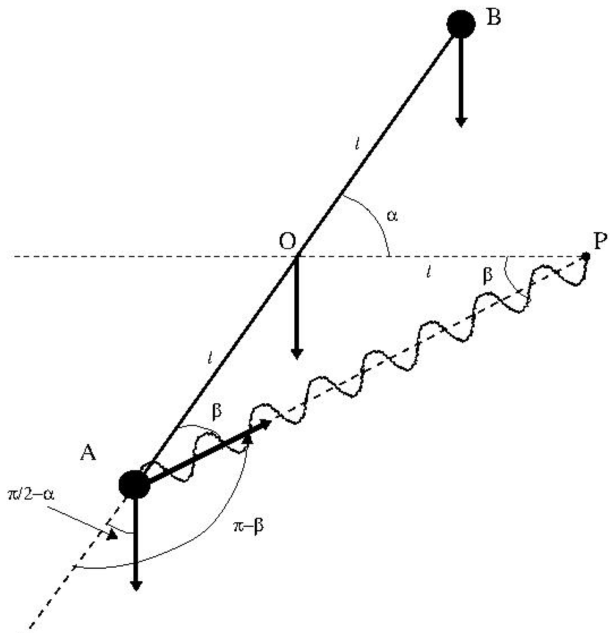
$$\omega = ... \quad E_{diss} = ...$$

3. Determinare la velocità, $\vec{v}_A$ con cui il punto materiale A passa dall'asse orizzontale, nel moto successivo all'urto.

$$\vec{v}_A = ...$$

Dati: $m = 100\ g$, $l = 50\ cm$, $v_0 = 5\ m/s$, $g = 10\ m/s^2$.

Soluzione Esercizio 1



1. La lunghezza della molla nella posizione di equilibrio può essere determinata da semplici considerazioni geometriche, osservando che il triangolo AOP, è un triangolo isoscele con angolo alla base di $\pi/6$. La base (ovvero la lunghezza della molla), vale

$$\bar{AP} = \sqrt{3}l$$

La forza elastica applicata al punto A sarà allora:

$$\vec{F}_{el} = \left(\frac{3}{2}kl, \frac{\sqrt{3}}{2}kl\right)$$

con modulo $|\vec{F}_{el}| = \sqrt{3}kl$.

Scegliendo come polo il centro O, si può scrivere la seconda equazione cardinale tenendo conto di tutte le forze presenti, ovvero i pesi dei punti A e B, della sbarretta e la forza elastica (il peso della sbarretta è applicato nel punto O, baricentro della sbarretta):

$$\vec{OA} \wedge m\vec{g} + \vec{OB} \wedge 2m\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{F}_{el} = 0$$

che diventa (vedi figura):

$$lmgcos(\alpha) - 2mglcos(\alpha) + |\vec{F}_{el}|lsin(\pi - \beta) = 0$$

ovvero

$$-\frac{1}{2}mgl + \frac{\sqrt{3}}{2}kl^2 = 0$$

$$-mg + \sqrt{3}kl = 0 \rightarrow k = \frac{mg}{\sqrt{3}l} = 1.15\ N/m$$

2. Nell'urto anelastico della massa m nel punto A si conserva il momento angolare dell'intero sistema. Per cui il momento angolare rispetto al punto O prima dell'urto sarà uguale a quello dopo l'urto:

$$\vec{OA} \wedge m\vec{v}_0 = I\omega\hat{k}$$

Dove I è il momento d'inerzia dell'intero sistema dopo l'urto:

$$I = 2(2m)l^2 + \frac{1}{12}(3m)4l^2 = 4ml^2 + ml^2 = 5ml^2$$

La precedente diventa:

$$lmv_0 sin(\pi - \alpha) = I\omega \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{3}}{10}\frac{v_0}{l} = 1.73\ rad/s$$

L'energia cinetica immediatamente prima dell'urto è $\frac{1}{2}mv_0^2$ mentre subito dopo l'urto è data da $\frac{1}{2}I\omega^2$ con ω appena calcolato. La differenza tra questi due valori è proprio l'energia dissipata nell'urto:

$$E_{diss} = -\Delta T = -(\frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}mv_0^2) = 1.06\ J$$

3. Dopo l'urto la massa nel punto A è uguale alla massa nel punto B (ovvero è 2m), per cui il contributo all'energia potenziale è uguale e opposto, se fissiamo lo zero dell'energia potenziale lungo l'asse orizzontale che contiene O e P. L'energia, dopo l'urto, si conserva, per cui l'energia iniziale è uguale all'energia nel passaggio di A dall'orizzontale. In questa posizione la molla ha lunghezza nulla (pari quindi alla sua lunghezza a riposo):

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{3}l)^2 = \frac{1}{2}I\omega'^2$$

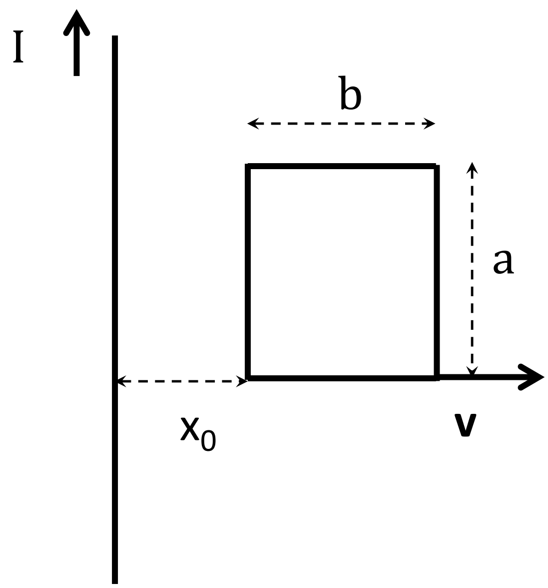
dove con ω' abbiamo indicato la velocità angolare nell' istante in cui A passa per l'asse orizzontale:

$$\omega' = \sqrt{\frac{2}{I}(\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{3}l)^2)} = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{I}k(\sqrt{3}l)^2} = 3.15\ rad/s$$

e quindi il modulo della velocità di A sarà $v_A = \omega' l = 1.58\ m/s$, con direzione perpendicolare all'asse orizzontale e rivolta verso l'alto, per cui:

$$\overrightarrow{v}_A = (0, 1.58, 0)\ m/s$$

Esercizio 2



Un filo conduttore ideale infinitamente lungo, è percorso da una corrente costante I nel verso indicato in figura. Un avvolgimento piatto di N spire di forma rettangolare con lati a e b indeformabile, giace nello stesso piano del filo, a distanza x_0, come in figura. La resistenza dell'avvolgimento di spire è R. Ad un certo istante ($t = 0$) l'avvolgimento di spire viene messo in moto con velocità costante v a partire dalla posizione x_0 nella direzione indicata in figura. Si trascuri il coefficiente di autoinduzione dell'avvolgimento di spire.

1. Calcolare la corrente che circola nell'avvolgimento di spire, $I_s(t')$, all'istante $t = t'$, e determinarne il verso (orario o antiorario) motivando la risposta.

$$I_s(t') = ...$$

2. Determinare la forza istantanea $\overrightarrow{F}(t')$ all'istante t', che deve essere applicata all'avvolgimento per mantenerlo in moto con velocità costante.

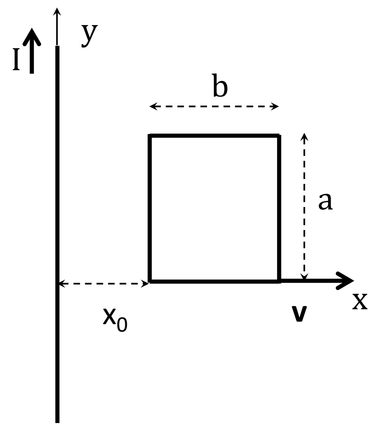
$$\overrightarrow{F}(t') = ...$$

3. Determinare la potenza dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$, $P(t')$

$$P(t') = ...$$

Dati: $I = 450\ A$, $N = 10000$, $a = 8\ cm$, $b = 5\ cm$, $R = 1\ \Omega$, $v = 0.5\ m/s$, $x_0 = 4\ mm$, $t' = 2\ s$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T/m = 1.26 \times 10^{-6}\ T/m$.

Soluzione Esercizio 2



1. Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse y.

   L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie del circuito si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$

   $$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$

   Il flusso del campo magnetico, attraverso un rettangolo infinitesimo dell'avvolgimento di lati a e dx' varia con il tempo ed è dato da $d\phi(t) = NB(x')adx'$, per cui il flusso attraverso l'avvolgimento è dato da:

   $$\phi(t) = \int_x^{x+b} B(x')adx' = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_x^{x+b}\frac{dx'}{x'} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}ln\left(\frac{x+b}{x}\right)$$

   Dove x indica la distanza dell'avvolgimento lungo l'asse x in funzione del tempo (vedi figura). Poichè l'avvolgimento è mantenuto in moto con velocità costante, $x = x(t) = x_0 + vt$.
   La FEM indotta al tempo t, è data da:

   $$FEM(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{x}{x+b}\left(\frac{x-(x+b)}{x^2}\right)\dot{x} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{bv}{x(x+b)} = N\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{bv}{(x_0+vt)(x_0+vt+b)}$$

   Ne segue che l'espressione della corrente indotta nell'avvolgimento al tempo t è data da $I_s(t) = \frac{FEM(t)}{R}$, per cui per $t = t'$:

   $$I_s(t') = \frac{FEM(t')}{R} = 1.7\ mA$$

   con $FEM(t') = 1.7\ mV$.
   Il verso della corrente è orario in quanto la corrente indotta ed il suo verso sono tali da opporsi alla variazione del flusso.

2. Per mantenere in moto l'avvolgimento con velocità costante v, la forza che deve essere applicata è uguale e opposta alla forza di Lorentz $\overrightarrow{F}_L(t)$ agente sull'avvolgimento. La forza di Lorentz agente sull'avvolgimento, dovuta alla presenza del campo magnetico si ottiene sommando i contributi associati ai quattro lati dell'avvolgimento. Considerando che quelli dovuti ai lati paralleli alla velocità si elidono reciprocamente, ne segue che $\overrightarrow{F}_L(t)$ ha direzione opposta a quella del moto; pertanto, poichè $\overrightarrow{F}_L(t) = NI_s(t)a\left(B(x+b) - B(x)\right)\hat{x}$, la forza istantanea che deve essere applicata per mantenere in moto l'avvolgimento con velocità costante è data da:

$$\overrightarrow{F}(t) = NI_s(t)a\left(B(x) - B(x+b)\right)\hat{x} = NI_s(t)a\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x_0+vt\right)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x_0+vt+b\right)}\right)\hat{x} =$$
$$= \frac{NI_s(t)a\mu_0 Ib}{2\pi}\left(\frac{1}{\left(x_0+vt\right)\left(x_0+vt+b\right)}\right)\hat{x}$$

per cui per $t = t'$

$$\overrightarrow{F}(t') = (5.8\times 10^{-6}, 0, 0)\ N$$

3. La potenza che viene dissipata nell'avvolgimento al tempo $t = t'$ è data da:

$$P(t') = I_s^2(t')R = 2.9\times 10^{-6}\ W$$