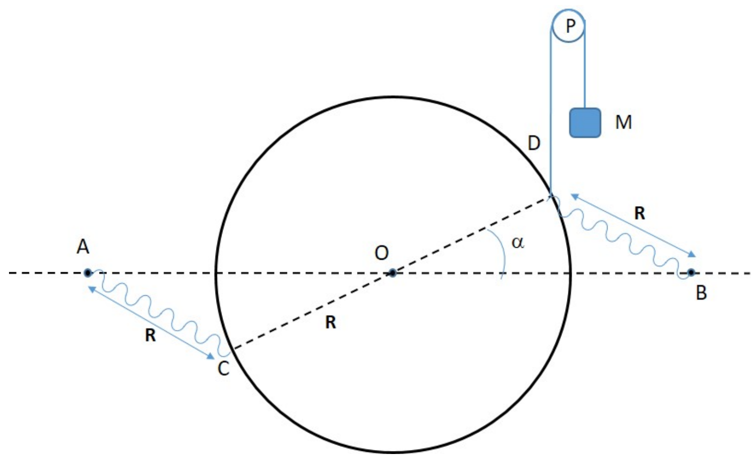
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 29/06/2018
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un disco di legno (densità ρ_{legno}, raggio R e spessore d) può ruotare intorno a un asse orizzontale passante per il suo centro O. Nei punti A e B, posti lungo la retta passante per il diametro orizzontale, sono disposte due molle di lunghezza a riposo nulla e costanti elastiche $k_{BD} = k$ e $k_{AC} = 2k$, i cui altri estremi sono connessi al bordo del disco, rispettivamente nei punti C e D.
Un filo ideale esercita una forza verticale nel punto D ed il sistema risulta in equilibrio nella configurazione in figura, per la quale l'angolo $\alpha = \pi/6$ e la lunghezza di ciascuna molla è pari a R.
A tale filo è appesa una massa M attraverso una carrucola fissa (P) avente massa nulla, su cui il filo può scorrere senza strisciare.

1. Calcolare il valore della massa M nella configurazione di equilibrio.
   $M =$ ....

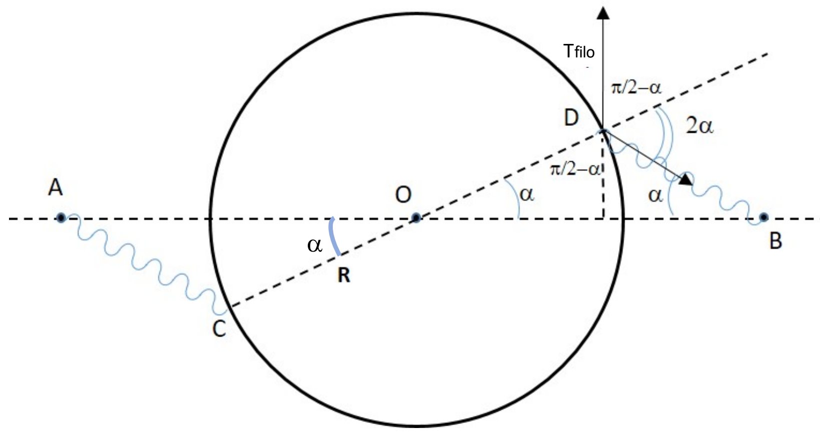
2. All'istante t=0 il filo viene tagliato. Calcolare l'accelerazione angolare, $\dot{\omega}$, e la reazione vincolare in O, $\overrightarrow{R}_O$ subito dopo il taglio del filo.

   $\dot{\omega} =$ .... $\overrightarrow{R}_O =$ ....

3. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni T intorno alla posizione di equilibrio del sistema molle-disco, quando il filo è tagliato
   $T =$ ....

[assumere l'accelerazione di gravità $g = 10\ m/s^2$, $\rho_{legno} = 0.4\ g/cm^3$, $R = 1\ m$, $d = 1\ cm$, $k = 10\ N/m$]

Soluzione Esercizio 1



1. Scriviamo la seconda equazione cardinale per il disco di legno, rispetto al punto O (centro di rotazione e baricentro del problema):

$$\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{T}_{filo} + \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{F}_{elDB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F}_{elAC} = 0$$

La condizione di equilibrio rotatorio applicata alla carrucola priva di massa, permette di ricavare il modulo della tensione del filo, $T_{filo} = Mg$.
Dalla figura si evince che l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{OD}$ e la forza elastica è pari a 2α, mentre l'angolo tra il vettore $\overrightarrow{OD}$ e la tensione del filo è pari a $\pi/2 - \alpha$.
Se il sistema è in equilibrio, il momento delle forze ripetto al polo in O , che può solo essere diretto lungo l'asse di rotazione, deve essere nullo. Tenendo conto che le lunghezze delle molle sono pari al raggio del disco (dato del problema), all'equilibrio la componente parallela all'asse di rotazione è data da (seconda equazione cardinale):

$$-k_{AC}R \cdot Rsin(2\alpha) - k_{DB}R \cdot Rsin(2\alpha) + RT_{filo}sin(\pi/2 - \alpha) = 0$$

da cui:

$$-2kR\frac{\sqrt{3}}{2} - kR\frac{\sqrt{3}}{2} + T_{filo}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

e quindi

$$T_{filo} = 3kR = Mg \rightarrow M = \frac{3kR}{g} = 3 \text{ kg}$$

2. Quando il filo si spezza le equazioni cardinali si scrivono come:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{F}_{elDB} + \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{F}_{elAC} = I\dot{\overrightarrow{\omega}} \\ \overrightarrow{R}_O + \overrightarrow{F}_{elAC} + \overrightarrow{F}_{elDB} + M_{disco}\overrightarrow{g} = 0 \end{cases}$$

Dove gli angoli e le forze elastiche sono quelle calcolate nella prima domanda, I è il momento di inerzia del disco rispetto al punto O, R_O è la reazione del vincolo e $M_{disco} = \rho_{legno} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot d = 12.6$ kg è la massa del disco. Proiettando le equazioni cardinali lungo gli assi coordinati:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}kR^2 = (\frac{1}{2}M_{disco}R^2)\dot{\omega}$$

$$R_{Ox} + k_{DB}Rcos\alpha - k_{AC}Rcos\alpha = 0$$

$$R_{Oy} - k_{DB}Rsin\alpha + k_{AC}Rsin\alpha - M_{disco}g = 0$$

da queste si ottiene:

$$\dot{\omega} = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}kR^2}{\frac{1}{2}M_{disco}R^2} = -4.1\ rad/s^2$$

$$R_{Ox} = -kR\frac{\sqrt{3}}{2} + kR\sqrt{3} = 8.7\ N$$

$$R_{OY} = kR\frac{1}{2} - kR + M_{disco}g = -120.6\ N$$

ovvero $|R_O| = 121\ N$.

3. Le piccole oscillazioni avvengono intorno alla posizione di equilibrio. In tale posizione il momento totale e la risultante delle forze devono essere nulli. Questo avviene quando le due molle sono disposte orizzontalmente, lungo la congiungente AB. In questa posizione la lunghezza delle molle è $l_{molla} = R(\sqrt{3} - 1)$, infatti $2Rcos(\alpha) = OA$ e $l_{molla} = OA - R$ dove OA è la lunghezza del segmento che congiunge O ad A. All'equilibrio θ , angolo tra la molla lato destro e il piano, è nullo, in ogni altra posizione , l'energia totale si può scrivere come:

$$\frac{1}{2}k(l_{molla}^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}(2k)(l_{molla}^2 + R^2\theta^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = E_{tot}$$

Dove per una rotazione θ del disco abbiamo tenuto conto del fatto che per piccoli valori dell'angolo θ le molle si allungano rispetto alla lunghezza all'equilibrio (l_{molla}) di $R\theta$ nella direzione ortogonale a AB, mentre l'allungamento nella direzione paralallela è trascurabile. Poichè non ci sono forze dissipative l'energia si conserva, per cui la derivata di E_{tot} rispetto al tempo è nulla

$$\frac{dE}{dt} = 3kR^2\theta\dot{\theta} + I\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

ovvero

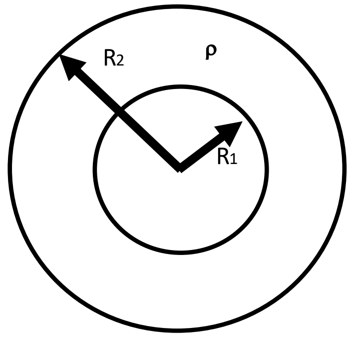
$$\ddot{\theta} + \frac{3kR^2}{I}\theta = 0$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico di pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{3kR^2}{I}} = \sqrt{\frac{6k}{M_{disco}}} = 2.2\ \text{rad/s}$$

ovvero di periodo $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2.9\ s$.

Esercizio 2



Una sfera cava, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, ha una distribuzione di carica radiale con densità di carica di volume $\rho(r) = \rho_0 \frac{R_1}{r}$. All'interno della cavità ($r < R_1$) e all'esterno della sfera ($r > R_2$) non ci sono cariche distribuite.

1. Determinare la carica totale Q presente nella sfera cava e l'espressione del campo elettrico, $\overrightarrow{E}(r)$, in funzione della distanza dal centro della sfera
   $Q =$ .... $\overrightarrow{E}(r) =$ ....

2. Determinare la differenza di potenziale (d.d.p.) tra la superficie interna e la superficie esterna della sfera $V_1 - V_2$
   $V_1 - V_2 =$ ....

3. Si supponga che nel centro della sfera cava venga posta una carica puntiforme q, che non alteri la distribuzione di carica e la carica complessiva della sfera cava. Determinare, se esiste, il valore della carica q affinchè il nuovo valore della differenza di potenziale tra la superfice interna e la superfice esterna della sfera $V_1' - V_2'$ si annulli
   $q =$ ....

$[R_1 = 4\ cm, \quad R_2 = 10\ cm \quad \rho_0 = 1 \cdot\ 10^{-4}\ C/m^3]$

Soluzione Esercizio 2

1. Nota la distribuzione di carica della sfera cava, $\rho(r)$, la carica complessiva del guscio è data da:

$$Q = \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 R_1 \int_{R_1}^{R_2} r dr = 2\pi\rho_0 R_1 (R_2^2 - R_1^2) = 2.11 \cdot 10^{-7}\ C$$

Il campo elettrostatico può essere determinato utilizzando il teorema di Gauss. Per una sfera di Gauss di raggio r con origine nel centro della sfera cava la carica complessiva all'interno della sfera di Gauss risulta:

$$q_{int}(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < R_1 \\ \mathrm{q(r)} & \mathrm{R}_1 \le r \le R_2 \\ \mathrm{Q} & \mathrm{R}_2 \le r \end{cases}$$

Dove

$$q(r) = \int_{R_1}^{r} \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 R_1 \int_{R_1}^{r} r dr = 2\pi\rho_0 R_1 (r^2 - R_1^2)$$

Data la simmetria radiale il campo elettrico, ove diverso da 0, è radiale uscente dalla superficie di Gauss scelta. Il flusso di $\overrightarrow{E}$ attraverso una sfera di raggio r con centro coincidente con il centro della sfera cava è dato da:

$$\Phi(\overrightarrow{E}) = E(r) 4\pi r^2 = \frac{q_{int}(r)}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E(r) = \frac{q_{int}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

di conseguenza:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 \le r < R_1 \\ \frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right] & \mathrm{R}_1 \le r \le R_2 \\ \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2\epsilon_0 r^2} & \mathrm{R}_2 \le r \end{cases}$$

e $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$.

2. La differenza di potenziale tra la superficie interna e la superficie esterna è data da:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int_1^2 \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr =$$

$$\frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right) dr = \frac{\rho_0 R_1}{2\epsilon_0}\left[R_2 - R_1 - R_1^2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] = \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2 - R_1\right)^2}{2\epsilon_0 R_2} = 8.14 \cdot 10^3\ V$$

3. Sotto le ipotesi che la carica q non perturbi la distribuzione di carica e la carica complessiva della sfera, per calcolare la differenza di potenziale tra le due superfici in presenza della carica q sappiamo che vale il teorema di sovrapposizione, pertanto:

$$\Delta V' = V_1' - V_2' = \Delta V + \Delta V(q)$$

poichè $V_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\Delta V' = \frac{\rho_0 R_1 \left(R_2 - R_1\right)^2}{2\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Imponendo $\Delta V' = 0$ otteniamo il valore di q

$$q = -2\pi\rho_0 R_1^2 \left(R_2 - R_1\right) = -6.03 \cdot 10^{-8}\ C$$