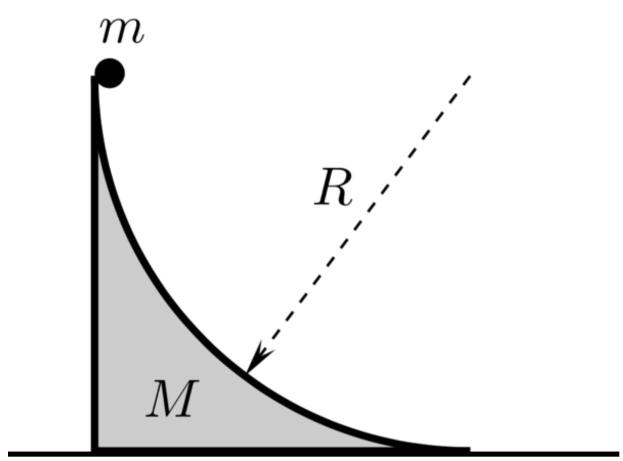
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 20/07/2018
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un punto materiale di massa m è inizialmente fermo sulla cima di di una guida liscia con profilo circolare di raggio R (vedi figura). La guida, di massa M, anch'essa inizialmente ferma, può scivolare su di un piano orizzontale privo di attrito. Al tempo t = 0 il punto materiale viene lasciato libero.

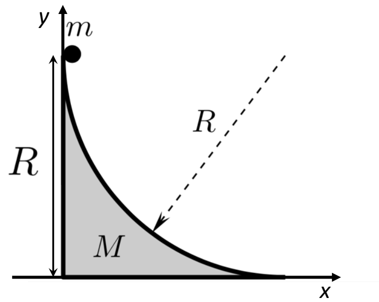
1. Calcolare la velocità finale del punto materiale $\vec{v}$ e della guida $\vec{V}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{v}$ = ... $\vec{V}$ = ...

2. Calcolare la velocità finale del centro di massa del sistema punto materiale-guida, $\vec{V}_{cm}$, quando il punto materiale arriva sul piano.
   $\vec{V}_{cm}$ = ...

3. Come cambierebbero i risultati del punto 1 e 2 se invece di una guida con profilo circolare avessimo un piano inclinato di altezza R e angolo θ?
   $\vec{v}$'=................ $\vec{V}$'=................ $\vec{V}'_{cm}$ = ...

[$m = 2.00\ kg,\ M = 3.00\ kg, R = 0.5\ m$]

Soluzione Esercizio 1



1. Lungo l'asse orizzontale (x), non ci sono forze esterne al sistema guida-punto materiale. Di conseguenza, su tale asse la quantità di moto del sistema guida-punto materiale è conservata:

$$0 = mv_x + MV_x = (m + M)V_{cmx} \tag{1}$$

dall'ultima relazione $V_{cmx} = 0$ ed è costante. Le uniche forze in gioco sono conservative, per cui vale anche la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + mgy = costante$$

dove y è la quota della pallina (possiamo scegliere y = 0 sul piano e ignorare l'energia potenziale della guida che non cambia mai e comparirebbe come costante in entrambi i membri).
Poichè non ci sono forze che agiscono sul sistema lungo l'asse z (uscente dal piano del foglio) nè sulla pallina, nè sulla guida, e neppure sul sistema guida pallina, la quantità di moto rispettivamente della pallina, della guida e del sistema guida-pallina sono costanti e uguali ai rispettivi valori iniziali lungo tale asse, quindi:

$$mv_z = 0 \qquad MV_z = 0 \qquad P_{cmz} = (m + M)\, V_{cmz} = mv_z + MV_z = 0$$

di conseguenza $v_z = 0$, $V_z = 0$ e $V_{cmz} = 0$. Inoltre, poichè la guida scivola sul piano, la risultante delle forze verticali (lungo y) agenti su di essa è nulla, per cui V_y è costante e uguale al suo valore iniziale, che era nullo. Quindi durante il moto la guida (il suo cm) si muove lungo l'asse x, mentre la pallina ha una velocità con componenti nel piano xy.
Quando la pallina è scesa dalla guida, sia $\overrightarrow{v}$ che $\overrightarrow{V}$ sono dirette lungo l'asse x. La conservazione dell'energia ci permette di scrivere:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}MV_x^2 \tag{2}$$

Dalla conservazione della quantità di moto lungo l'asse x, 1, si ottiene

$$V_x = -\frac{m}{M}v_x$$

Sostituendo V_x nell'equazione 2

$$\frac{1}{2}\frac{(m + M)}{M}v_x^2 = gR$$

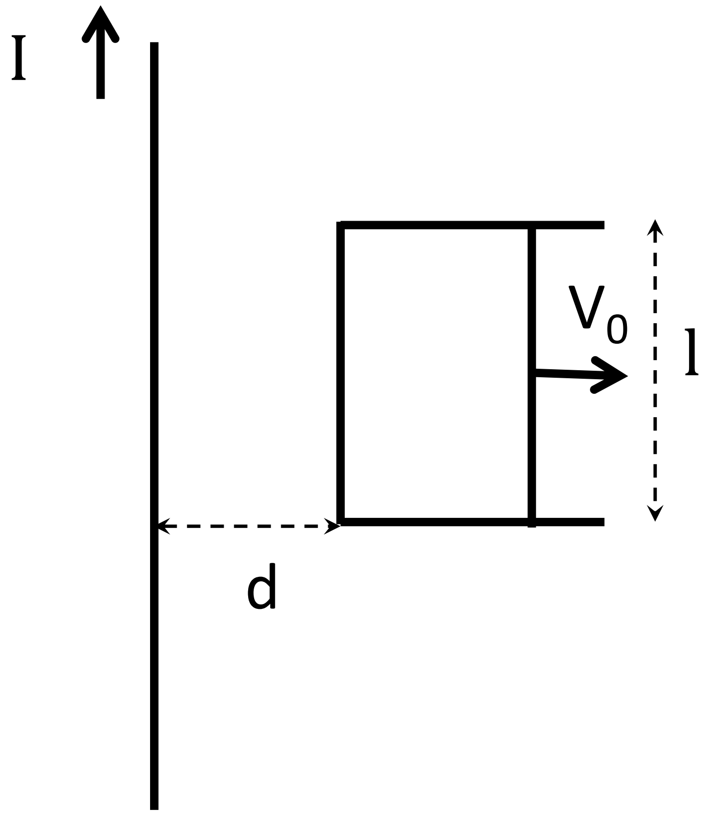
Dalle quali otteniamo infine:

$$v_x = \sqrt{\frac{2MRg}{(m + M)}} = 2.42\ m/s \qquad V_x = -m\sqrt{\frac{2Rg}{M(m + M)}} = -1.62\ m/s$$

2. La velocità finale del centro di massa del sistema guida-punto materiale è nulla, essendo sia la velocità della pallina che della guida dirette lungo x sul piano e valendo la conservazione della quantità di moto lungo x (vedi equazione 1).

3. Il risultato è lo stesso delle domande 1 e 2, in quanto valgono le stesse equazioni una volta che il punto materiale è sul piano.

Esercizio 2



La sbarra conduttrice in figura chiude il circuito costituito da due rotaie conduttrici distanziate di $l = 30\ cm$. La sbarra, indeformabile, è mantenuta in moto perpendicolarmente alle due rotaie con velocità costante v_0. Il sistema è immerso nel campo magnetico generato da un filo infinito rettilineo ideale percorso da una corrente $I = 45\ A$ che giace nello stesso piano delle rotaie e della sbarra. Nell'istante iniziale la sbarra è a distanza $d = 0.2\ m$ dal filo (coincidente con l'inizio delle rotaie).

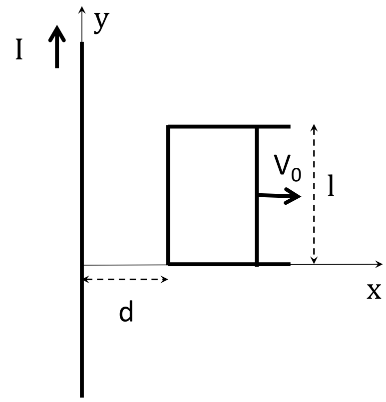
1. Determinare la velocità della sbarra v_0, sapendo che quando essa si trova nella posizione che dista $x_1 = 0.5\ m$ dal filo, il modulo della FEM misurata nel circuito è pari a $|FEM_1| = 0.002\ V$.
   $v_0 =$ ....

2. Se la sbarra è costituita da un filo di rame di raggio $r = 1\ mm$ e la resistenza delle rotaie è trascurabile, calcolare il modulo della forza che agisce sulla sbarra nella posizione x_1, $F(x_1)$.
   $F(x_1) =$ ....

3. Calcolare il modulo della carica Q che ha attraversato il circuito dall'istante iniziale al momento in cui la sbarra raggiunge la posizione x_1. $Q =$ ....

(dati: resistività del rame $\rho_{Cu} = 17 \times 10^{-9}\ \Omega m$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ T/m\ = 1.26 \times 10^{-6}\ T/m$).

Soluzione Esercizio 2



1. Il problema ha simmetria cilindrica, dunque le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze con centro sull'asse y e parallele al piano x,z (l'asse z non indicato in figura è uscente dal foglio). Per la regola della mano destra il verso delle linee di campo è antiorario rispetto all'asse y.
   L'espressione del modulo del campo magnetico nella superficie della spira si ottiene applicando il Teorema di Ampere ad una linea di campo circolare di raggio generico $r = x'$
   $$B(x') = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$
   Il flusso del campo magnetico concatenato alla spira in movimento varia con il tempo. Infatti per un tratto dx di filo, il contributo al flusso è dato da $d\phi(t) = B(x')ldx'$, per cui il flusso attraverso la spira è dato da:
   $$\phi(t) = \int_d^{x(t)} B(x')ldx' = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_d^{x(t)} \frac{dx'}{x'} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(\frac{x(t)}{d}\right)$$
   Dove x(t) indica la posizione della sbarra lungo l'asse x in funzione del tempo. Poichè la sbarra è mantenuta in moto con velocità costante, $x(t) = d + v_0 t$, pertanto:
   $$\phi(t) = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\left(\frac{d+v_0 t}{d}\right)$$
   Di conseguenza, il modulo della FEM indotta al tempo t, è dato da:
   $$|FEM(t)| = |-\frac{d\phi}{dt}| = \frac{\mu_0 Il}{2\pi}\left(\frac{v_0}{d+v_0 t}\right)$$
   Per $t = t^*$, $x(t^*) = x_1$ e $|FEM(t^*)| = FEM_1$, si ottiene:
   $$v_0 = FEM_1 \frac{2\pi x_1}{\mu_0 Il} = 370\ m/s$$
2. Poichè la direzione del campo magnetico e della sbarra sono ortogonali, il modulo della forza sulla sbarra mobile quando questa dista x_1 dall'origine è dato da $F(x_1) = I'lB = \frac{FEM_1}{R} lB(x_1)$, dove
   $$R = \frac{\rho l}{S} = 1.62 \times 10^{-3}\ \Omega$$
   Pertanto:
   $$|F(x_1)| = \frac{FEM_1}{R} lB(x_1) = \frac{FEM_1}{R}\frac{\mu_0 Il}{2\pi x_1} = 6.67 \times 10^{-6}\ N$$
3. Per calcolare la carica dobbiamo integrare la corrente che fluisce nel circuito dall'istante iniziale all' istante in cui la sbarra occupa la posizione x_1
   $$Q = \int_0^{t_1} I'(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{|FEM(t)|}{R}dt = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R} v_0 \int_0^{t_1} \frac{dt}{d+v_0 t}$$
   Cambiando variabile $x = d + v_0 t$, $dx = v_0 dt$ e $dt = \frac{dx}{v_0}$, otteniamo :
   $$Q = \frac{\mu_0 Il v_0}{2\pi R v_0}\int_d^{x_1} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R} ln\left(\frac{x_1}{d}\right) = 1.53\ mC$$