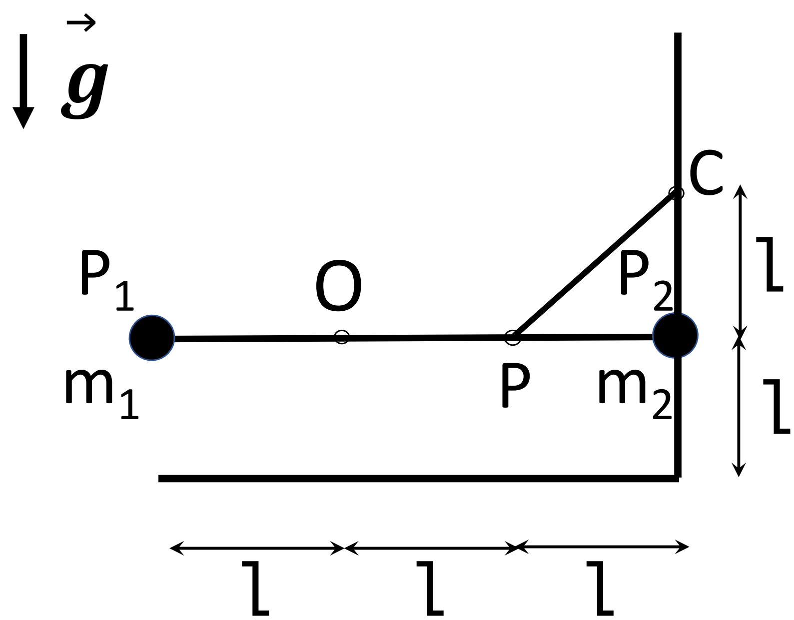
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 14/09/2018
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Due punti materiali di massa $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono collegati da un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza 3l. L'asta può ruotare, nel piano verticale, intorno al punto O, che si trova a distanza l dal corpo di massa m_1, come in figura. Un filo inestensibile collega il punto P al punto C. Entrambi P e C (vedi figura) sono ad una distanza l dal corpo di massa m_2. In questa configurazione l'asta risulta in equilibrio. Determinare:

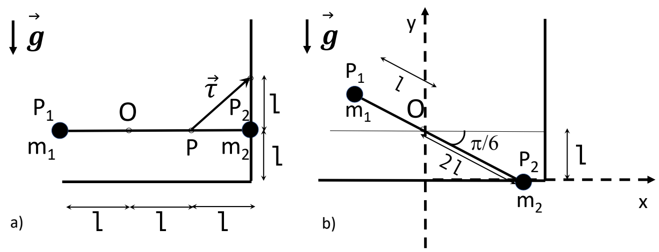
1. La reazione del vincolo in O, $\overrightarrow{R}_O$.
   $\overrightarrow{R}_O =$ ....

2. Nell'ipotesi che ad un certo istante il filo si spezzi, calcolare la velocità angolare dell'asta, ω, un istante prima dell'urto con il piano orizzontale posto a distanza l dalla posizione di equilibrio dell'asta.
   $\omega =$ ....

3. Nell'ipotesi che, a causa dell'urto, le palline si stacchino istantaneamente dall'asta, calcolare il tempo (t^*) impiegato dalla seconda pallina (quella connessa all'estremo che non ha urtato il piano) per raggiungere il piano orizzontale dopo l'urto (trascurare l'effetto dell'aria).
   $t^* =$ ....

(dati: l=20 cm; m=50 g; g=10 m/s^2)

Soluzione Esercizio 1



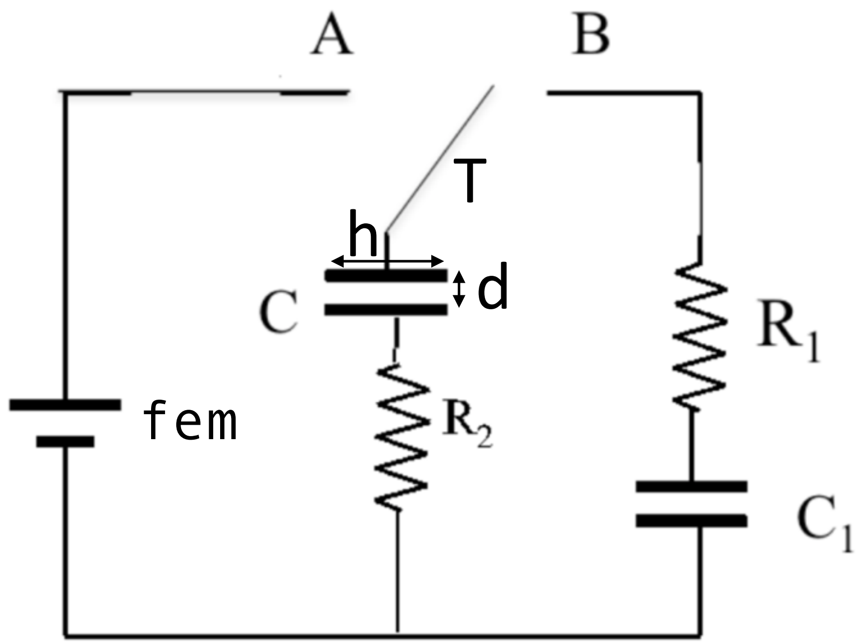
1. All'equilibrio la risultante delle forze che agiscono sul sistema è nulla. Le forze che agiscono sul sistema sono i pesi dei punti materiali, la tensione del filo τ (figura a) e la reazione vincolare $\overrightarrow{R}_O$ in O della cerniera. Pertanto la prima equazione cardinale fornisce:
$$\vec{R}_O + \vec{\tau} + 3m\vec{g} = 0$$
Inoltre all'equilibrio risulta nullo anche il momento delle forze esterne e scegliendo il punto O come polo a cui riferire i momenti, la seconda equazione cardinale, si può scrivere:
$$\vec{OP} \times \vec{\tau} + \vec{OP_1} \times m\vec{g} + \vec{OP_2} \times 2m\vec{g} = 0$$
Notando che la tensione del filo può anche essere scritta come $\vec{\tau} = \tau(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, possiamo scrivere la prima equazione cardinale per componenti:
$$\begin{cases} \mathrm{R}_{Ox} + \tau\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \mathrm{R}_{Oy} + \tau\frac{\sqrt{2}}{2} - 3mg = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione cardinale si ricava il modulo della tensione del filo:
$$l\tau sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + lmg - 2l2mg = l\tau\frac{\sqrt{2}}{2} - 3mgl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tau = 3\sqrt{2}mg$$
e quindi, sostituendo l'espressione di τ nella prima equazione cardinale, le componenti della reazione vincolare in O valgono:
$$\begin{cases} \mathrm{R}_{Ox} = -3mg = -1.5\ N \\ \mathrm{R}_{Oy} = 0 \end{cases}$$

2. Per risolvere il secondo punto si può utilizzare la conservazione dell'energia meccanica, poichè non ci sono forze dissipative. Scegliendo l'origine dell'energia potenziale nella posizione di equilibrio, in tale posizione l'energia totale è nulla. Dalla conservazione dell'energia, poco prima dell'urto l'energia totale si può scrivere come:
$$\frac{1}{2}m\omega^2 l^2 + \frac{1}{2}(2m)\omega^2(2l)^2 + mg\frac{l}{2} - 2mgl = 0$$
da cui si ottiene:
$$\omega^2 = \frac{1}{3}\frac{g}{l}$$
ovvero, poichè il sistema quando viene tagliato il filo ruota in senso orario:
$$\omega = \omega_z = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{g}{l}} = -4.08\ Hz$$

3. La pallina di massa m, nel momento dell'urto (al tempo $t = 0$) si trova ad un'altezza $y_0 = l + l/2 = 3l/2$ rispetto al piano con cui avviene l'urto (vedi figura b) ed ha una velocità $\vec{v_0} = \vec{\omega} \times \vec{OP_1} = |\omega| l \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right), sin\left(\frac{\pi}{3}\right), 0\right)$ ovvero:
$v_{0y} = 0.8 sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.71\ m/s$. L'equazione del moto lungo l'asse y pertanto sarà
$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
Quando la pallina raggiunge il piano: $y(t^*) = 0 = y_0 + v_{0y}t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$, risolvendo l'equazione di secondo grado, si ottengono due soluzioni una negativa e una positiva, la soluzione cercata è quella con $t^* > 0$, per cui:
$$t^* = 0.32\ s$$
.

Esercizio 2



Un condensatore piano parallelo con armature di lati $h = 5\ mm$ e $l = 4\ mm$ e distanti $d = 3\ mm$ è riempito per metà della sua altezza ($h/2$) di un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 4.1$

1. Calcolare la capacità equivalente C_{eq} del condensatore C
   $C_{eq} =$ ....

Questo condensatore di capacità C_{eq} viene quindi inserito nel circuito in figura ($C_1 = 3\ nF$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $fem = 4\ V$) con l'interruttore T chiuso sul punto A, e si aspetta un tempo molto lungo ($t \gg \tau$).

2. Calcolare la carica (Q) e l'energia immagazzinata (U) nel capacitore C.
   $Q =$ .... $U =$ ....

Successivamente, l'interruttore è spostato sulla posizione B, e si aspetta ancora un tempo molto lungo ($t \gg \tau'$). Calcolare in questa configurazione:

3. la carica sui capacitori C (Q_C) e C_1 (Q_{C_1}) e le rispettive energie (U_C e U_{C_1}) in essi immagazzinate.
   $Q_C =$ .... $Q_{C_1} =$ .... $U_C =$ .... $U_{C_1} =$ ....

Dati: $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ F/m$

Soluzione Esercizio 2

1. Il capacitore C riempito per metà di dielettrico può essere schematizzato come 2 capacitori piani in parallelo entrambi di superfice $S = lh/2$ il primo di costante dielettrica ϵ_0 ed il secondo di costante dielettrica $\epsilon_0\epsilon_r$. Essendo i due condensatori piani ed in parallelo, la capacità risultante sarà:

$$C_{eq} = C_{vuoto} + C_{diel}$$

con

$$C_{vuoto} = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 2.95 \times 10^{-14}\ F$$

e

$$C_{diel} = \epsilon_0\epsilon_r \frac{S}{d} = 1.21 \times 10^{-13}\ F$$

per cui:

$$C_{eq} = 1.5 \times 10^{-13}\ F$$

2. Quando T è chiuso su A, il capacitore C inizia a caricarsi fino a quando a regime, $(t \gg \tau)$ la corrente si annulla e la differenza di potenziale ai capi della capacità è pari alla differenza di potenziale del generatore. La carica su C è pertanto:

$$Q = C_{eq} fem = 6.02 \times 10^{-13}\ C$$

mentre l'energia immagazzinata è pari a:

$$U = \frac{1}{2} Q fem = 1.2 \times 10^{-12}\ J$$

3. In questo caso, poichè a regime la corrente è nulla, la carica iniziale si ripartisce tra il capacitore C di capacità C_{eq} e C_1, in modo che la differenza di potenziale sui rispettivi rami è la stessa. Pertanto avremo che: $Q_C + Q_{C_1} = Q$ e $V_C = V_{C_1} = V$.
Per cui : $C_{eq}V + C_1V = Q$, ottenendo $V = Q/(C_{eq} + C_1)$.
Di conseguenza:

$$Q_C = C_{eq}\frac{Q}{C_{eq} + C_1} = 3.02 \times 10^{-17}\ C \qquad Q_{C_1} = C_1\frac{Q}{C_{eq} + C_1} = 6.02 \times 10^{-13}\ C$$

La carica va quasi tutta sul capacitore C_1 che ha più alta capacità ($C_1 \sim 10^4\ C_{eq} \gg C_{eq}$).

Per le energie otteniamo:

$$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q_C^2}{C_{eq}} = 3.03 \times 10^{-21}\ J \qquad U_{C_1} = \frac{1}{2}\frac{Q_{C_1}^2}{C_1} = 6.04 \times 10^{-17}\ J$$