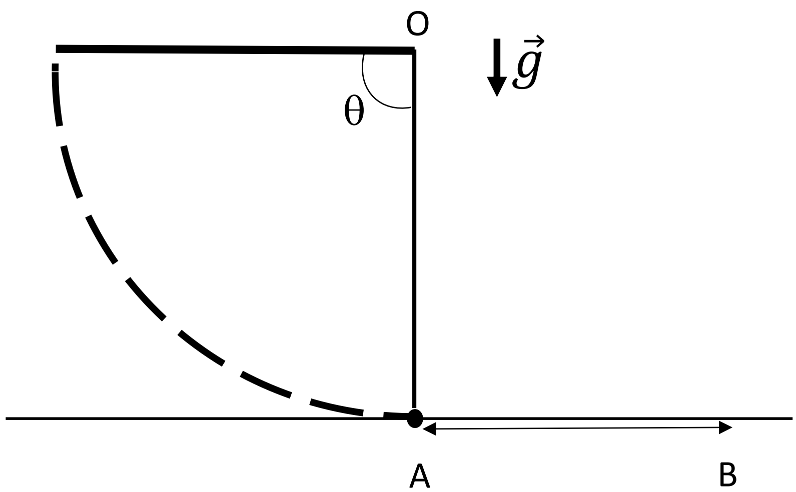
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 19/07/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un'asta rigida sottile ed omogenea di massa $M = 3\ kg$ e lunghezza $l = 2\ m$ è vincolata a ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per il punto fisso O. L'asta, lasciata libera di muoversi a partire dalla configurazione $\theta = 90^o$, urta in modo completamente elastico un corpo assimilabile a un punto materiale situato sulla verticale, nel punto A. Dopo l'urto, l'asta rimane in quiete.

1. Si calcoli la velocità angolare dell'asta, ω_0, un'istante prima dell'urto.

$\omega_0 =$ ....

2. Si calcoli la massa del corpo, m, e la sua velocità, v_0, immediatamente dopo l'urto.

$m =$ .... $v_0 =$ ....

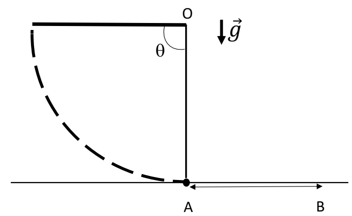
Successivamente, il corpo percorre un tratto rettilineo su una guida orizzontale scabra, caratterizzata da un coefficente di attrito dinamico $\mu_d = 0.7$.

3. Calcolare la distanza, d, percorsa dal corpo sul piano, dal punto A fino al punto B in cui si arresta.

$d =$ ....

Dati: $M = 3\ kg$, $l = 2\ m$, $\theta = 90^o$, $\mu_d = 0.7$.

Soluzione Esercizio 1



1. Durante il moto dell'asta dalla configurazione iniziale ($\theta = 90^o$) alla configurazione finale ($\theta = 0^o$), l'energia meccanica si conserva (i vincoli sono lisci). Assumendo l'origine dell'energia potenziale gravitazionale in A, dalla conservazione dell'energia otteniamo:

$$Mgl = \frac{1}{2} I_o \omega_0^2 + \frac{1}{2} Mgl$$

dove I_O è il momento di inerzia dell' asta rispetto ad un asse perpendicolare al piano del foglio e passante per O.

$$I_O = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3} = 4\ kgm^2$$

Per cui, un istante prima dell'urto:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{I_0}} = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 3.83\ rad/s$$

2. L'asta urta il corpo in modo elastico con $\theta = 0$.
Nel processo:

a) si conserva l'energia cinetica del sistema asta-corpo, poichè si tratta di un urto completamente elastico

b) la quantità di moto del sistema non si conserva a causa della presenza della reazione vincolare di natura impulsiva applicata all'asta in O

c) il momento angolare del sistema calcolato rispetto al polo O si conserva poichè il momento delle forze esterne rispetto al polo O è nullo.
Di conseguenza, dalla conservazione dell'energia cinetica:

1)$\frac{1}{2} I_O \omega_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$

e dalla conservazione del momento angolare (vettore ortogonale al piano xy della figura, $I_O \omega \hat{z} = l m v_0 \hat{z}$):

2)$I_O \omega_0 = l m v_0$

elevando al quadrato la 2) e dividendo a membro a membro l'equazione 2) per la 1) e semplificando otteniamo:

2.1
$$I_O = ml^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{I_O}{l^2} = \frac{Ml^2}{3}\frac{1}{l^2} = \frac{M}{3} = 1\ kg$$

2.2 Sostituendo l'espressione della massa m nell'equazione 2) e sfruttando l'espressione di ω_0 otteniamo:

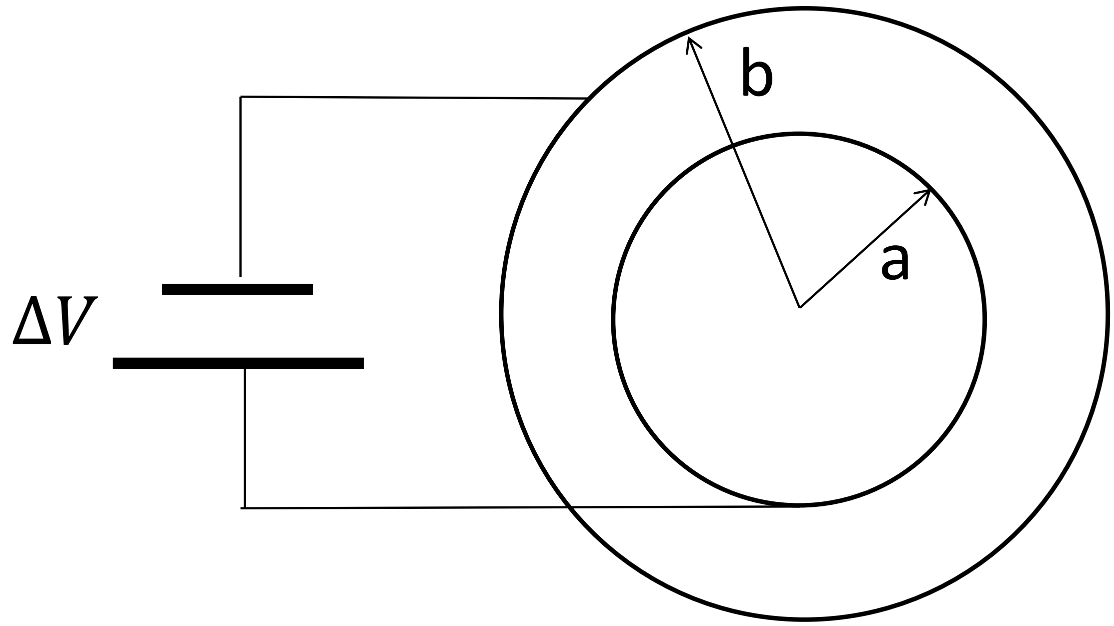
$$v_0 = \frac{I_O \omega_0}{lm} = \frac{Ml^2}{3}\sqrt{\frac{3g}{l}}\frac{1}{l}\frac{3}{M} = \sqrt{3lg} = 7.67\ m/s$$

3. Indicando con T_f e T_i, rispettivamente l'energia cinetica finale e iniziale, poichè l'unica forza in gioco è la forza di attrito ($\overrightarrow{F}_a$), in quanto la reazione vincolare ($\overrightarrow{R}$) del piano bilancia la forza peso ($m\overrightarrow{g}$), abbiamo:

$$T_f - T_i = -\frac{1}{2} m v_0^2 = \int_A^B \overrightarrow{F}_a \bullet \overrightarrow{ds} = -\mu_d mg \int_A^B dx = -\mu_d mgd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_0^2}{2\mu_d g} = \frac{3l}{2\mu_d} = 4.28\ m$$

dove $d = B - A$.

Esercizio 2



Le armature di un condensatore sferico di raggi a e b, e vengono mantenute ad una differenza di potenziale costante $\Delta V = V(a) - V(b)$ da una pila, come in figura.

1. Ricavare l'espressione e calcolare la capacità del condensatore, C, nonchè l'energia elettrostatica in esso immagazzinata, U.

   $C =$ .... $U =$ ....

2. Calcolare la densità di carica sull'armatura interna σ_a.

   $\sigma_a =$ ....

3. Determinare a parità di differenza di potenziale ΔV e di raggio b dell'armatura esterna, quanto deve valere il raggio dell'armatura interna a' affinchè su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo.

   $a' =$ ....

Dati: $\Delta V = 10\ V$, $a = 0.6\ cm$, $b = 1\ cm$.

Soluzione Esercizio 2

1. Per ricavare l'espressione della capacità dobbiamo determinare il rapporto di $\frac{Q}{\Delta V}$.
   Il condensatore si carica con carica $Q > 0$ sull'armatura interna e carica -Q su quella esterna. La carica Q è distribuita uniformemente sulla superficie di raggio a mentre la carica $-Q$ è distribuita uniformemente sulla superficie di raggio b.
   Al campo elettrico nella regione $a \leq r \leq b$ contribuisce solo la superficie interna: data la simmetria della distribuzione di carica in questa regione esso è diretto radialmente da a a b con verso da a a b e dipende solo da r. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica concentrica al condensatore ed avente raggio r tale che $a \leq r \leq b$, otteniamo:

   $$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

   La differenza di potenziale tra le armature è data da:

   $$\Delta V = V(a) - V(b) = \int_a^b E(r)dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

   1.1 Di conseguenza, dalla definizione di capacità otteniamo:

   $$C = \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} = 1.67\ pF$$

   1.2 L'energia immagazzinata nel condensatore è data da:

   $$U = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 83.4\ pJ$$

2. La densità di carica sulla superficie interna è data da:

   $$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

   che esprimendo Q in funzione di ΔV,

   $$Q = \Delta V 4\pi\epsilon_0 \frac{ba}{b-a}$$

   fornisce:

   $$\sigma_a = \Delta V \epsilon_0 \frac{b}{(b-a)a} = 3.7 \times 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$$

3. A parità di differenza di potenziale ΔV e di raggio b dell'armatura esterna, per determinare il il raggio a' dell'armatura interna affinchè su di essa il campo elettrico $E(a')$ sia minimo, è necessario esprimere il campo elettrico in funzione di ΔV.

   $$E(a') = \frac{Q(a')}{4\pi\epsilon_0 a'^2}$$

   prendendo l'espressione di $Q(a')$ in funzione di ΔV otteniamo:

   $$E(a') = \Delta V 4\pi\epsilon_0 \frac{ba'}{b-a'}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 a'^2} = \frac{\Delta V b}{a'(b-a')}$$

   dalla quale imponendo che la derivata del campo elettrico rispetto ad a' sia nulla otteniamo:

   $$\frac{dE(a')}{da'} = -\Delta V b \left(a'(b-a')\right)^{-2}(-2a'+b) = 0 \qquad \Rightarrow a' = \frac{b}{2} = 0.5\ cm$$