Elementi di teoria dello scattering e risonanze

Claudio Bonati

2 dicembre 2013

1 L'equazione di Schrödinger per potenziale centrale

In coordinate polari la hamiltoniana di una particella di massa m soggetta ad un potenziale centrale $V(r)$ si scrive

$$H = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2 + V(r) = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{L}^2}{r^2}\right) + V(r) \tag{1.1}$$

dove $\boldsymbol{L}$ è l'operatore momento angolare. Se si considera una fattorizzazione della funzione d'onda della forma

$$\psi(\boldsymbol{r}) = R_{k\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{1.2}$$

con

$$\boldsymbol{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m} \qquad L_z Y_{\ell m} = mY_{\ell m} \qquad \int |Y_{\ell m}|^2 \mathrm{d}\Omega = 1 \tag{1.3}$$

allora l'equazione $H\psi = E\psi$ si riduce, per la componente radiale, a

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{k\ell} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{k\ell} + \left(k^2 - \frac{2m}{\hbar^2}V(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_{k\ell} = 0 \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{1.4}$$

Consideriamo ora il problema con $V(r) \equiv 0$ nel caso $\ell = 0$: l'equazione Eq. (1.4) diventa

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{k0} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{k0} + k^2 R_{k0} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rR_{k0}) + k^2 R_{k0} \tag{1.5}$$

quindi (la normalizzazione che sarà discussa in seguito)

$$R^{\pm}_{k0}(r) = \frac{A}{r}e^{\pm ikr} \tag{1.6}$$

Le soluzioni corrispondenti ai segni $\pm$ sono generalmente indicate con $Akh_0^{\pm}(kr)$ e sono le cosiddette funzioni di Hankel. Nel caso $V \equiv 0$ si deve considerare la soluzione dell'equazione Eq. (1.4) regolare nell'origine, che è data dalla combinazione

$$R_{k0}(r) = A\frac{\sin kr}{r} \tag{1.7}$$

delle soluzioni Eq. (1.6).

Passiamo ora ad analizzare il caso $V(r) \equiv 0$ ma ℓ generico:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}R_{k\ell} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R_{k\ell} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R_{k\ell} = 0 \tag{1.8}$$

Con il cambio di variabile

$$R_{k\ell} = r^{\ell}X_{k\ell} \tag{1.9}$$

si arriva subito all'equazione

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}X_{k\ell} + \frac{2(\ell+1)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}X_{k\ell} + k^2 X_{k\ell} = 0 \tag{1.10}$$

Se si deriva ora questa equazione rispetto ad r si ottiene (indicando la derivata con un apice)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}X'_{k\ell} + \frac{2(\ell+1)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}X'_{k\ell} - \frac{2(\ell+1)}{r^2}X'_{k\ell} + k^2 X'_{k\ell} = 0 \tag{1.11}$$

che non è difficile verificare essere equivalente a

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{1}{r}X'_{k\ell}\right) + \frac{2(\ell+2)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}X'_{k\ell}\right) + k^2\left(\frac{1}{r}X'_{k\ell}\right) = 0 \tag{1.12}$$

che ha la stessa forma dell'equazione Eq. (1.10) con $\ell \to \ell+1$, quindi

$$X_{k\,\ell+1} = \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)X_{k\ell} \qquad \Rightarrow \qquad X_{k\ell} = \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell} X_{k0} \tag{1.13}$$

e quindi

$$R^{\pm}_{k\ell}(r) = A(-1)^{\ell}\frac{r^{\ell}}{k^{\ell}}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{r}e^{\pm ikr}\right) \qquad \Big(= Akh^{\pm}_{\ell}(kr)\Big) \tag{1.14}$$

dove il termine k^{ℓ} a denominatore è presente per fare in modo che la normalizzazione sia indipendente da k ed il $(-1)^{\ell}$ è convenzionale. La soluzione regolare nell'origine è data da

$$R_{k\ell}(r) = A(-1)^{\ell}\frac{r^{\ell}}{k^{\ell}}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\left(\frac{1}{r}\sin kr\right) \qquad \Big(= Akj_{\ell}(kr)\Big) \tag{1.15}$$

dove j_{ℓ} è la funzione di Bessel sferica.

Consideriamo ora l'andamento a grande r di $R_{k\ell}$: il contributo che decresce più lentamente è quello in cui la derivata è applicata ℓ volte al seno (o all'esponenziale), inoltre

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sin(r+a) = \sin\left(r+a-\frac{\pi}{2}\right) \qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\exp(\pm ir+a) = \exp\left(\pm i\left[r-\frac{\pi}{2}\right]+a\right) \tag{1.16}$$

quindi si ottiene

$$R_{k\ell}(r) \to \frac{A}{r}\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}\right) \qquad R^{\pm}_{k\ell}(r) \to \frac{A}{r}\exp\left(\pm i\left[kr-\frac{\ell\pi}{2}\right]\right) \tag{1.17}$$

cioè asintoticamente $R_{k\ell}$ ed R_{k0} differiscono solo per una fase, come era facilmente intuibile dal fatto che per $r \to \infty$ il contributo del termine $\ell(\ell+1)/r^2$ diventa piccolo nell'equazione Eq. (1.8).

Per analizzare l'andamento a piccoli r si può sviluppare il seno in serie, ottenendo per il temine dominante l'espressione

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\frac{\sin kr}{r} \approx (-1)^{\ell}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\frac{k^{2\ell+1}r^{2\ell}}{(2\ell+1)!} = (-1)^{\ell}\frac{k^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!!} \tag{1.18}$$

dove

$$n!! = n(n-2)(n-4)\cdots \tag{1.19}$$

quindi l'andamento vicino all'origine delle coordinate di $R_{k\ell}$ è dato da

$$R_{k\ell} \approx A\frac{k^{\ell+1}}{(2\ell+1)!!}r^{\ell} \tag{1.20}$$

Usando (per r piccoli)

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\frac{e^{\pm ikr}}{r}\approx\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^{\ell}\frac{1}{r}=(-1)^{\ell}\frac{(2\ell-1)!!}{r^{2\ell+1}} \tag{1.21}$$

si ottiene invece

$$R^{\pm}_{k\ell}(r)\approx A\frac{(2\ell-1)!!}{k^{\ell}r^{\ell+1}} \tag{1.22}$$

Nel caso in cui il potenziale V non sia nullo ma decresca abbastanza rapidamente per $r\to\infty$, asintoticamente per r grande la funzione d'onda risulta essere una combinazione lineare dei due andamenti asintotici di $R^{\pm}_{k\ell}$, che può essere scritta nella forma

$$R^{V}_{k\ell}(r)\to\frac{B}{r}\sin\left(kr-\frac{\ell\pi}{2}+\delta_{k\ell}\right) \tag{1.23}$$

dove B è una costante di normalizzazione e $\delta_{k\ell}$ è lo sfasamento indotto dall'interazione.

2 La normalizzazione delle soluzioni

Si è visto nella sezione precedente che le soluzioni con $E>0$ e dato momento angolare dell'equazione di Schrödeinger in campo centrale sono della forma

$$\psi_{k\ell m}(\boldsymbol{x})=R_{k\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi) \tag{2.1}$$

con la parte radiale della forma

$$R_{k\ell}(r)=F_{k\ell}(r)+\frac{A}{r}\sin\big(kr-\ell\pi/2+\delta_{k\ell}\big)\qquad F_{k\ell}(r)=o(r^{-1}) \tag{2.2}$$

in cui si può convenzionalmente scegliere $A>0$.

Vediamo ora quale è la condizione di normalizzazione da imporre alle funzioni d'onda radiali per fare in modo che

$$\int\psi^{*}_{k'\ell'm'}(\boldsymbol{x})\psi_{k\ell m}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=2\pi\delta(k-k')\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \tag{2.3}$$

Le delta $\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$ seguono dalla ortonormalità delle armoniche sferiche $Y_{\ell m}$, quindi si ottiene la condizione

$$\int_0^{\infty}R^{*}_{k'\ell}(r)R_{k\ell}r^2\mathrm{d}r=2\pi\delta(k-k') \tag{2.4}$$

Il fatto che il prodotto scalare di due soluzioni con k diversi sia nullo segue dalla hermiticità della Hamiltoniana, quindi l'unica cosa che è necessario verificare è che la divergenza quando $k\approx k'$ sia della forma $2\pi\delta(k-k')$. Per verificare ciò si possono trascurare tutti i contributi non divergenti all'integrale, che dipendono con continuità da k e k', in quanto il loro contributo è nullo per continuità anche quando $k\to k'$. Scrivendo il seno dell'espressione Eq. (2.2) tramite esponenziali complessi ed usando il fatto che $k+k'\neq 0$ (quindi $\delta(k+k')=0$), l'unico contributo all'integrale che genera divergenze è

$$\frac{A^2}{4}\int_0^{\infty}\left(e^{i(k-k')r}+e^{i(k'-k)r}\right)\mathrm{d}r=\frac{A^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-k')r}\mathrm{d}r=\frac{A^2}{4}2\pi\delta(k-k') \tag{2.5}$$

quindi affinchè la condizione di normalizzazione Eq. (2.3) sia soddisfatta basta imporre che $A=2$ nello sviluppo a grande distanza Eq. (2.2).

3 Espansione di un onda piana in onde sferiche

Dedurremo in questa sezione lo sviluppo della funzione e^{ikz} nella base delle onde sferiche Eq. (1.2). Notiamo subito che nell'origine delle coordinate e^{ikz} non ha singolarità, quindi nello sviluppo bisogna considerare le funzioni $R_{k\ell}$ regolari nell'origine. Inoltre la funzione e^{ikz} è invariante per rotazioni intorno all'asse z, quindi $L_z e^{ikz} = 0$, quindi nello sviluppo possono comparire solo i termini con $m = 0$.

Ricordando che $Y_{\ell 0}(\theta, \phi) \propto P_\ell(\cos\theta)$, dove P_ℓ sono i polinomi di Legendre, si ha allora

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_\ell a_\ell P_\ell(\cos\theta) \left(\frac{r}{k}\right)^\ell \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^\ell \frac{\sin kr}{r} \tag{3.1}$$

Per ottenere i coefficienti a_ℓ è necessario eguagliare il coefficiente di $(r\cos\theta)^n$ nello sviluppo dei due membri. Ricordiamo che i polinomi di Legendre sono definiti dall'espressione

$$P_\ell(z) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}z^\ell}(z^2-1)^\ell \tag{3.2}$$

quindi il temine $(\cos\theta)^n$ è presente in $P_\ell(\cos\theta)$ solo se $\ell \geq n$; d'altra parte, poichè lo sviluppo per piccoli r di $R_{k\ell}$ comincia con r^ℓ, se $\ell > n$ non è presente il termine r^n. Il termine $(r\cos\theta)^n$ è quindi presente solo nel termine con $\ell = n$ della serie. Ugluagliamo ora i coefficenti del termine $(r\cos\theta)^n$: per fare ciò usiamo lo sviluppo Eq. (1.18) ed il fatto che

$$\frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}z^\ell} z^{2\ell} = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell! \ell!} z^\ell \tag{3.3}$$

ottenendo quindi

$$\frac{i^n k^n}{n!}(r\cos\theta)^n = a_n \frac{(2n)!}{2^n n! n!}(\cos\theta)^n \left(\frac{r}{k}\right)^n (-1)^n \frac{k^{2n+1}}{(2n+1)!!} \tag{3.4}$$

cioè

$$a_n = \frac{(-i)^n}{k}\frac{2^n n!(2n+1)!!}{(2n)!} \tag{3.5}$$

D'altra parte si ha

$$(2n+1)!! = \frac{(2n+1)!!(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \tag{3.6}$$

quindi

$$a_n = \frac{(-i)^n(2n+1)}{k} \tag{3.7}$$

ovvero

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_\ell (-i)^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \left(\frac{r}{k}\right)^\ell \left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^\ell \frac{\sin kr}{kr} \tag{3.8}$$

Utilizzando lo sviluppo a grandi distanze Eq. (1.17) si ottiene quindi lo sviluppo a grande distanza dell'onda piana nella forma

$$e^{ikr\cos\theta} \approx \frac{1}{kr}\sum_\ell (i)^\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) \tag{3.9}$$

Sarà utile per il seguito notare che scrivendo il seno nella forma

$$\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right) = \frac{e^{ikr}(-i)^\ell - e^{-ikr} i^\ell}{2i} = (-i)^\ell \frac{e^{ikr} + e^{-ikr}(-1)^{\ell+1}}{2i} \tag{3.10}$$

l'equazione Eq. (3.9) assume la forma

$$e^{ikr\cos\theta} \approx \frac{1}{2ikr}\sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \left(e^{ikr} + e^{-ikr}(-1)^{\ell+1}\right) \tag{3.11}$$

4 Fasi di scattering e scattering elastico

Consideriamo un processo di scattering: una particella che si muove parallelamente all'asse z interagisce con un potenziale centrale nell'origine e si allontana. È intuitivamente chiaro che se il potenziale decresce abbastanza rapidamente a grande distanza allora la funzione d'onda ψ della particella deve soddisfare la condizione

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad r \to \infty \tag{4.1}$$

il termine e^{ikz} rappresenta la particella incidente a grande distanza, di direzione ed impulso dati. L'onda sferica uscente è il risultato dello scattering e la simmetria assiale del problema impone che la ampiezza di scattering $f(\theta)$ non dipenda dall'angolo ϕ. Per una dimostrazione formale di Eq. (4.1) vedi J. J. Sakurai "Modern quantum mechanics" §7.1 o L. D. Landau, E. D. Lifsits "Meccanica Quantistica, teoria non relativistica" §130.

La funzione d'onda $\psi(\boldsymbol{x})$ (invariante per rotazioni intorno all'asse z, quindi $m = 0$) può essere riscritta nella base delle soluzioni con energia e momento angolare assegnati:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \sum_\ell A_\ell P_\ell(\cos\theta) R_{k\ell}(r) \tag{4.2}$$

e per grandi r, usando Eq. (1.23), questa equazione può essere riscritta come

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx \sum_\ell \frac{A_\ell}{r} P_\ell(\cos\theta) \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) \tag{4.3}$$

dove le fasi δ_ℓ dipendo in generale da k e sono le fasi di scattering. Con manipolazioni analoghe a Eq. (3.10) si arriva quindi a

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx \sum_\ell \frac{A_\ell(-i)^\ell}{2ir} P_\ell(\cos\theta) \left(e^{ikr}e^{i\delta_\ell} + (-1)^{\ell+1}e^{-ikr}e^{-i\delta_\ell}\right) \tag{4.4}$$

Affinche questa espressione possa coincidere con Eq. (4.1) i coefficienti A_ℓ devono essere tali che le componenti in onde sferiche entranti (i termini e^{-ikr}) devono essere identici in Eq. (4.4) e nello sviluppo Eq. (3.11) dell'onda piana, quindi lo sviluppo cercato è

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx \frac{1}{2ikr}\sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) \Big(S_\ell e^{ikr} + (-1)^{\ell+1}e^{-ikr}\Big) \qquad S_\ell = e^{2i\delta_\ell} \tag{4.5}$$

e quindi

$$\psi(\boldsymbol{r}) - e^{ikz} \approx \frac{1}{2ikr}\sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)(S_\ell - 1)e^{ikr} \tag{4.6}$$

ed infine

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_\ell (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta)(S_\ell - 1) \tag{4.7}$$

Il fatto che i numeri S_ℓ debbano essere solo fasi segue anche dalla conservazione delle probabilità: l'espressione Eq. (4.5) è una espansione della funzione d'onda in onde sferiche e, se la probabilità è conservata, il flusso di particelle incidenti deve essere uguale al flusso di particelle uscenti. Inoltre per la conservazione del momento angolare questo deve essere vero separatamente per ogni ℓ, quindi $|S_\ell| = 1$. È infine conveniente riscrivere Eq. (4.7) nella forma

$$f(\theta) = \sum_\ell (2\ell+1) f_\ell P_\ell(\cos\theta) \tag{4.8}$$

dove f_ℓ sono le ampiezze parziali, dati da

$$f_\ell \equiv \frac{S_\ell - 1}{2ik} = \frac{e^{2i\delta_\ell} - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_\ell}\sin\delta_\ell}{k} = \frac{1}{k\cot\delta_\ell - ik} \tag{4.9}$$

La sezione d'urto differenziale è data da

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}o}(\theta) = |f(\theta)|^2 \tag{4.10}$$

e ricordando l'identità

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1} \tag{4.11}$$

la sezione d'urto totale può essere scritta come

$$\sigma = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi\sum_\ell(2\ell+1)|f_\ell|^2 = \frac{4\pi}{k^2}\sum_\ell(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell \tag{4.12}$$

Vengono talvolta introdotte anche le sezioni d'urto parziali $\sigma_\ell = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell$, che soddisfano chiaramente $\sigma_\ell \le (4\pi/k^2)(2\ell+1)$. Dall'equazione Eq. (4.8) si ha d'altra parte

$$\Im f(\theta) = \sum_\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\Im f_\ell = \frac{1}{k}\sum_\ell(2\ell+1)P_\ell(\cos\theta)\sin^2\delta_\ell \tag{4.13}$$

e ricordando che $P_\ell(1) = 1$ si ottiene il teorema ottico

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\Im f(0) \tag{4.14}$$

che lega la sezione d'urto totale alla parte immaginaria della ampiezza di scattering in avanti.

Vediamo ora una semplice conseguenza del teorema ottico: indichiamo con $\Delta\Omega$ l'angolo solido intorno alla direzione positiva sul quale vale la relazione $|f(\theta)|^2 \ge \frac{1}{2}|f(0)|^2$, si ha allora

$$\sigma = \int |f|^2\mathrm{d}\Omega \ge \frac{1}{2}|f(0)|^2\Delta\Omega \ge \frac{1}{2}|\Im f(0)|^2\Delta\Omega = \frac{k^2\sigma^2}{32\pi}\Delta\Omega \tag{4.15}$$

quindi

$$\Delta\Omega \le \frac{32\pi^2}{k^2\sigma} \tag{4.16}$$

Poichè è un risultato generale che la sezione d'urto è quasi costante ad alta energia (vale la maggiorazione $\sigma \lesssim (\log E)^2$, limite di Froissart) si ha quindi che l'angolo solido sul quale la ampiezza di diffusione è circa uguale alla ampiezza in avanti si restringe $\sim 1/k^2$ all'aumentare dell'impulso (picco di diffrazione).

5 Scattering anelastico

Nel caso di scattering anelastico si può procedere come nella sezione precedente fino ad arrivare all'equazione Eq. (4.5), solo che in questo caso $|S_\ell| \le 1$: la funzione ψ rappresenta la componente elastica dello scattering e quindi la corrispondente $f(\theta)$ è la ampiezza per lo scattering elastico. Nel caso inelastico si ha

$$S_\ell = \eta_\ell e^{2i\delta} \qquad 0 \le \eta_\ell \le 1 \tag{5.1}$$

La sezione d'urto elastica è quindi data dall'espressione

$$\sigma_{el} = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi\sum_\ell(2\ell+1)|f_\ell|^2 = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell(2\ell+1)|S_\ell - 1|^2 \tag{5.2}$$

La sezione d'urto anelastica è data dalla attenuazione del flusso: la corrente uscente è data da

$$\boldsymbol{j} = \hat{r}\frac{k}{m}|\psi_{scat}|^2 \tag{5.3}$$

con $\psi_{scat} = f(\theta)e^{ikr}/r$ ed il flusso totale uscente è quindi

$$\Phi = \int r^2 j_r \mathrm{d}\Omega = \frac{\pi}{mk}\sum_\ell (2\ell+1)|S_\ell|^2 \tag{5.4}$$

di conseguenza la attenuazione del flussio uscente per unità di flusso entrante (flusso entrante che è k/m) è data da

$$\sigma_{abs} = \frac{m}{k}\Big(\Phi_{\eta_\ell=0} - \Phi\Big) = \frac{\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)(1-|S_\ell|^2) \tag{5.5}$$

La sezione d'urto totale è la somma delle sezioni d'urto elastica ed anelastica ed è data da

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{abs} = \frac{2\pi}{k^2}\sum_\ell (2\ell+1)(1-\Re S_\ell) \tag{5.6}$$

e non è difficile mostrare che anche nel caso in cui sia presente assorbimento il teorema ottico vale nella forma

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\Im f(0) \tag{5.7}$$

che lega la sezione d'urto totale alla parte immaginaria della ampiezza di scattering elastico in avanti.

Nel caso dello scattering elastico la sezione d'urto massima per l'onda parziale ℓ è data da

$$\sigma_{el,\ell}^{(max)} = \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1) \tag{5.8}$$

ed è raggiunta solo se $\eta_\ell = 1$ (ovvero non c'è assorbimento) e $\delta_\ell = \pi/2$. La sezione d'urto anelastica massima è

$$\sigma_{abs,\ell}^{(max)} = \frac{\pi}{k^2}(2\ell+1) \tag{5.9}$$

ed è raggiunta nel caso di assorbimento completo $\eta_\ell = 0$. Si può notare che quando c'è assorbimento completo è comunque presente anche una componente elastica e che

$$\sigma_{el}(\eta = 0) = \sigma_{abs}(\eta = 0) \tag{5.10}$$

Questo è analogo a quanto accade anche in ottica ed è legato alla diffrazione del fascio incidente sul bordo del bersaglio.

6 Risonanze

Consideriamo l'evoluzione temporale dello scattering di un pacchetto d'onde ψ con vettore d'onda centrato attorno a $\boldsymbol{k}_0$: a grande distanza la funzione d'onda scatterata avrà la forma

$$\psi_{out}(\boldsymbol{x},t) = \int \tilde{\psi}(\boldsymbol{k})\frac{e^{i(kr-Et/\hbar)}}{r}f(\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{6.1}$$

e nel limite $t \to \infty$ l'integrale oscilla rapidamente e media a zero l'integrale tranne nei punti in cui la fase è stazionaria. Se si trascura la dipendenza da k dell'ampiezza si ottiene l'equazione

$$0 = \frac{\partial}{\partial k_i}(kr - Et/\hbar) = \frac{\partial k}{\partial k_i}\left(r - \frac{\partial E}{\partial k}\frac{t}{\hbar}\right) \tag{6.2}$$

e quindi, considerando che il pacchetto è centrato attorno a $\boldsymbol{k}_0$ e $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ si ottiene

$$r = \frac{\hbar k_0}{m} t \equiv v_0 t \tag{6.3}$$

Se si considera la dipendenza $e^{2i\delta}$ della ampiezza l'equazione precedente si modifica in

$$r = v_0 t - 2 \left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_0} \tag{6.4}$$

quindi se la fase di scattering cresce con k c'è un ritardo nell'emissione dell'onda, in caso contrario un anticipo, ed il ritardo/anticipo è dato da

$$\Delta t = \frac{2}{v_0} \left. \frac{\partial \delta}{\partial k} \right|_{k=k_0} \tag{6.5}$$

D'altra parte, se il bersaglio ha dimensione tipica D, la causalità impone che

$$\Delta t \gtrsim -\frac{D}{v_0} \tag{6.6}$$

altrimenti vorrebbe dire che il segnale lascia il bersaglio prima di averlo colpito. Da questa relazione si ottiene

$$\frac{\partial \delta}{\partial k} \gtrsim -\frac{D}{2} \tag{6.7}$$

e se la lunghezza d'onda del proiettile è sufficientemente grande da poter considerare $D \approx 0$ si vede quindi che le fasi di scattering sono funzioni crescenti dell'impulso.

Consideriamo ora il caso in cui una delle fasi di scattering, sia essa δ_ℓ, passi attraverso $\pi/2$. Per quanto appena visto supporremo che $\partial \delta_\ell / \partial k > 0$, quindi si ha

$$\tan \delta_\ell \overset{k \sim k_0}{\approx} \frac{k_1}{k_0 - k} \qquad k_1 > 0 \tag{6.8}$$

Notiamo a questo punto che si può scrivere

$$S_\ell = e^{2i\delta_\ell} = \frac{e^{i\delta_\ell}}{e^{-i\delta_\ell}} = \frac{\cos \delta_\ell + i \sin \delta_\ell}{\cos \delta_\ell - i \sin \delta_\ell} = \frac{1 + i \tan \delta_\ell}{1 - i \tan \delta_\ell} \tag{6.9}$$

ed usando (6.8) si ottiene quindi

$$S_\ell \approx \frac{k - k_0 - ik_1}{k - k_0 + ik_1} \tag{6.10}$$

e quindi S_ℓ ha un polo nel semipiano complesso inferiore, in $k_0 - ik_1$. Questo polo può essere associato ad uno stato metastabile: se si considera l'espressione Eq. (4.5) si vede che al polo di S solo il primo termine è presente, l'onda uscente e^{ikr}. Sostituendo $k = k_0 - ik_1$ si ottiene $\exp(ik_0 r + k_1 r)$ che è una onda sferica non normalizzabile, che è la condizione al bordo che ci si attende per il decadimento di un oggetto avente un tempo di vita finito e quindi un flusso di probabilità all'infinito non nullo[1]. Un altro modo per arrivare alla stessa conclusione è calcolare l'energia al polo:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_0^2 - k_1^2) - i \frac{\hbar^2 k_0 k_1}{m} \equiv E_0 - i \frac{\Gamma}{2} \tag{6.11}$$

Poichè la funzione d'onda evolve con $e^{-iEt/\hbar}$ la probabilità di sopravvivenza è data dall'integrale del modulo quadro che scala come $e^{-\Gamma t/\hbar}$, quindi il tempo di vita dello stato è dell'ordine di $\hbar/\Gamma$. Notando che da Eq. (6.8) segue che

$$\frac{\partial}{\partial k} \tan \delta_\ell = (1 + \tan^2 \delta_\ell) \frac{\partial \delta_\ell}{\partial k} \qquad \Rightarrow \qquad \left. \frac{\partial \delta_\ell}{\partial k} \right|_{k=k_0} = \frac{1}{k_1} \tag{6.12}$$

[1] Se lo zero fosse nel semipiano complesso superiore, $k = k_0 + ik_1$, $k_1 > 0$ si otterrebbe l'onda sferica normalizzabile $\exp(ik_0 r - k_1 r)$: i poli nel semipiano superiore della matrice S corrispondono alle energie degli stati legati.

dalla Eq. (6.5) si ottiene anche

$$\Delta t = \frac{2m}{\hbar k_0 k_1} \approx \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{6.13}$$

compatibilmente con la definizione di Γ data in Eq. (6.11). Usando Eq. (6.10) si ha infine

$$\sin^2 \delta_\ell = \frac{1}{4}|S_\ell - 1|^2 \approx \frac{k_1^2}{(k-k_0)^2 + k_1^2} \tag{6.14}$$

Nel caso in cui si suppone $k_1 \ll k_0$ si ha anche

$$\begin{aligned} \frac{k_1^2}{(k-k_0)^2 + k_1^2} &= \frac{\hbar^4 k_0^2 k_1^2/m^2}{\hbar^4 k_0^2 (k-k_0)^2/m^2 + \hbar^4 k_0^2 k_1^2/m^2} = \frac{\Gamma^2/4}{\hbar^4 k_0^2 (k-k_0)^2/m^2 + \Gamma^2/4} \approx \\ &\approx \frac{\Gamma^2/4}{\hbar^4 \frac{(k+k_0)^2}{4}(k-k_0)^2/m^2 + \Gamma^2/4} = \frac{\Gamma^2/4}{\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 (k^2 - k_0^2)^2 + \Gamma^2/4} \approx \frac{\Gamma^2/4}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Ad esempio per lo scattering elastico con $k \approx k_0$ si ha

$$\sigma_{el,\ell} \approx \frac{4\pi}{k^2}(2\ell+1)\frac{\Gamma^2/4}{(E-E_0)^2 + \Gamma^2/4} \tag{6.16}$$

che è l'espressione di Breit-Wigner per la sezione d'urto alla risonanza. In particolare si vede che dal valore di picco della sezione d'urto è possibile risalire allo spin della risonanza (ℓ). Affinchè la formula precedente risulti utile si deve avere $\Gamma \ll E_0$ (ovvero $k_1 \ll k_0$) in modo che il picco sia ben determinabile.