Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 18/9/2019
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Una massa $M = 1\ kg$, assimilabile ad un punto materiale, oscilla su un piano orizzontale senza attrito sotto l'azione della forza elastica esercitata da una molla di costante elastica $k = 300\ N/m$. Una massa $m = 0.1\ kg$, anch'essa assimilabile ad un punto materiale, che si muove (vedi figura) con velocità orizzontale $v_0 = 30\ m/s$ sul piano, urta la massa M nel punto di massima elongazione della molla, corrispondente all'ampiezza massima di oscillazione $A_0 = 0.5\ m$. Subito dopo l'urto, la massa m resta attaccata ad M. Si calcoli:

1. La velocità del sistema $M + m$ subito dopo l'urto, v'

   $v' =$ ....

2. La quantità di energia dissipata nell'urto, E_{diss}

   $E_{diss} =$ ....

3. L'ampiezza massima delle oscillazioni dopo l'urto, A_{max}

   $A_{max} =$ ....

Dati: $M = 1\ kg$, $k = 300\ N/m$, $m = 0.1\ kg$, $v_0 = 30\ m/s$, $A_0 = 0.5\ m$

Soluzione Esercizio 1

1. Durante l'urto la quantità di moto del sistema m+M si conserva (non agiscono forze esterne di natura impulsiva). L'urto avviene nella configurazione in cui la molla ha raggiunto la massima elongazione (in corrispondenza quindi del punto di inversione della traiettoria, in cui la velocità della massa M si annulla) ed è completamente anelastico (m resta attaccata a M). Per cui, un istante prima dell'urto la quantità di moto totale del sitema è mv_0, mentre un'istante dopo l'urto essa è data da $(M+m)v'$, dove v' rappresenta la velocità del sistema $m+M$ subito dopo l'urto. Quindi, applicando la conservazione della quantità di moto del sistema, otteniamo:

$$mv_0 = (M+m)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{mv_0}{M+m} = 2.7\ m/s$$

2. L'energia dissipata durante l'urto si ricava calcolando la variazione di energia cinetica tra l'istante subito prima e quello subito dopo l'urto.

$$E_{diss} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = 41\ J$$

3. Il valore della massima ampiezza di oscillazione, A_{max}, si ottiene applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica per il sistema m+M, che vale in questo caso poichè non sono presenti forze dissipative dopo l'urto. L'energia del sistema un'istante dopo l'urto è data da:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2$$

Dove il primo termine rappresenta l'energia potenziale e il secondo l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Mentre la massima energia potenziale si ha quando la velocità del sistema si annulla e l'elongazione della molla è massima. Per cui quando l'elogazione della molla è massima, l'energia del sistema è data dal solo termine di energia potenziale:

$$\frac{1}{2}kA_{max}^2$$

Applicando la conservazione dell'energia, in quanto non sono presenti forze esterne dissipative. Usando l'espressione di v' della seconda domanda e risolvendo otteniamo:

$$\frac{1}{2}kA_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)\,v'^2 = \frac{1}{2}kA_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \sqrt{A_0^2 + \frac{m^2v_0^2}{k\,(m+M)}} = 0.53\ m$$

Un metodo alternativo è quello di utilizzare l'equazione della molla a cui è ora attaccata una massa $M+m$ e sfruttare le condizioni iniziali note per determinare A_{max}. La soluzione generale per il per il moto armonico del sistema è data da:

$$x(t) = A_{max}cos(\omega t + \phi)$$

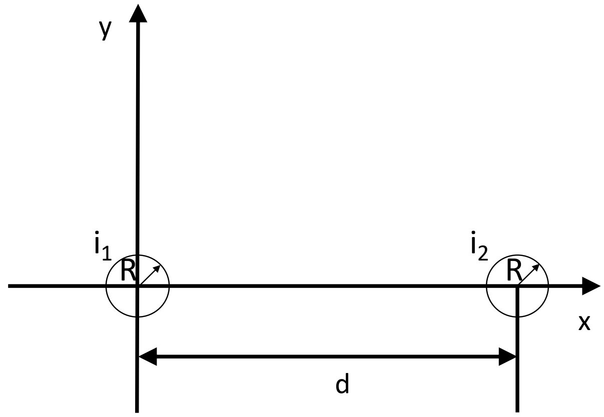
Dove $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$.
Le condizioni iniziali, assumendo $t = 0$ un istante dopo l'urto, sono date da:

$$A_0 = x(0) = A_{max}cos(\phi) \quad v' = v(0) = \dot{x}(0) = -\omega A_{max}sin(\phi)$$

per cui $cos(\phi) = A_0/A_{max}$ e $sin(\phi) = -v'/\omega A_{max}$. Per cui quadrando e sommando membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$1 = \frac{A_0^2}{A_{max}^2} + \frac{v'^2}{\omega^2 A_{max}^2} \quad \Rightarrow \quad A_{max} = \sqrt{A_0^2 + \frac{v'^2}{\omega^2}} = \sqrt{A_0^2 + \frac{v'^2\,(m+M)}{k}}$$

Esercizio 2



Consideriamo due fili di materiale conduttore paralleli, di raggio R, posti nel vuoto, con gli assi distanti d e percorsi dalla stessa corrente $i_1 = i_2 = i$ in direzione dell'asse z (vedi figura) e con lo stesso verso (ortogonale e uscente dal foglio). Assumendo l'asse x come indicato in figura:

1. Determinare l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (A) dell'asse x (y=z=0) corrispondente a $0 \leq x \leq R$, $\vec{B}_A(x)$ e calcolare le componenti del campo quando $x = 0$, $\vec{B}_A(0)$

$$\vec{B}_A(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vec{B}_A(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (B) dell'asse x (y=z=0), compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d - R$, $\vec{B}_B(x)$, e calcolare e componenti del campo quando $x = \frac{d}{2}$, $\vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right)$

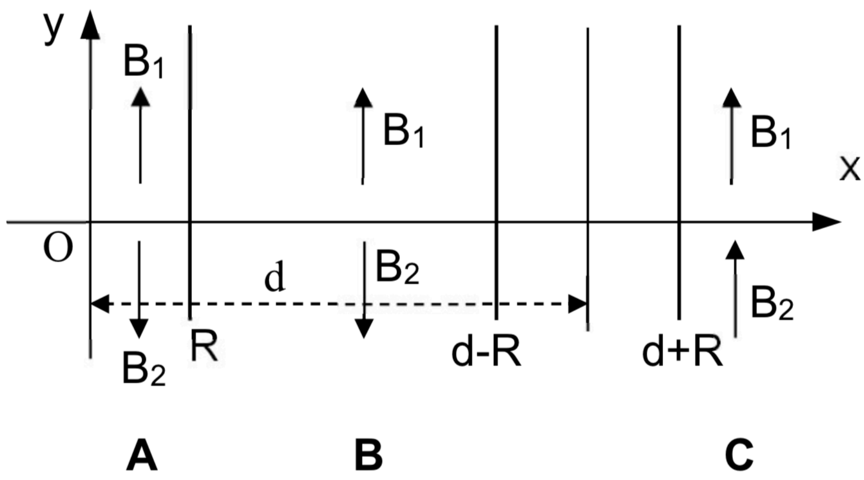
$$\vec{B}_B(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vec{B}_B\left(\frac{d}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Si determini l'espressione del campo di induzione magnetica nella regione (C) dell'asse x (y=z=0), corrispondente a $x \geq d + R$, $\vec{B}_C(x)$

$$\vec{B}_C(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dati: $d = 4\ cm$, $i = 4\ A$.

Soluzione Esercizio 2



Le linee di campo magnetico per un filo percorso da corrente sono delle circonferenze con centro sull'asse del filo (parallelo all'asse z per i fili di questo esercizio, non indicato in figura e uscente dal foglio) e parallele al piano ortogonale al filo (x,y, per i due fili dell'esercizio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo per i fili di questo esercizio è antiorario rispetto all'asse z.
Il verso e la direzione del campo creato da ciascun filo ($\overrightarrow{B}_1$ e $\overrightarrow{B}_2$), nelle regioni A, B e C, sono quelli indicati nella figura (il disegno non è in scala). Per il teorema di sovrapposizione il campo magnetico risultante in ogni regione è dato dalla somma vettoriale dei campi $\overrightarrow{B}_1$ e $\overrightarrow{B}_2$ nella regione di interesse. L'espressione dei moduli dei campi magnetici in ogni regione si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico r:

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I_{conc}$$

dove I_{conc} è la corrente concatenata con la linea circolare ed r indica la distanza tra l'asse del filo considerato e il punto in cui si vuole calcolare il campo.

1. Nella regione A per $0 \leq x \leq R$, dall'applicazione del Teorema di Ampere otteniamo per il modulo di $\overrightarrow{B}_1$:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi x}$$

in questo caso il campo magnetico è calcolato all'interno del filo 1 per cui:

$$I_{conc} = \frac{i}{\pi R^2}\pi x^2 \quad \Rightarrow \quad B_1(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{x}{R^2}$$

Per cui tenendo conto del verso e della direzione:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{x}{R^2}\hat{y}$$

Mentre, per il modulo di $\overrightarrow{B}_2$:

$$B_2(x) = \frac{\mu_0 I_{conc}}{2\pi\,(d-x)}$$

in questo caso il campo magnetico è calcolato all'esterno del filo 2 per cui:

$$I_{conc} = i \quad \Rightarrow \quad B_2(x) = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}$$

Per cui tenendo conto del verso e della direzione:

$$\overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}\hat{y}$$

Sommando per la regione A i campi generati dal filo 1 e dal filo 2 otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_A(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{(d-x)}\right)\hat{y}$$

Per $x = 0$:

$$\overrightarrow{B}_A(0) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{d}\hat{y} \quad con \ -\frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{1}{d} = -2 \times 10^{-5}\ T$$

2. Usando la stessa procedura nella regione B compresa tra i due fili, corrispondente a $R \leq x \leq d - R$ e tenendo conto che in questo caso $I_{conc} = i$ per il contributo di ciascun filo, otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_2 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi\,(d-x)}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_B(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(d-x)}\right)\hat{y}$$

per cui, per $x = d/2$ il campo magnetico è nullo.

3. Nella terza regione (C), corrispondente a $x \geq d + R$, applicando la stessa procedura, con $I_{conc} = i$ per il contributo di ciascun filo e poichè $\overrightarrow{B}_2$ in questo caso ha direzione e verso dell'asse y, otteniamo:

$$\overrightarrow{B}_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi\,(x-d)}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{B}_C(x) = \overrightarrow{B}_1 + \overrightarrow{B}_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-d)}\right)\hat{y}$$