Apparati Sperimentali

ovvero

Rivelatori di particelle per lo studio della fisica delle interazioni fondamentali

A.A. 2002-2003; II semestre

Prof. Rino Castaldi, Dr. Fabrizio Palla

Con il contributo su argomenti specifici da parte di:

Dr<u>ssa</u>. Gloria Spandre, Dr. Roberto Dell'Orso, Dr. Piero Giorgio Verdini

13. Distribuzioni, Istogrammi e fit

Introduzione:

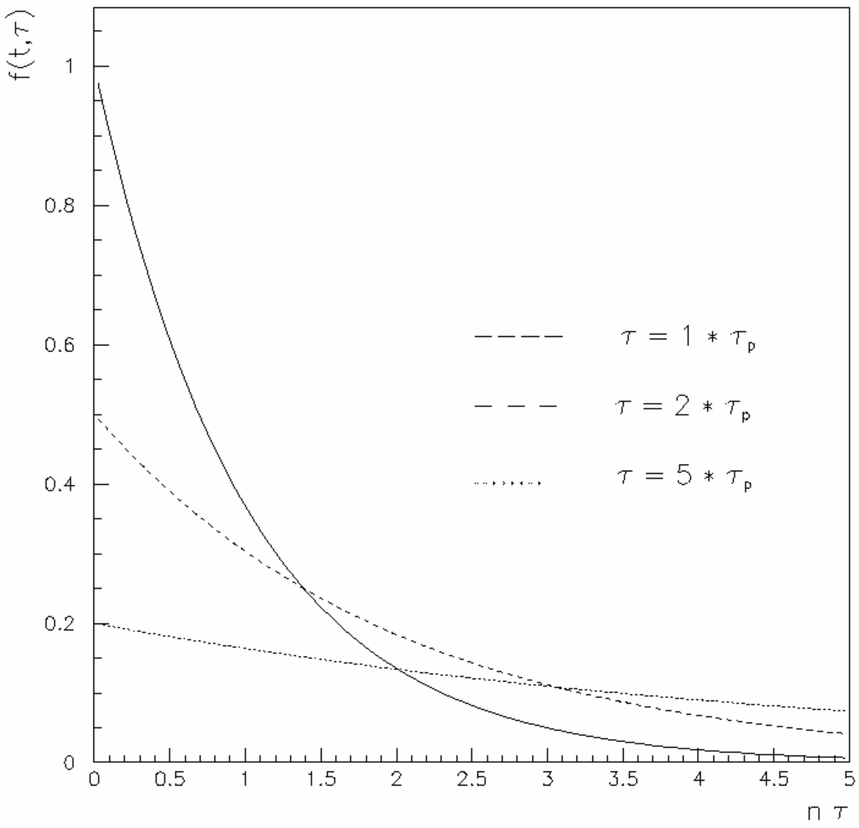
- Dovrete analizzare parecchi dati complicati
- Cio` e` fatto spesso usando delle "distribuzioni" di specifiche osservabili in forma di istogrammi confrontandoli con le predizioni teoriche
- Dovrete quindi imparare
  - Cos'e` una distribuzione (o meglio, una probability density function, pdf), cos'e` un istogramma
  - Alcune sottigliezze da ricordare lavorando con gli istogrammi
  - Come effettuare un fit
- Questo non e` un corso di statistica!! Leggete per es. Il libro di Glen Cowan's!!

Probability density functions

- Un osservabile x di un esperimento (che e` ripetuto molte volte) e` distribuita secondo una funzione di densita` di probabilita` (pdf)
  - Una specifica osservabile puo` “fluttuare” a causa di parametri incontrollabili (random)
    - Ad es. il rumore nella misura di tensione
  - Oppure perche’ la quantita` fisica fondamentale e` distribuita di per se’ su pdf
    - Meccanica quantistica, decadimenti, scattering di particelle,...
- Definizione di una distribuzione di probabilita` (p.d.f) di una variabile random x , $f(x)$:

Esempi:

- Vita media t di una particella instabile nel suo sistema di riferimento:
  - Ad es. Pione, vita media τ_P = 2.6x10^{-8} sec



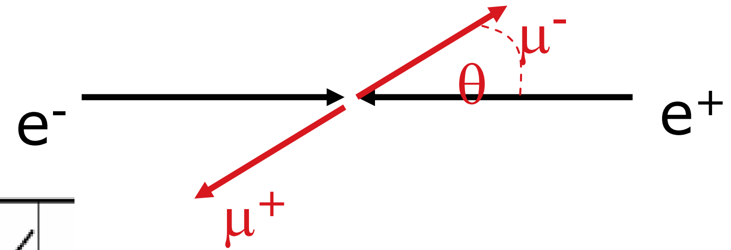
$$f(t;\ \tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

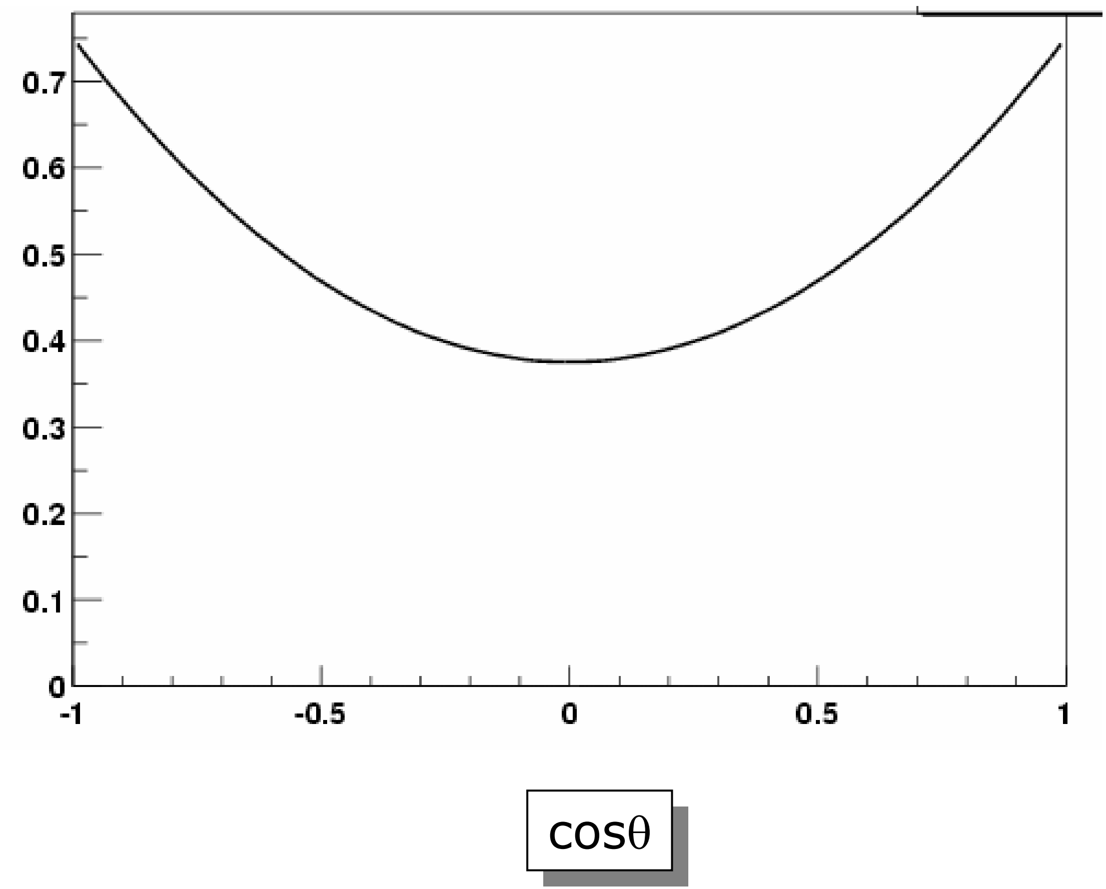
$E[t] = \tau$

$V[t] = \tau^2$

Esempi:

- distribuzione dell' angolo polare θ di un muone nel processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



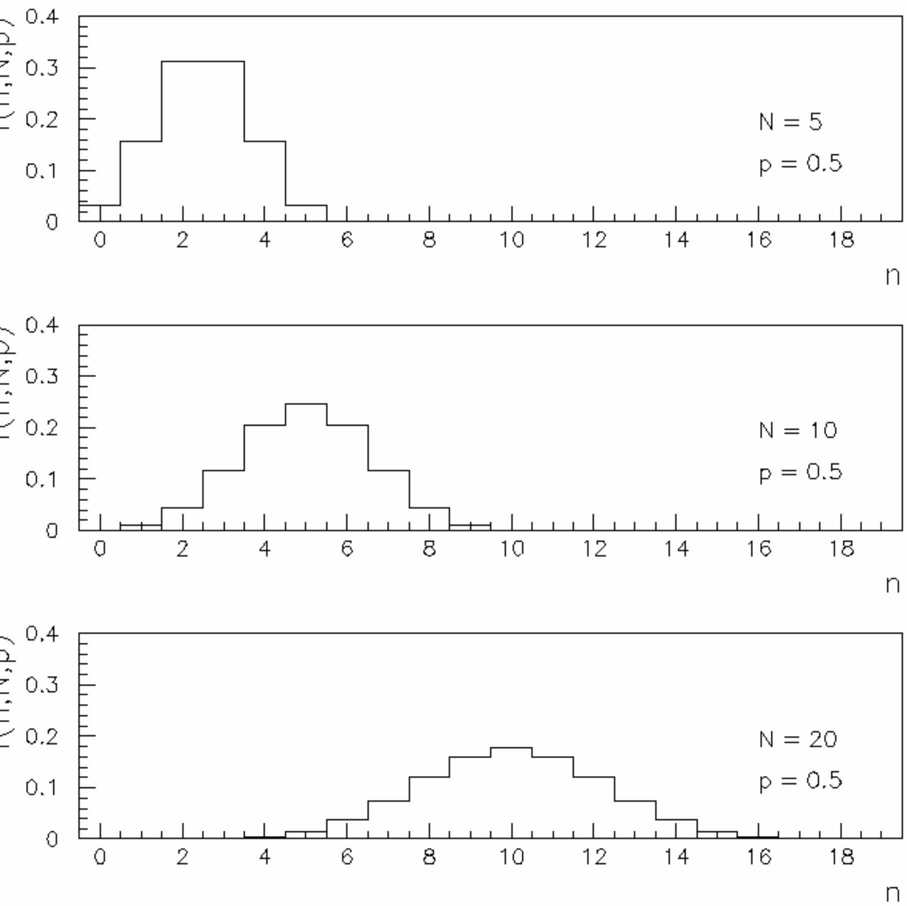


$$\frac{1}{\sigma_{tot}}\frac{d\sigma}{d\cos\theta} =$$

$$\equiv f(\cos\theta) = \frac{3}{8}\left[1 + (\cos\theta)^2\right]$$

Altre distribuzioni standard:

- A) Binomiale:
  - N prove, probabilita` di "successo" = p, per "insuccesso" = 1-p
  - distribuzione di n uscite favorevoli (ad es. Testa nel lanciare una moneta)



$$f(n;\ N,p) = \frac{N!}{n!(n-N)!}\, p^n (1-p)^{N-n}$$

$$E[n] = Np$$

$$V[n] = Np(1-p)$$

Altre distribuzioni standard :

- B) Distribuzione multinomiale: generalizzazione della binomiale a m possibili uscite:
  - N prove, probabilita` per un "uscita k" = p_k
  - distribuzione di $n_1, n_2, ..$ Uscite utili 1,2,3 ... (ad es. Un istogramma, vedi dopo)

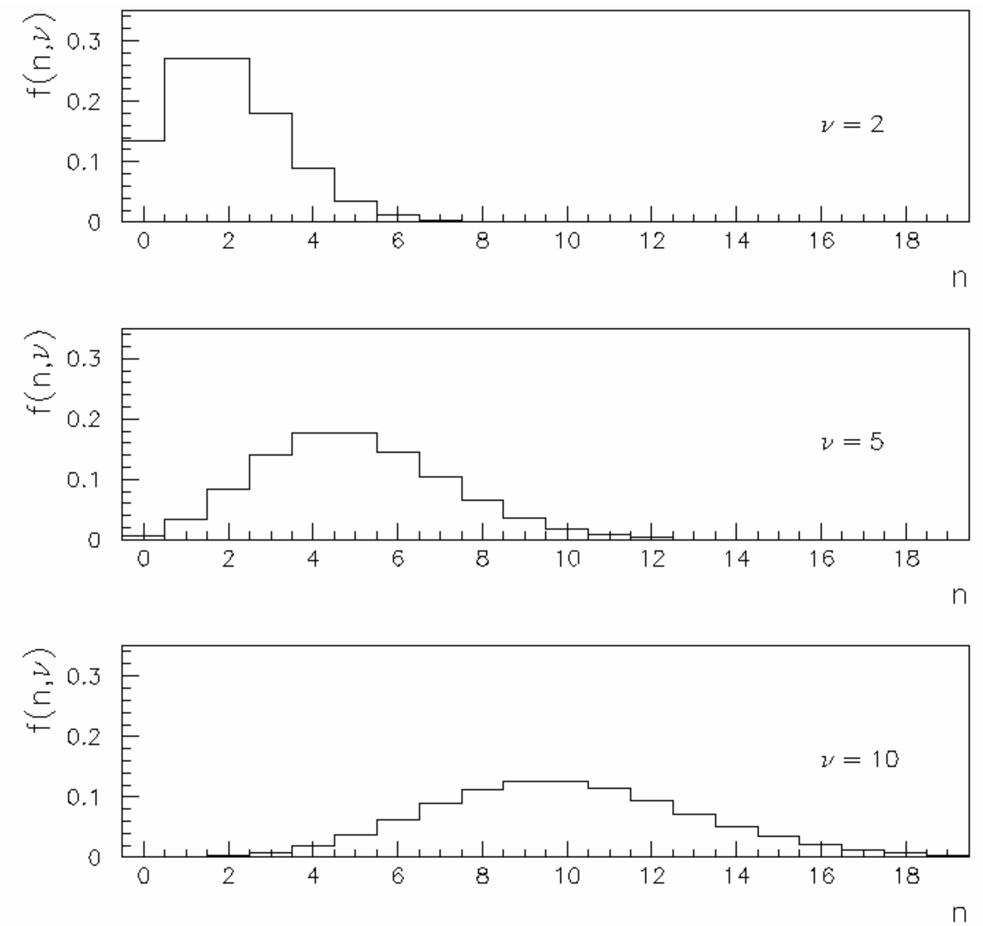
$$f(n_1,\cdots,n_m;\ N,p_1,\cdots,p_m)=\frac{N!}{n_1!\,n_2!\cdots n_m!}\,p_1^{n_1}\,p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$$

$$E[n_i]=Np_i$$

$$V[n_i]=Np_i(1-p_i)$$

Altre distribuzioni standard :

- C) Poissoniana : Limite di una binomiale per N→∞, p→0, Np = ν , finita :
  - Ad es. Numero di decadimenti radioattivi in un tempo finito
  - Numero di uno specifico tipo di eventi in uno scattering di particelle, quando il numero di eventi e' alto ed il processo e' raro



$$f(n;\ \nu) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}$$

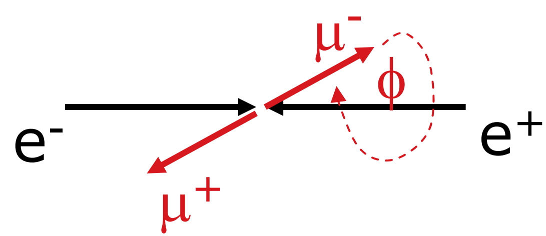
$$E[n] = \nu$$

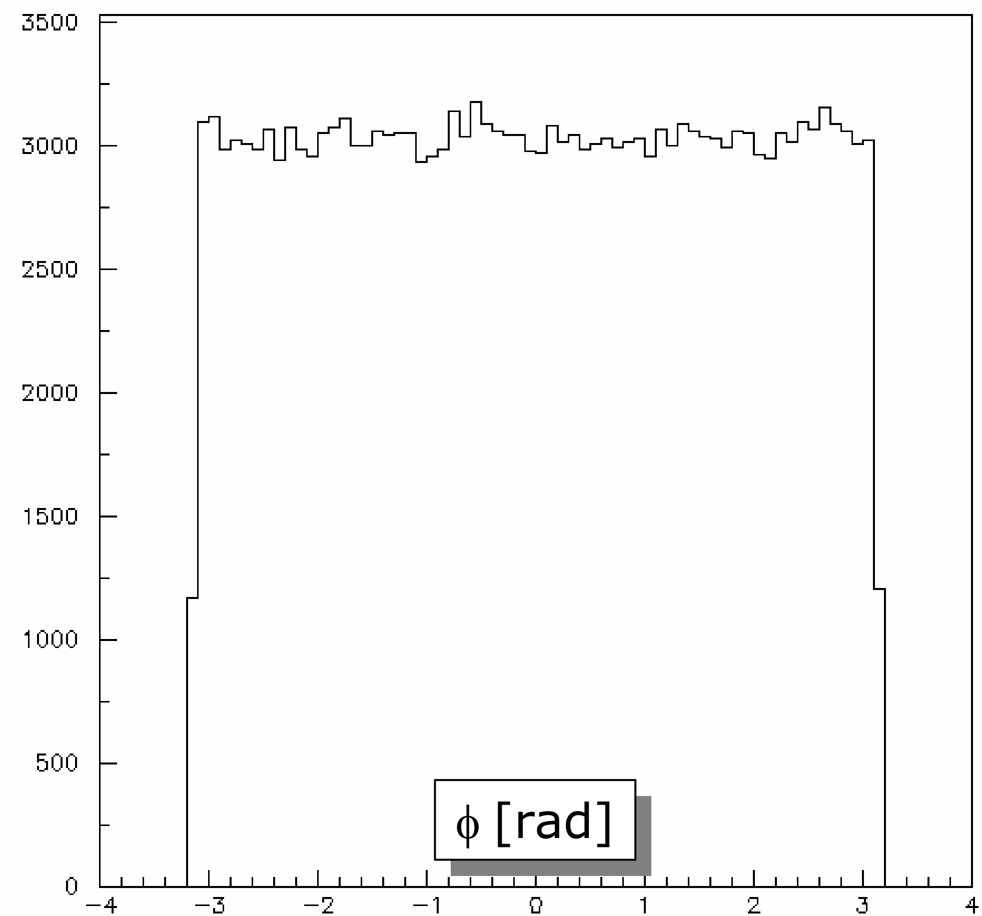
$$V[n] = \nu$$

Altre distribuzioni standard :

- D) Uniforme: Probabilita e\` costante su un certo intervallo.
  - Esempio: distribuzione dell'angolo ϕ dei muoni

  nel processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$





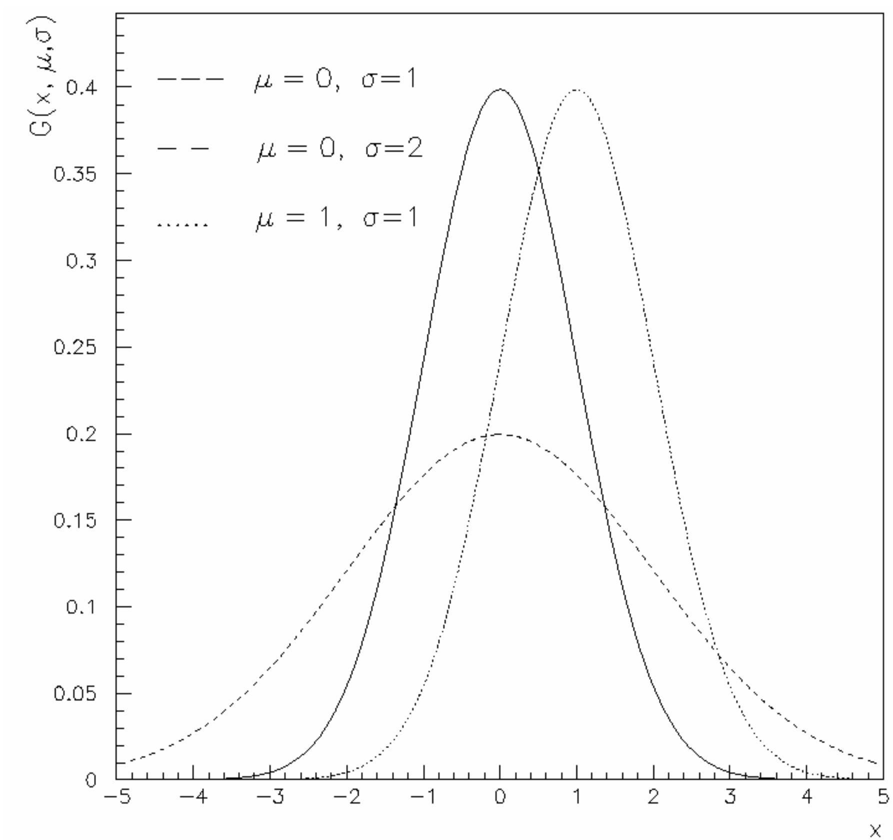
$$f(x;\ \alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$E[x] = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$V[x] = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2$$

Altre distribuzioni standard :

- E) Gaussiana :
  - importante : teorema del limite centrale!! (la somma di n variabili random e` distribuita secondo una gaussiana per n $\to\infty$)
  - Ad es. La risoluzione sperimentale, vedi dopo



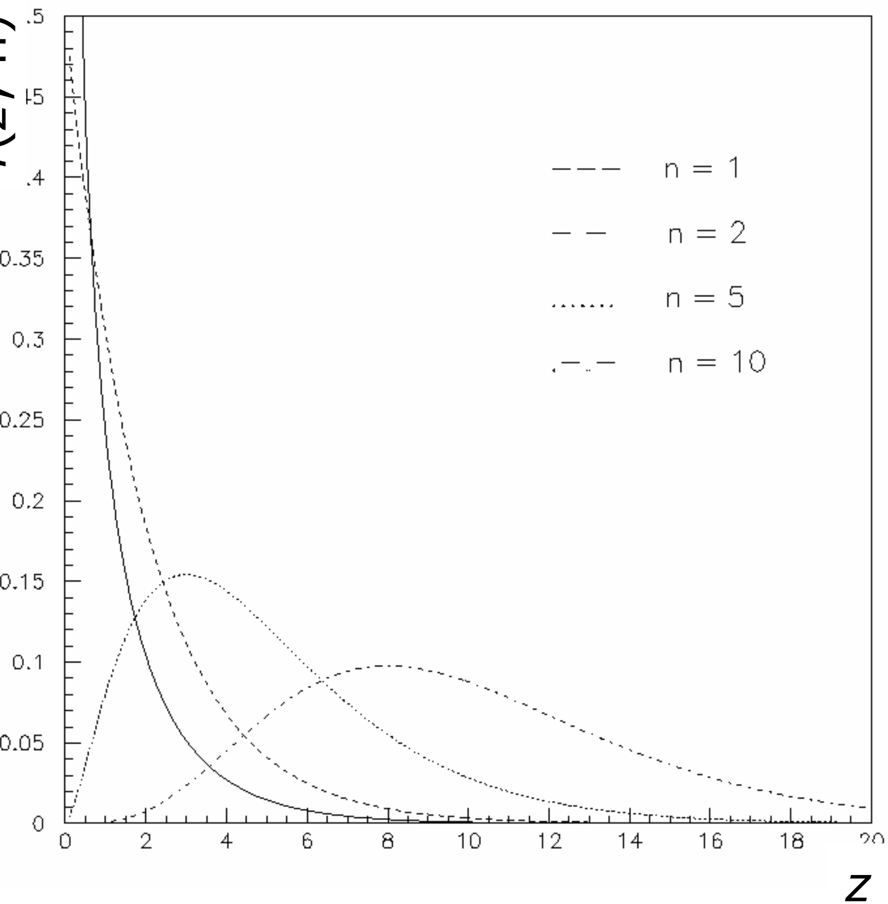
$$f(x;\ \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E[x] = \mu$$

$$V[x] = \sigma^2$$

Altre distribuzioni standard

- F) Chi-quadro (χ^2) :
  - Importante connessione con il metodo di fit
  - Ad es. $z=\Sigma_n((x-\mu)/\sigma)^2$, (x distribuita secondo una gaussiana di media μ e varianza σ) , e' distribuita secondo il χ^2



$$f(z;\ n)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}z^{n/2-1}e^{-z/2}\quad;\quad n=1,2,\ldots$$

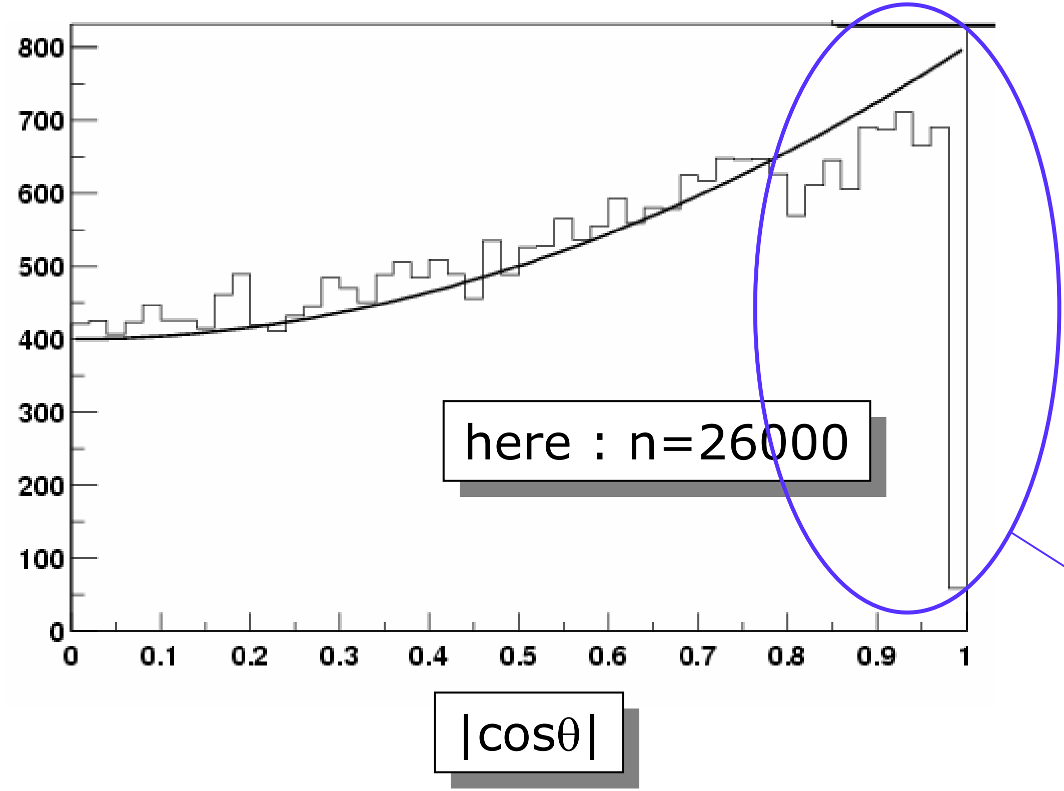
$$E[z]=n$$

$$V[z]=2n$$

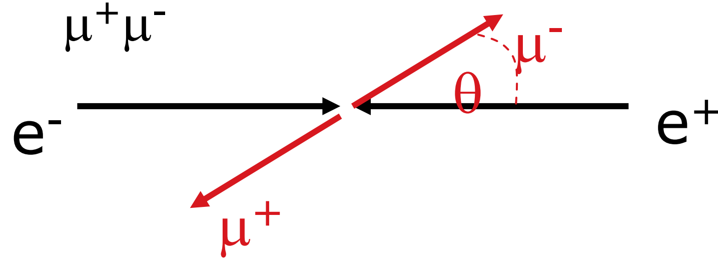
Numero di gradi di liberta`
NdoF

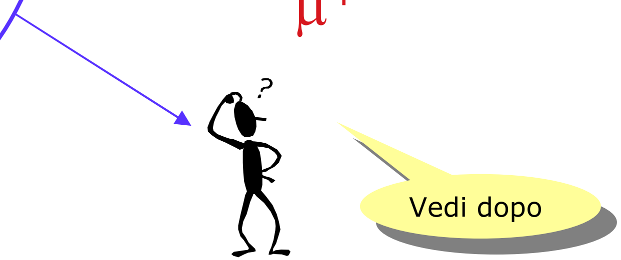
Istogrammi

- Nella vita di tutti I giorni la variabile casuale x non e' continua, ma assume dei valori discreti $x_1, x_2, \ldots , x_n$.
- Normalmente il modo utilizzato per mostrare la distribuzione avviene usando un **ISTOGRAMMA.**



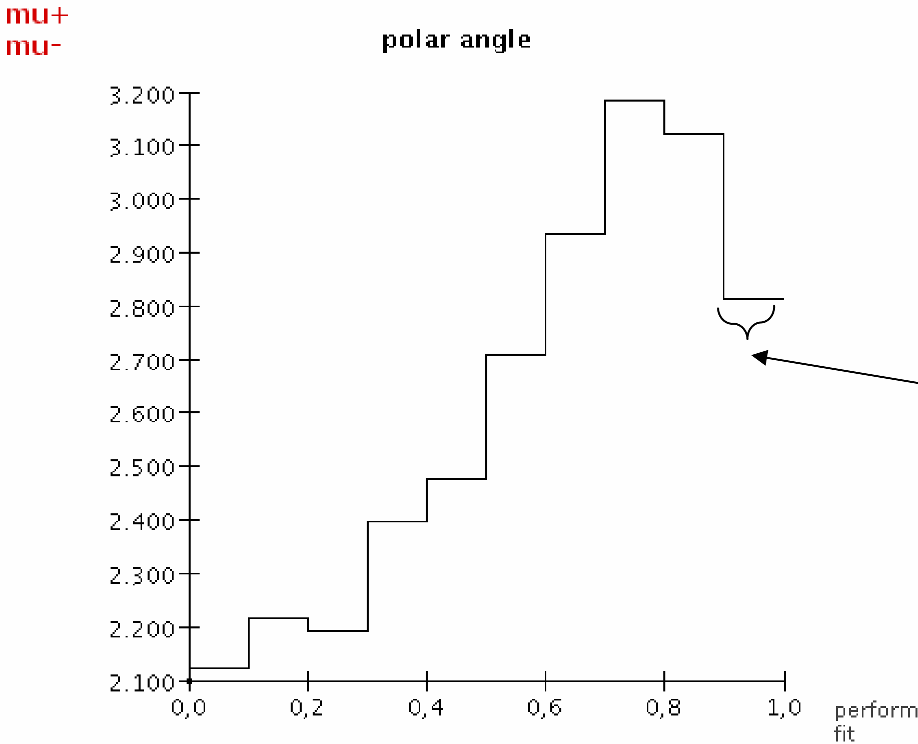
- Esempio: angolo polare θ (evento per evento) di un muone nel processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$





- Idea: un istogramma approssima la pdf, e confrontarlo con la predizione teorica (linea)

Istogrammi



	Sum	Entries	Mean	RMS
Monte Carlo	26,168.00	46,937	0.05	0.61

Definizione e caratterizzazione
(entries, normalizzazione, ...)

Largehezza del bin
(qui bin uguali)

Numero di Bin

Range

Process group: alephz h1cc h1nc l3higgs189

Histogram definition:

Title: polar angl Number of Bins: 10

Lower edge: 0 Upper edge: 1

Istogrammi

- Per molte entries N : l’istogramma approssima una distribuzione di probabilita`
- Cosa significa “approssima”?
- Occorre vedere quali sono gli errori su una singola “entry” di un istogramma

Istogramma: Errori

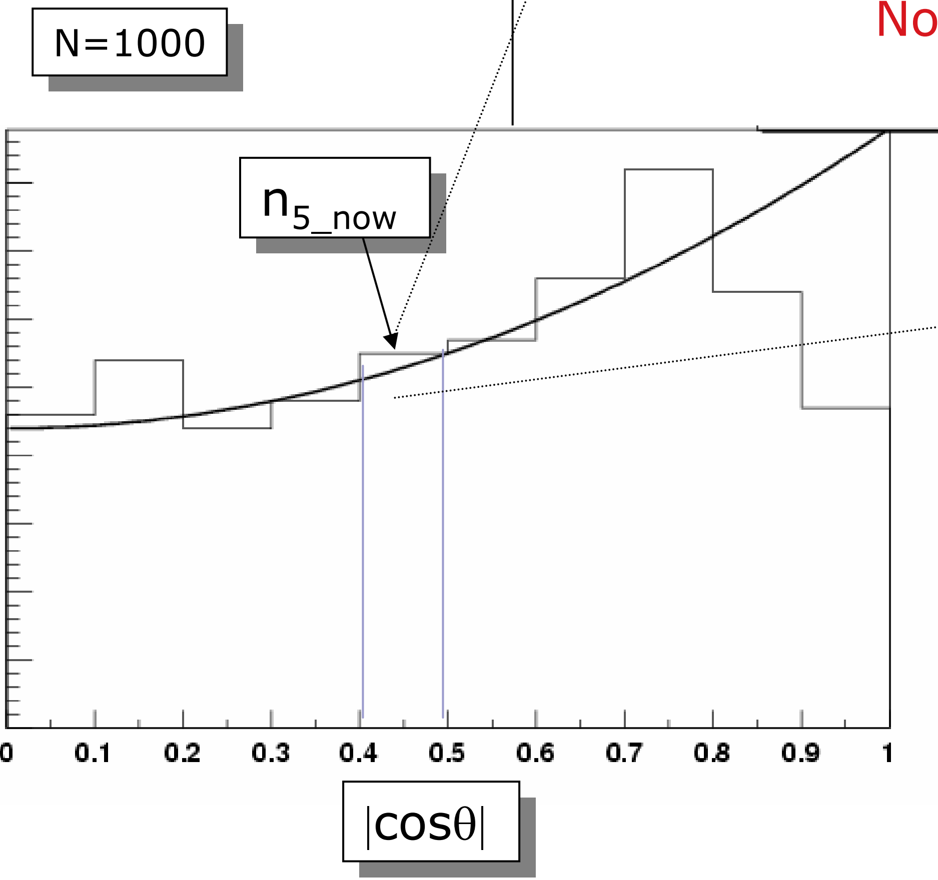
Il # di eventi n_5 nel bin 5 e\` distribuito secondo una Poissoniana.

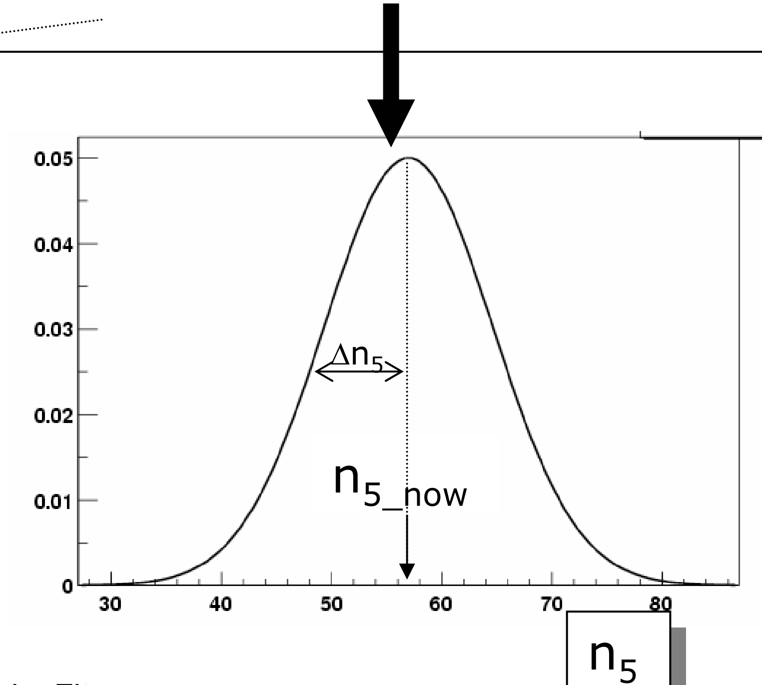
Normalmente: Dato $n_{5\_now} = E[n_5] = \nu$

$\Rightarrow \Delta n_5 = \mathrm{sqrt}(\nu) = \mathrm{sqrt}(n_{5\_now})$

Per un grande numero N di eventi:

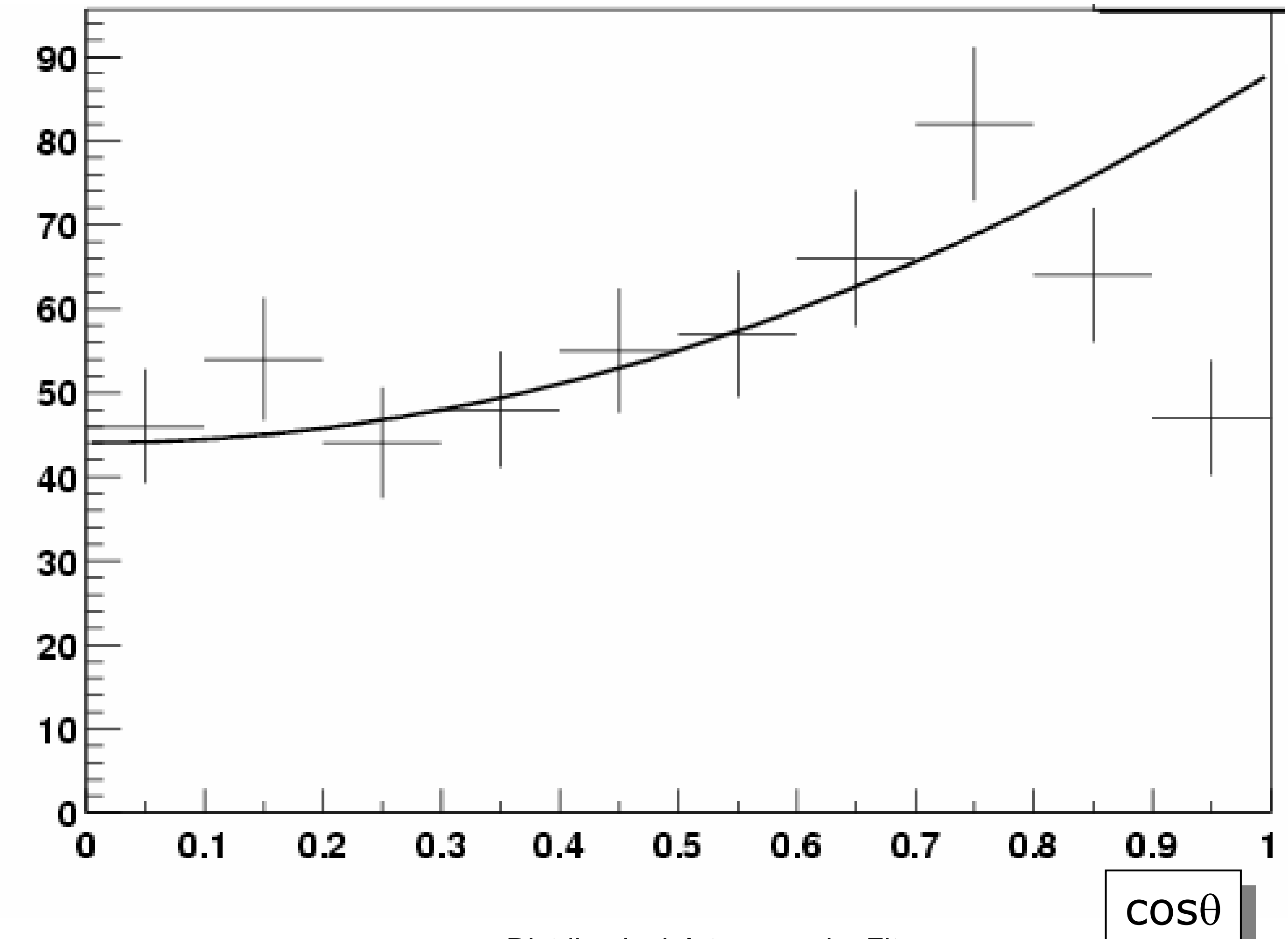
Approsimato da una Gaussiana!





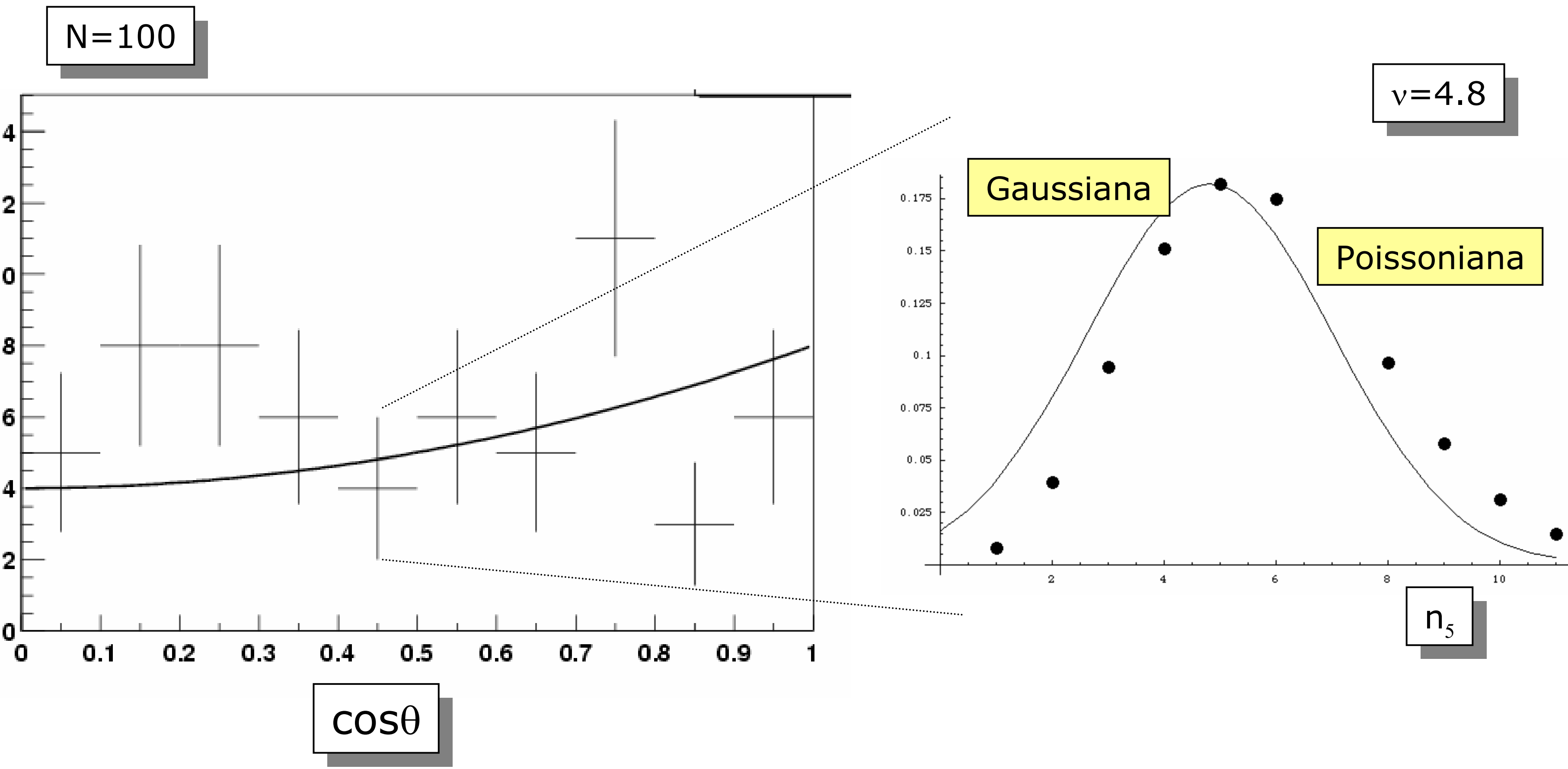
Istogramma: Errori

- Si presenta quindi cosi` ....

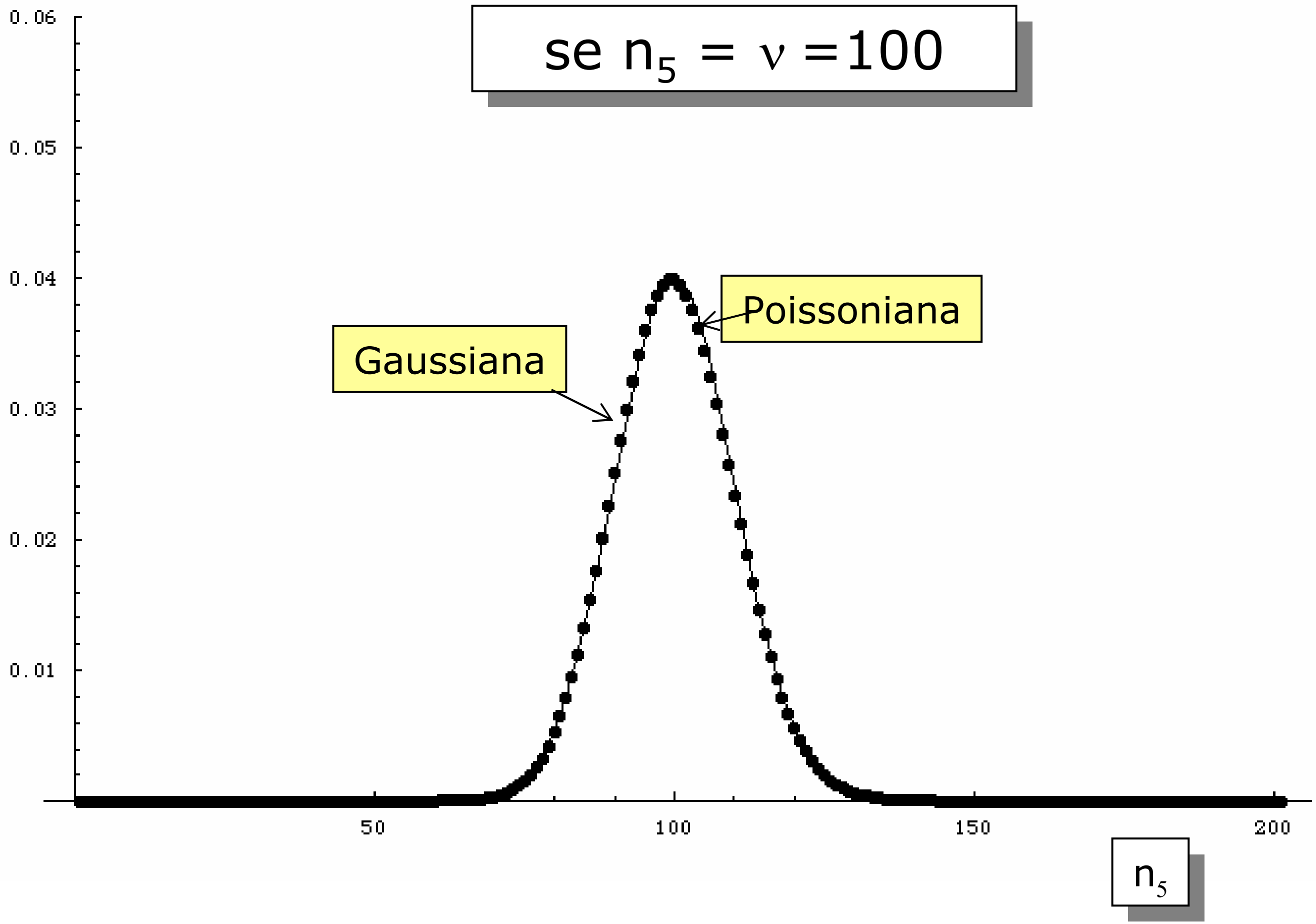


Istogramma: Errori

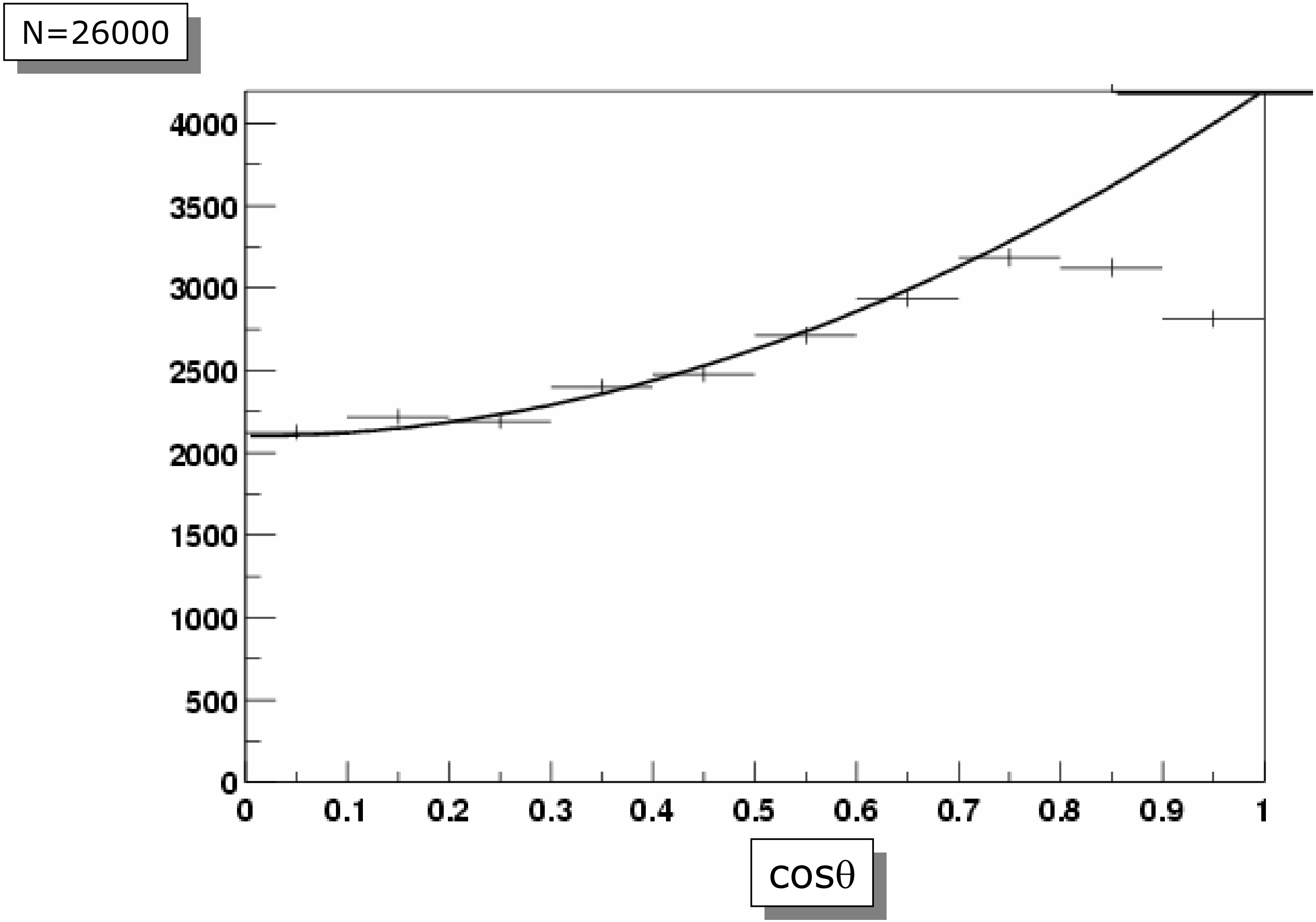
- Attenzione : se il numero di eventi e' piccolo...



Nota : Poissoniana-Gaussiana…

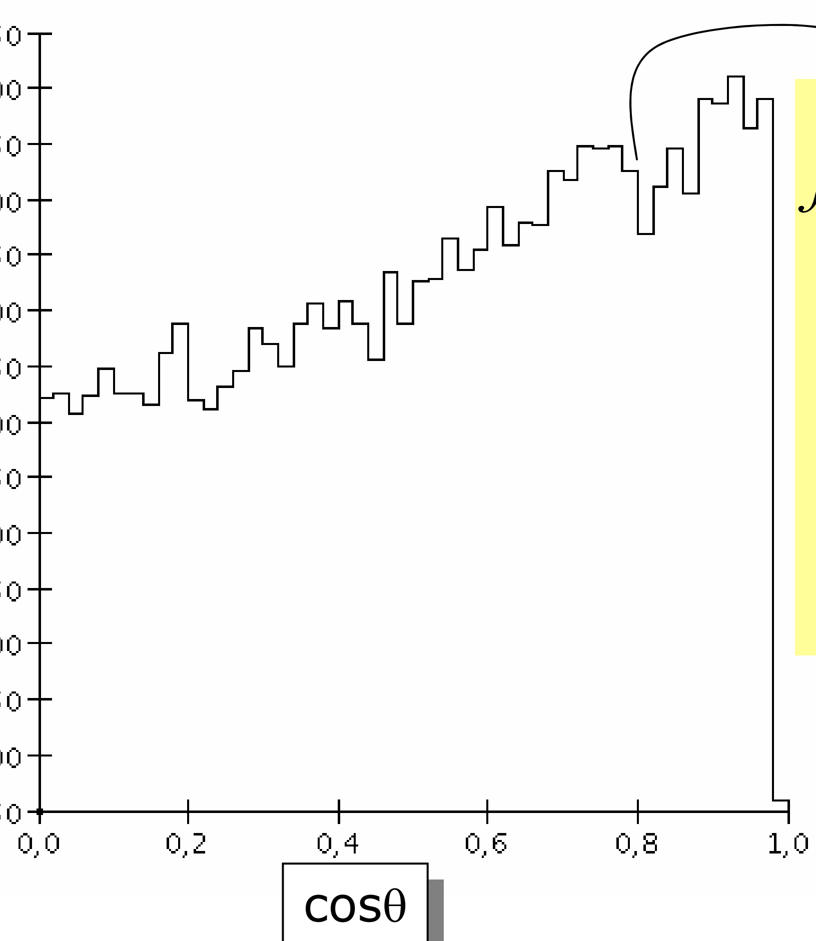


Istogramma: Errori



Istogramma: Errori

NOTA: se **N e' fissato**, e vi chiedere come sono distribuite le entries Individuali in ciascun bin $n_1, \dots, n_m$ la risposta e' una Multinomiale



$$f(n_1, \cdots, n_m; N, p_1, \cdots, p_m) = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$$

$$E[n_i] = Np_i$$

$$V[n_i] = Np_i(1 - p_i)$$

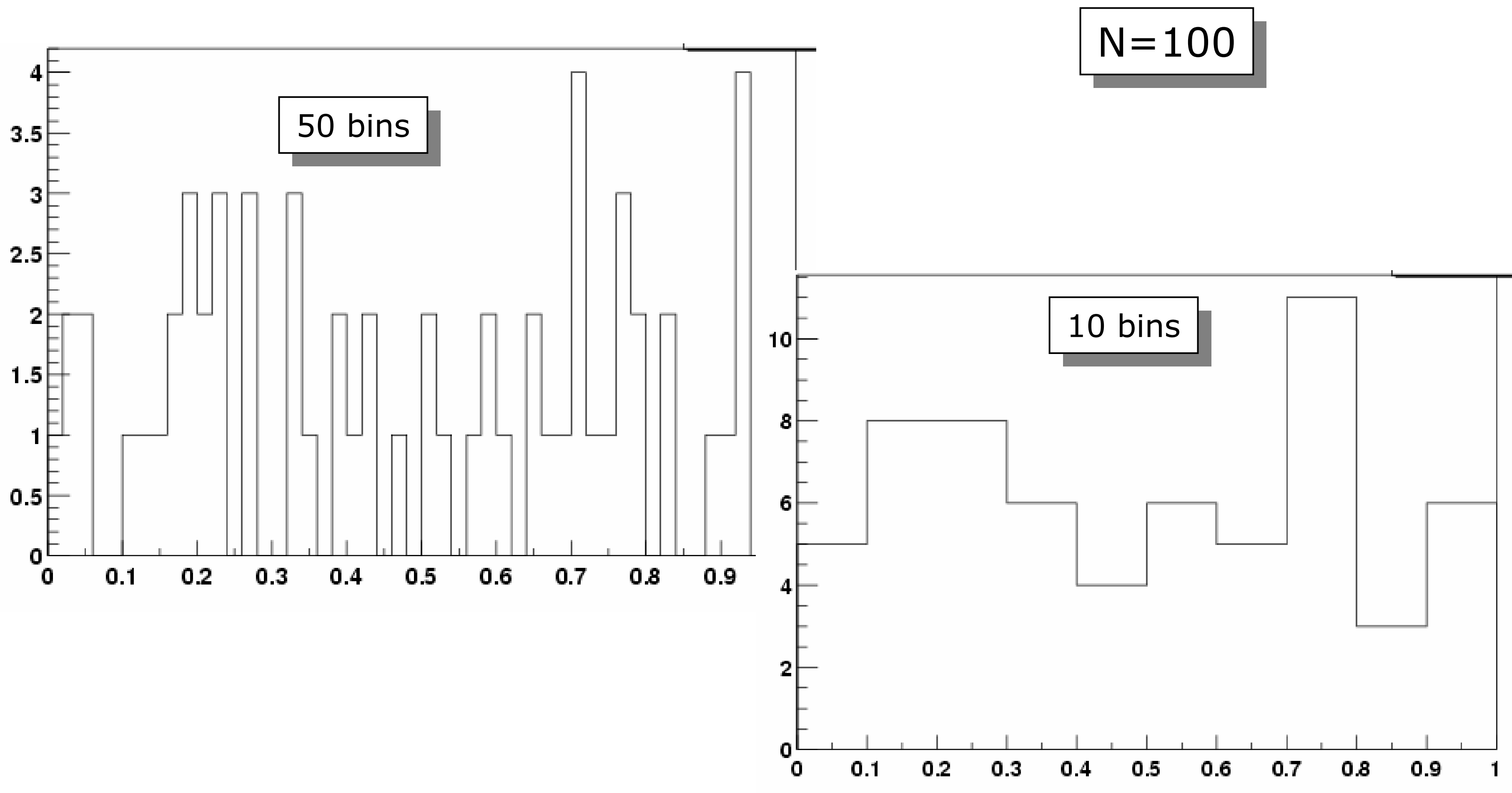
Approssimazione usuale:

$p_i = n_{i\_now}/N$

Istogramma: qualche trucco

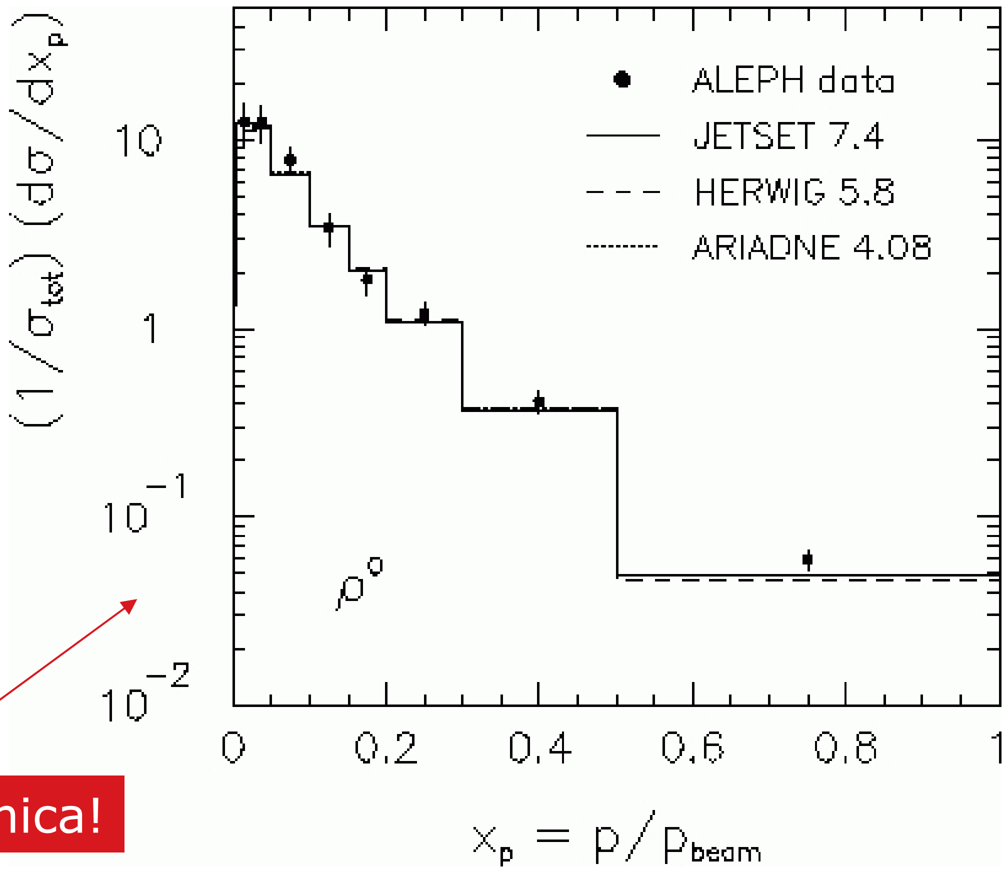
- Scelta della larghezza del bin
- underflows, overflows
- Funzioni che variano velocemente

Scelta della larghezza del bin



Scelta della larghezza del bin

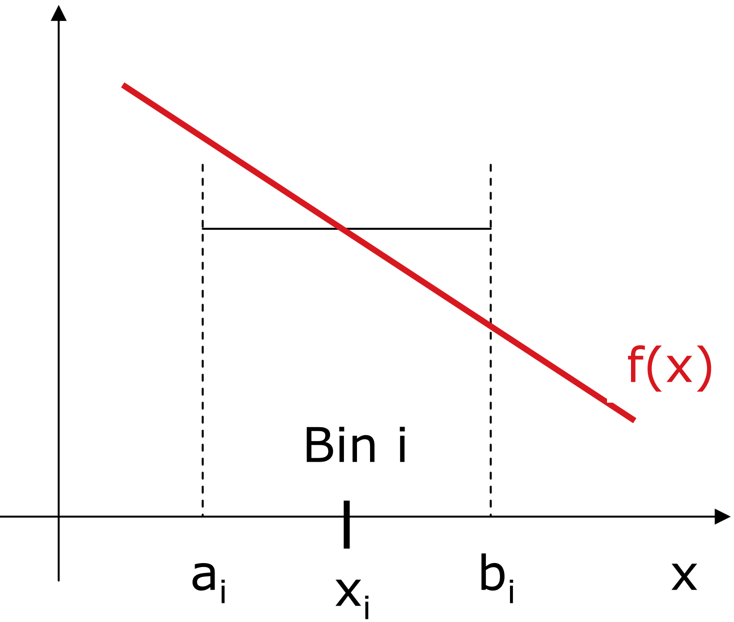
- es: distribuzione in impulso della risonanza ρ

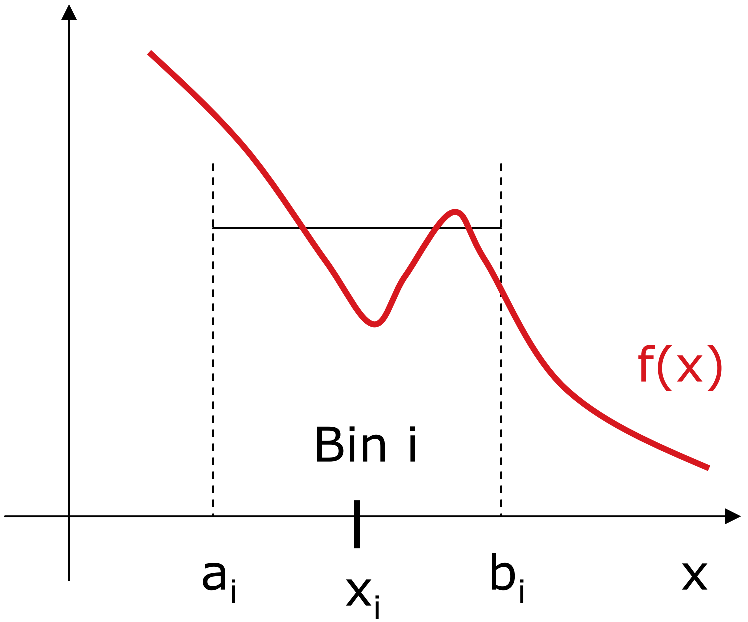


Scala logaritmica!

Confronto di istogrammi con funzioni

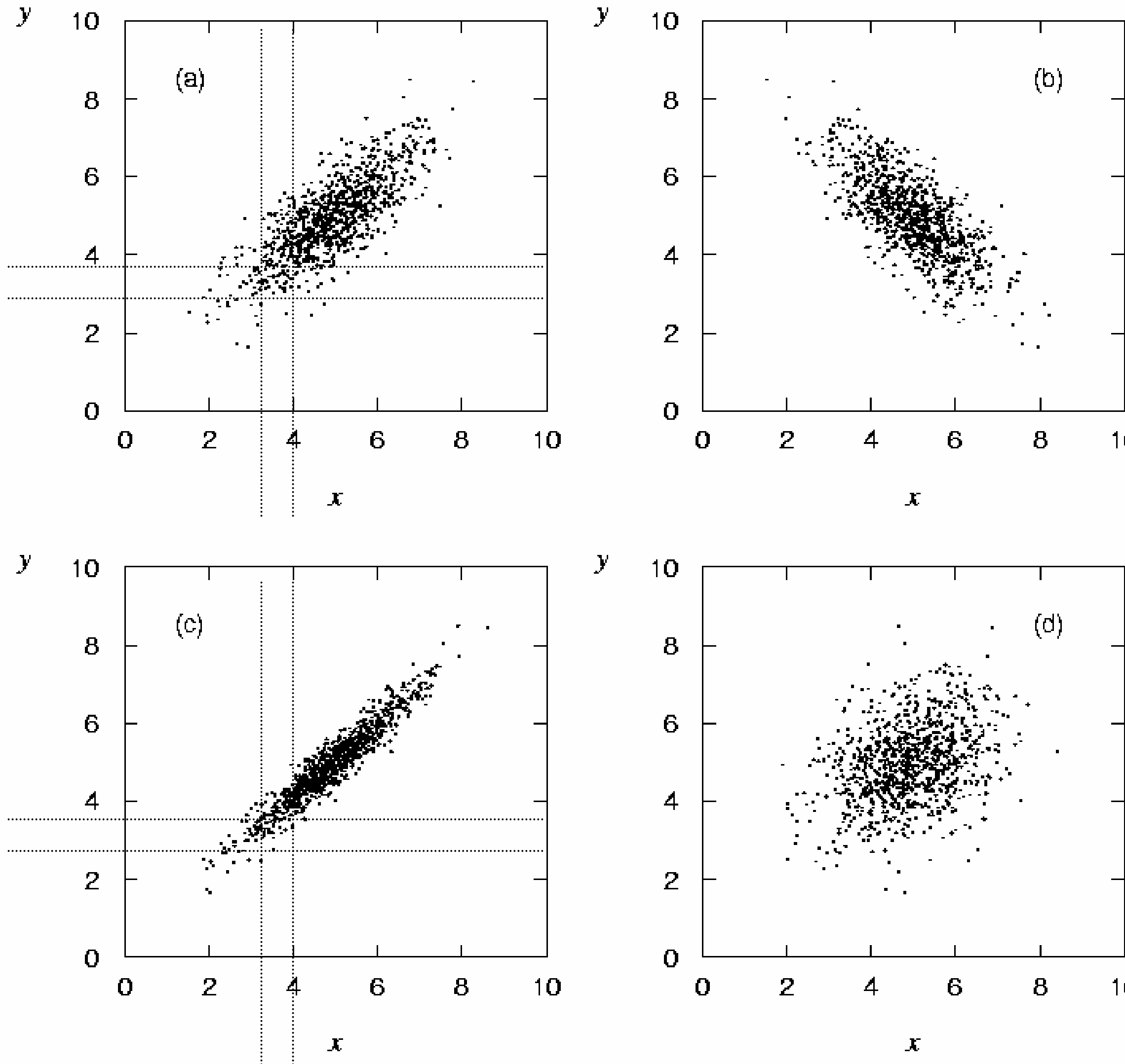
- Attenzione nel caso di funzioni che variano molto velocemente





Correlazioni/Covarianza

- Istogrammi bi-dimensionali (o scatter plots) sono utili per mostrare correlazioni e covarianze



Fit di parametri

- Molto spesso si estraggono uno o piu' parametri da un fit alle distribuzioni delle variabili
- Metodi usati piu' comunemente:
  - Maximum (Log-)Likelihood (verosimiglianza)
  - Minimi quadrati
- Per una discussione dettagliate leggete il libro di Glen Cowan

Il metodo del Likelihood

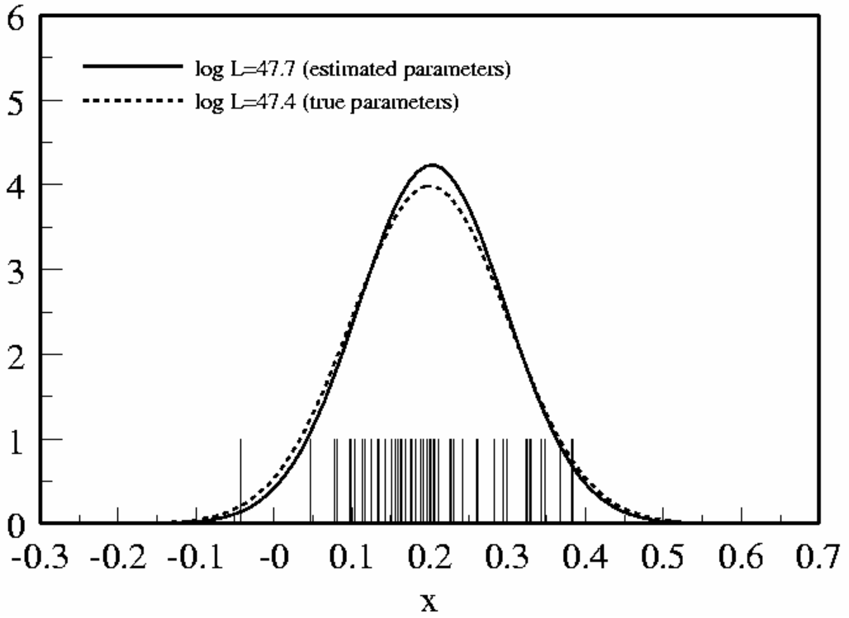
- Considerate una variabile x che e' distribuita secondo una pdf $f(x;\theta)$, dove t e' un parametro sconosciuto.
- Supponiamo di fare N misure di x $\{x_1 \ldots x_N\}$
- La probabilita' che la misura i-esima sia nell'intrervallo $[x_i, x_i + dx_i]$ e' $f(x_i;\theta)\, dx_i$
- La probabilita` che tutte le misure osservate stiano nei loro intervalli e' quindi $\Pi_i\, f(x_i;\theta)\, dx_i$
- Se la pdf ipotizzata e' corretta ed il valore del parametro q pure, allora ci si aspetta un'alta probabilita` per I dati effettivamente osservati.
- Poiche` dx_i non dipendono dal parametro lo stesso ragionamento si applica alla funzione di likelihood

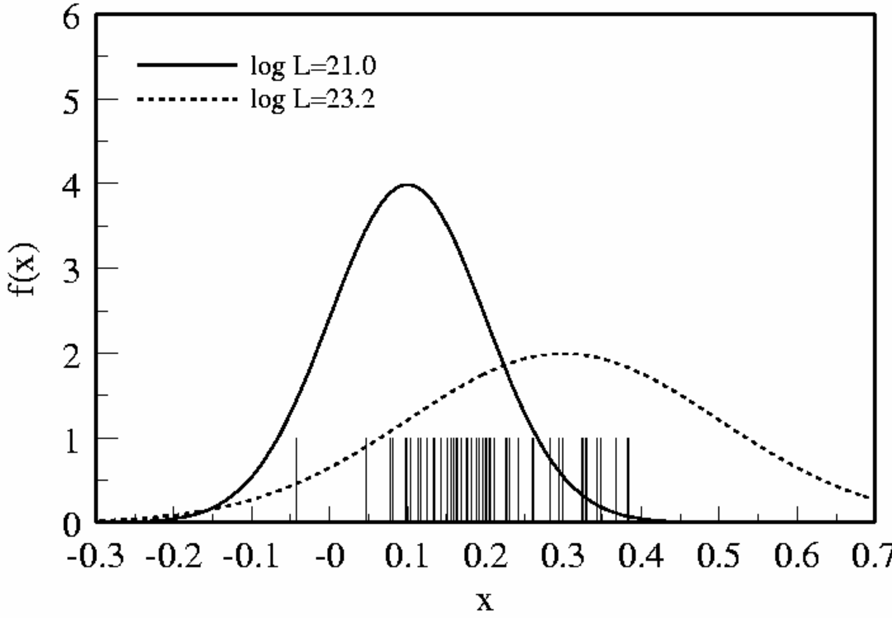
$$L(\vartheta) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i;\vartheta)$$

- La stima dei parametri avviene massimizzando la funzione di Likelihood

$$\frac{\partial L(\vartheta))}{\partial \vartheta} = 0$$

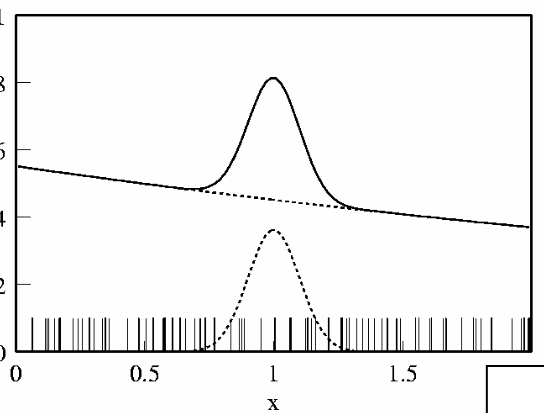
Il metodo di maximum (Log-) Likelihood





Casi particolari da considerare:

- A) cosa succede se I dati sono distribuiti secondo piu' di una pdf?
- Esempi:
  - Nella ricerca di una nuova particella, dopo I tagli di selezione I dati contengono il segnale ed il fondo
  - Determinazione della massa di una risonanza in presenza di fondo combinatoriale



Numero di contributi diversi

$$f(x;\,\theta) = \sum_{i=1}^{m} \theta_i f_i(x)$$

Puo` dipendere da ulteriori parametri

Frazioni relative :

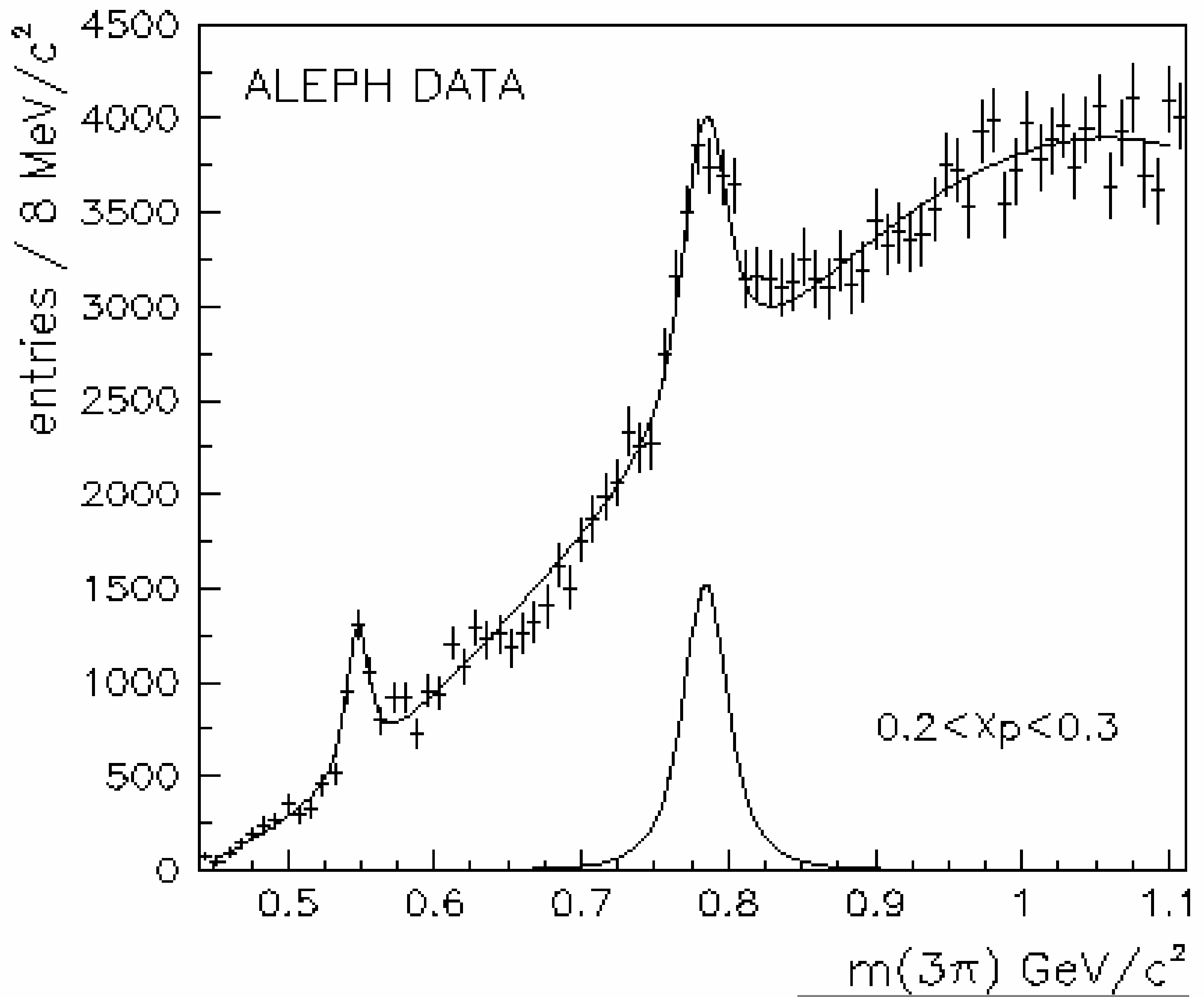
Conosciute a priori (da calcoli analitici o da Monte Carlo), o da fittare!

Casi particolari da considerare:

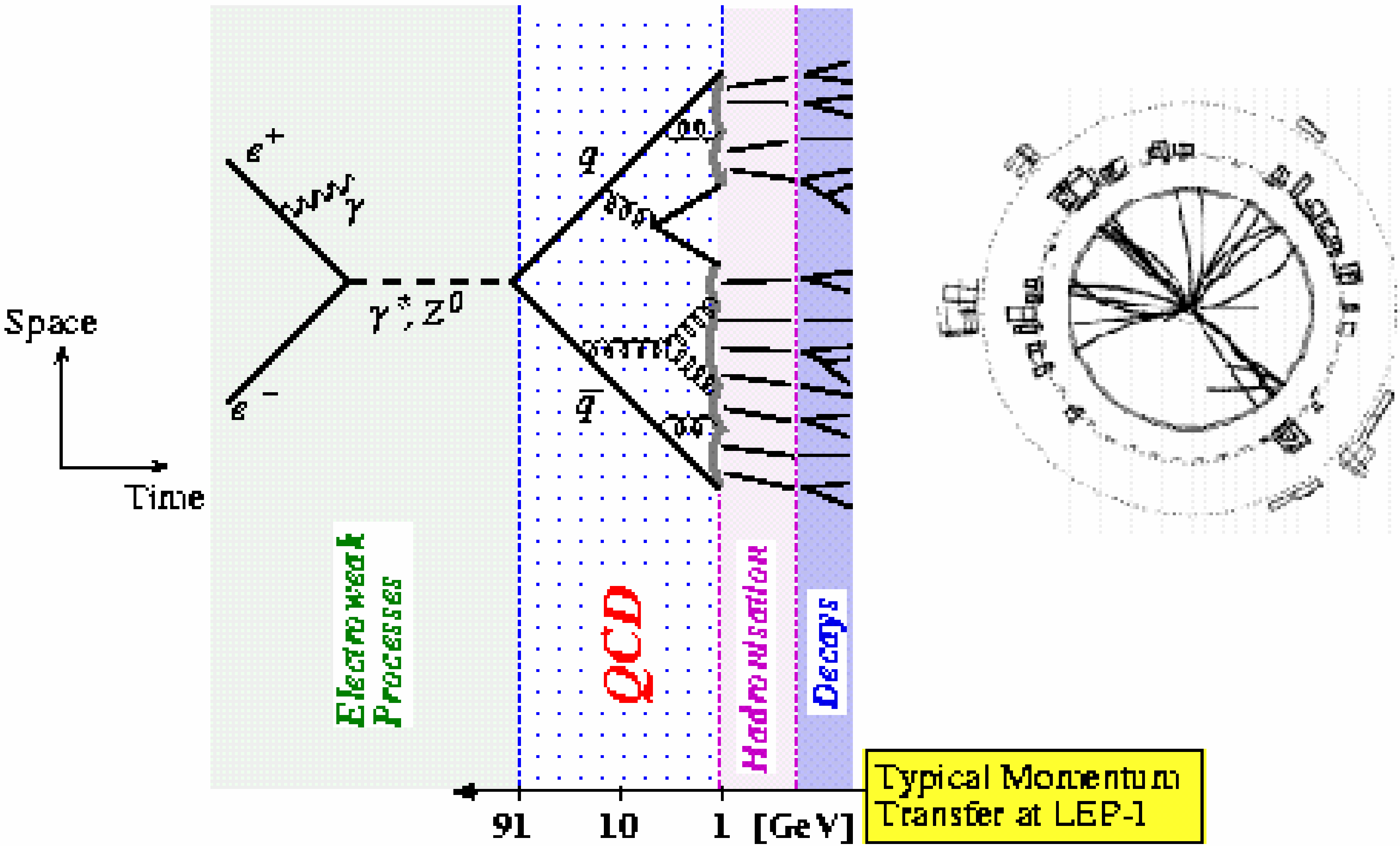
sempio:

risonanze con fondo combinatoriale

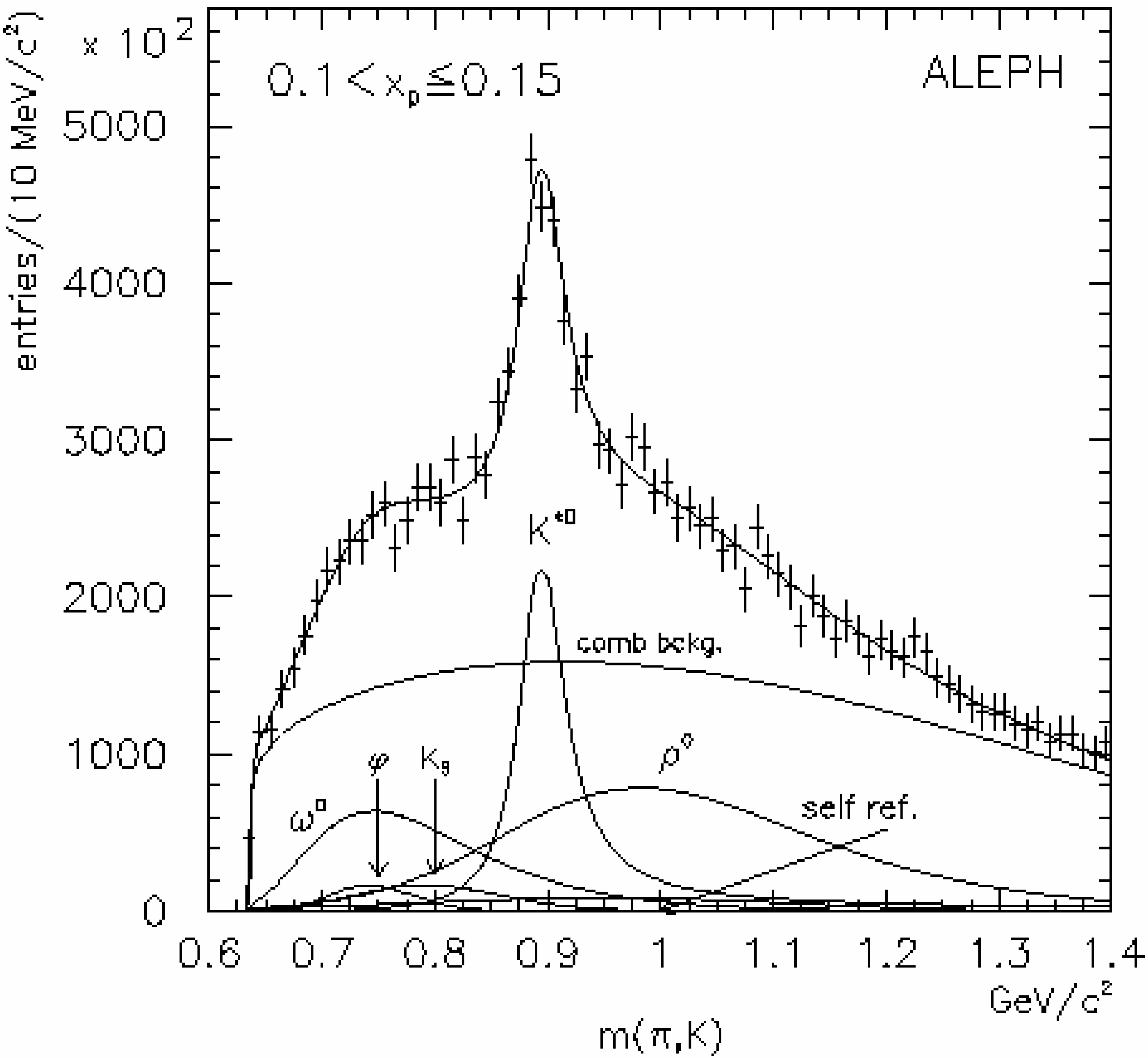
in eventi adronici a LEP (E_{CM}=91 GeV) ci sono in media 20 particelle cariche e 20 neutre. A volte si produce una risonanza $\omega(782)$, che decade in $\pi^+\pi^-\pi^0$.



invariant mass



e+
γ
e−
γ*, Z0
q
q̄
Space
Time
Electroweak Processes
QCD
Hadronisation
Decays
91
10
1
[GeV]
Typical Momentum Transfer at LEP-1


x 10^2
entries/(10 MeV/c^2)
0.1 < x_p ≤ 0.15
ALEPH
5000
4000
3000
2000
1000
0
K*0
comb bckg.
ρ0
self ref.
ω0
φ
K_S
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3
1.4
GeV/c^2
m(π,K)

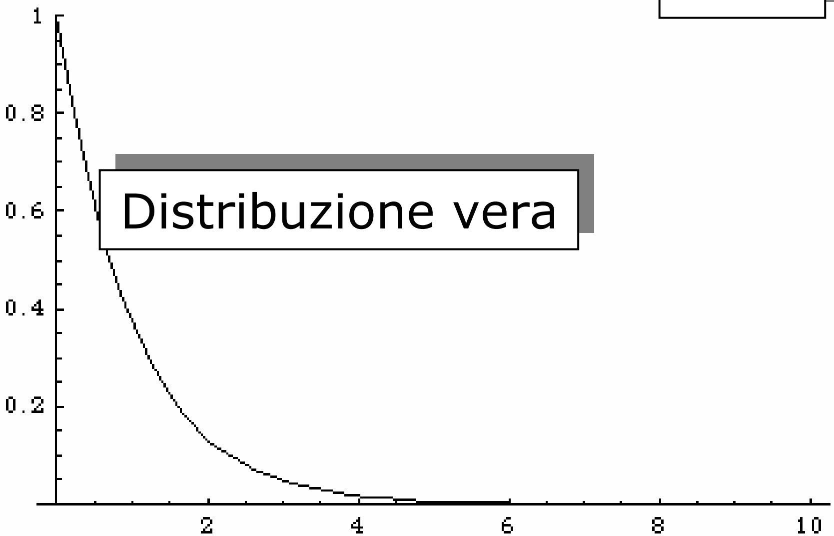
Casi particolari da considerare:

- B) come tenere in considerazione effetti strumentali, come la risoluzione finita delle misure

- Esempio:
  - Misura della lunghezza di decadimento media di una particella con una risoluzione finita (precisione) sulla distanza di decadimento misurata
  - “vera” pdf : esponenziale con una vita media τ
  - Risoluzione del detector: il tempo di decadimento e’ distribuito secondo una Gaussiana, con valor medio τ(vero), ed errore σ
  - La distribuzione sara` la convoluzione di due pdf!

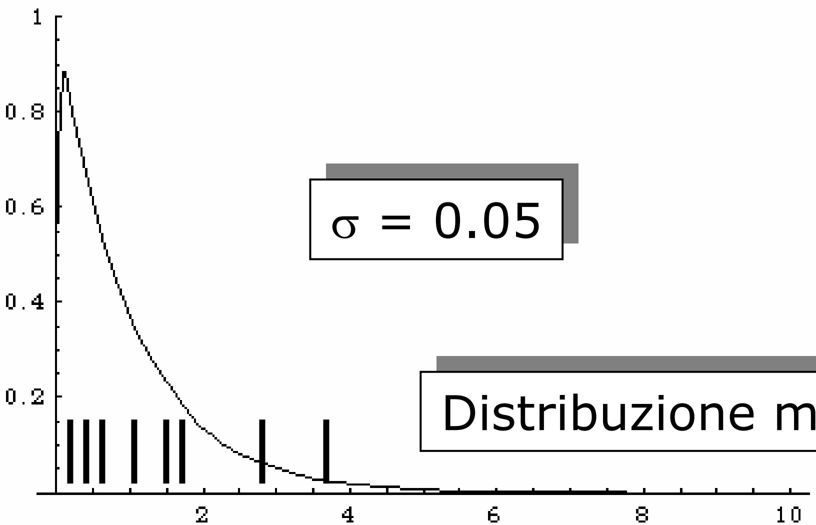
$\tau = 1$

Distribuzione vera

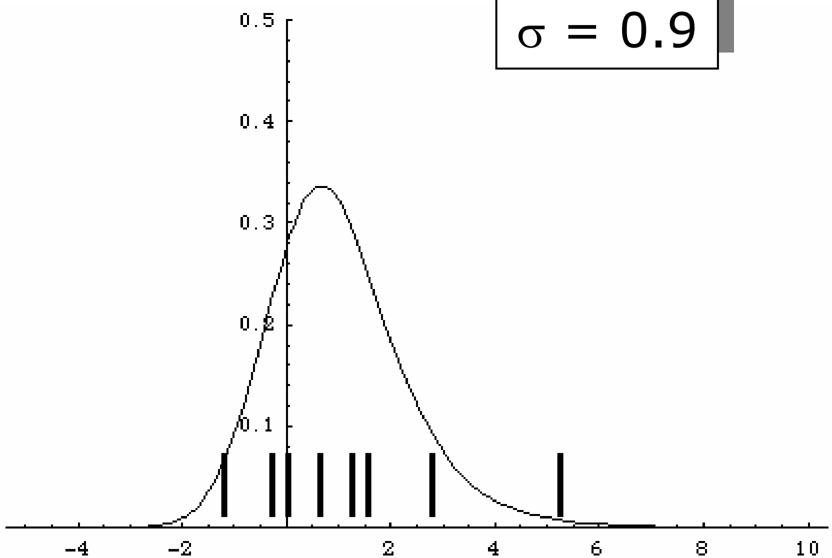


$\sigma = 0.05$

Distribuzione misurata



$\sigma = 0.9$



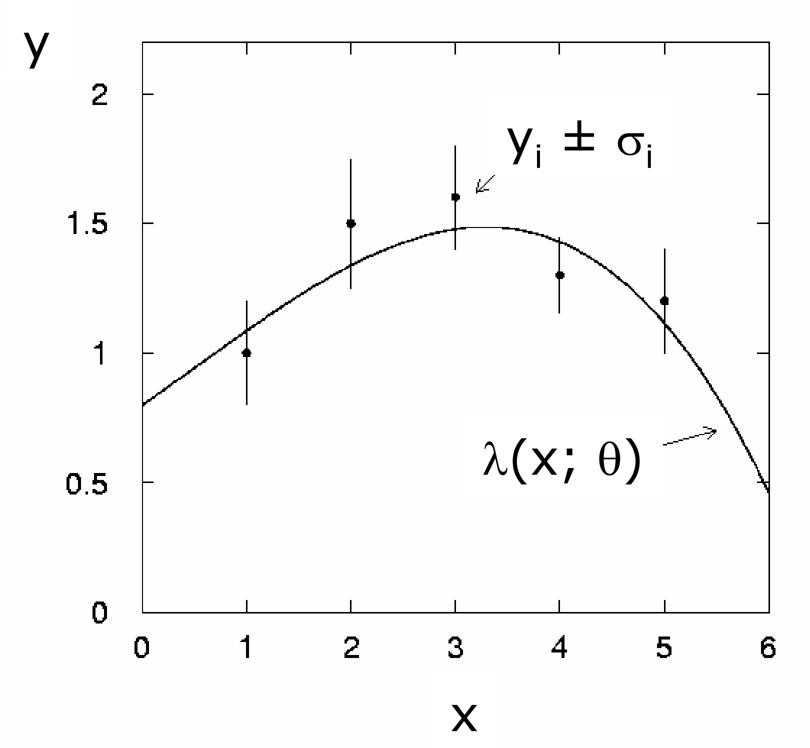
e' possibile avere valori negativi!

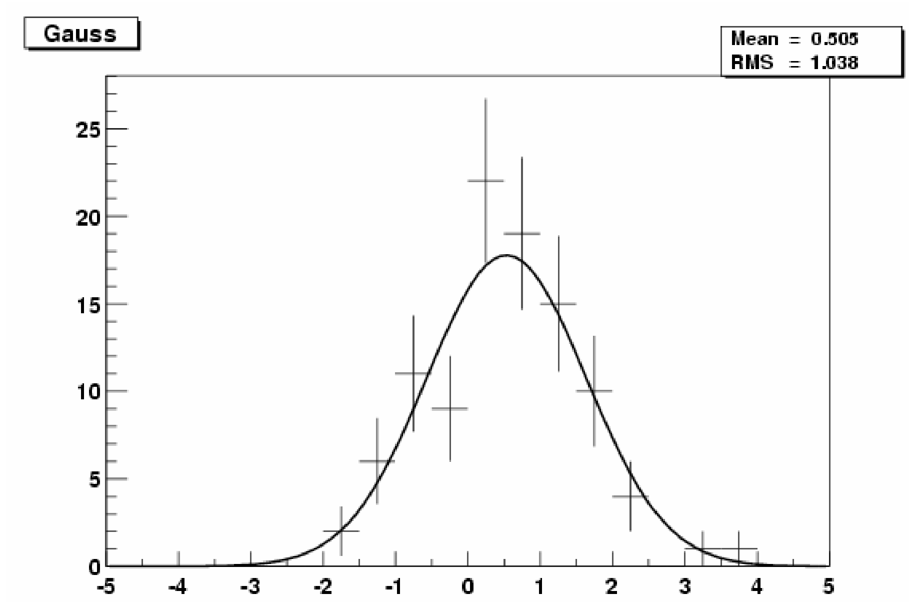
Maximum Likelihood:

- Vantaggi:
  - Non necessita di binnaggio, contiene l'informazione intera
  - Anche possibile con istogrammi
  - Buon metodo per combinare risultati di esperimenti diversi (basta sommare di funzioni di log-likelihood)

- Svantaggi:
  - Puo' essere molto costoso in termini di tempo macchina per grandi campioni
  - Spesso pdf molto complesse o non conosciute
  - Nessuna regola generale per stimare la bonta' del fit "
    - Confronto tra le pdf con la distribuzione dei dati o fare degli esperimenti Monte Carlo per ottenere la distribuzione di L_{max}

Metodo dei minimi quadrati






```
**********************************************
*                                            *
*         W E L C O M E  to  R O O T         *
*                                            *
*   Version   3.03/00    25 January 2002     *
*                                            *
*  You are welcome to visit our Web site     *
*          http://root.cern.ch               *
*                                            *
**********************************************

Compiled for linux with thread support.

CINT/ROOT C/C++ Interpreter version 5.15.26, Jan 7
Type ? for help. Commands must be C++ statements.
Enclose multiple statements between { }.

Processing /tmp/filep_root_macrogBek3t...
 FCN=5.37355 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED     107 CALLS        108 TOTAL
                     EDM=1.11103e-10    STRATEGY= 1  ERROR MATRIX UNCERTAINTY   1.9 per cent
  EXT PARAMETER                                   STEP         FIRST
  NO.   NAME      VALUE            ERROR          SIZE      DERIVATIVE
   1  p0           1.77556e+01   2.43807e+00   6.07872e-04  -4.34587e-06
   2  p1           5.36670e-01   1.23526e-01   3.94112e-05   1.09329e-04
   3  p2           1.55777e+00   1.65520e-01  -4.33346e-05   3.90042e-05
```

see fit example on web page!

χ^2 = FCN

- Definizione, errore sui parametri

Da ricordare:

- Controllare la bonta' del fit!
  - Confrontando I risultati del fit con la distribuzione dei dati
  - Vedendo il χ^2 del fit:
  - Se I dati (in bins) sono distribuiti secondo una Gaussiana con varianze conosciute:
    - La somma dei χ^2 segue la distribuzione del χ^2
    - **Valore di aspettazione = numero di gradi di liberta' = numero di bin – numero di parametri del fit**
    - se $\chi^2 >> N_{dof}$: fit brutto, o stima degli errori troppo piccola?
    - se $\chi^2 << N_{dof}$: stima degli errori troppo grossa?

Minimi quadrati:

- Vantaggi:
  - Facile da usare (e implementare), anche per grandi quantita' di dati
  - Stima della bonta' del fit semplice
  - Metodo generale per stimare due distribuzioni (es. dati vs. teoria)

- Svantaggi:
  - Qualche informazione persa per il binning
  - Occorre molta attenzione per bin con poche entries!!
  - Attenzione alle correlazioni grosse bin-to-bin: occorre conoscerle ed invertire la matrice di covarianza