

Esercitazioni di Fisica 3 - secondo semestre

Claudio Bonati

13 maggio 2015

Indice

1	Verifiche sperimentali della dilatazione temporale relativistica	2
1.1	Esperimento di Rossi-Hall [1]	2
1.2	L'impulso efficace \tilde{p}	5
1.3	L'esperimento di Hafele e Keating [2, 3]	5
1.4	Vita media di μ^\pm agli anelli di accumulazione [4]	7
2	Deduzione quantistica della formula di Bethe non relativistica	8
2.1	Il campo di una carica in moto uniforme	12
3	Deduzione macroscopica della formula di Bethe non relativistica e il caso di piccole velocità	13
4	Perdita di energia nel caso relativistico	17
4.1	Radiazione Cherenkov	17
4.2	La formula di Bethe	18
4.3	L'effetto di densità finita sulla perdita di energia per ionizzazione di una carica elettrica	19
5	Perdita di energia di monopoli magnetici	21
6	Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata da una carica in moto. Applicazione al decadimento β.	25
7	Bremsstrahlung	28
8	Teoria di Fermi del decadimento β e massa del neutrino	31
9	Effetto Mössbauer	33
10	L'equazione BMT ed il fattore $g - 2$	37
11	Il cut-off GZK dei raggi cosmici	41
	Bibliografia	42

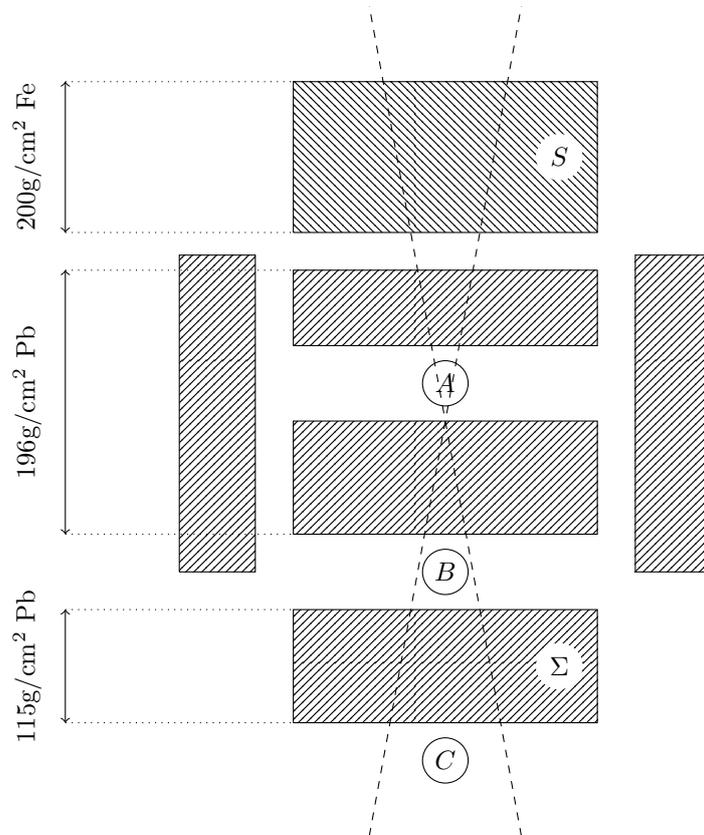


Figura 1: Schema semplificato dell'apparato sperimentale usato nell'esperimento di Rossi-Hall: le lettere A , B , C indicano i rivelatori, inoltre i due schermi Σ e S sono rimuovibili.

1 Verifiche sperimentali della dilatazione temporale relativistica

1.1 Esperimento di Rossi-Hall [1]

L'abbondanza di raggi cosmici nell'atmosfera diminuisce al diminuire della quota (altezza sul livello del mare) di osservazione. Questo è imputabile a due fattori indipendenti

- schermaggio da parte dell'atmosfera: per arrivare più in basso nell'atmosfera si deve attraversare una maggiore quantità di aria e quindi aumenta la probabilità che le particelle siano fermate dal mezzo
- decadimento dei raggi cosmici: per arrivare più in basso nell'atmosfera è necessario un tempo maggiore e quindi aumenta la probabilità di decadimento.

Nell'esperimento di Rossi-Hall si vogliono studiare separatamente le due cause ed in particolare ottenere una stima del tempo di vita medio dei raggi cosmici considerati (che nel range di energie considerato sono fondamentalmente leptoni μ , chiamati nell'articolo originale "mesotrons").

L'apparato sperimentale è schematicamente riprodotto in Fig. (1) ed è composto da tre gruppi di rivelatori (indicati in figura con le lettere A , B e C), separati da diversi schermi di piombo (Pb) e/o ferro (Fe). Gli strati Σ ed S sono rimuovibili e permettono di variare il livello di schermaggio dell'apparato. Le tre componenti fondamentali (S , blocco centrale e Σ) hanno le seguenti caratteristiche di assorbimento:

(S) potere assorbente equivalente a $200\text{g}/\text{cm}^2$ di ferro

(blocco centrale) potere assorbente equivalente a $196\text{g}/\text{cm}^2$ di piombo (lo strato direttamente sopra il rivelatore A serve per schermare la componente soffice dei raggi cosmici)

(Σ) potere assorbente equivalente a $115\text{g}/\text{cm}^2$ di piombo

Sono presenti anche schermi laterali per limitare l'angolo di incidenza dei μ : idealmente si vorrebbe che l'angolo di incidenza fosse tale che, se non fossero presenti gli schermi orizzontali, tutte le particelle passanti attraverso A arrivassero anche a B e C .

Si è interessati a studiare i seguenti eventi:

(coincidenze) rivelazione simultanea del passaggio di una particella nei rivelatori A , B e C (chiarmente "simultanea" per la risoluzione temporale dell'apparato, che nel caso in esame era di circa $\sim 10^{-5}\text{s}$, quindi due eventi con $\Delta t \lesssim 10^{-5}\text{s}$ sono considerati come contemporanei)

(anticoincidenze) rivelazione simultanea del passaggio di una particella nei rivelatori A e B ma non nel rivelatore C

Le coincidenze corrispondono alla rivelazione di una particella che attraversa completamente l'apparato sperimentale, cioè che ha una energia sufficiente ad attraversare tutti gli schermaggi utilizzati (naturalmente non tutte le particelle che attraversano l'apparato saranno rivelate, ma solo una certa percentuale di esse, percentuale che dipende dall'efficienza dei rivelatori utilizzati).

Le anticoincidenze possono corrispondere a diverse situazioni fisiche:

1. una particella ha sufficiente energia per attraversare l'apparato fino al rivelatore B ma non abbastanza da superare anche l'ultimo schermaggio Σ
2. dopo il rivelatore B la particella ha un urto da cui fuoriesce con un angolo di scattering così elevato da uscire dal raggio d'azione del rivelatore C
3. il rivelatore C non rivela la particella

il caso più interessante ai fini dell'esperimento (e ragionevolmente anche quello che si verificherà più di frequente) è il caso (1), mentre gli altri sono da considerarsi come errori sistematici. Per ridurre il background dovuto a queste sorgenti sistematiche di errore, è conveniente utilizzare, invece del solo numero di anticoincidenze, la differenza

$$\Delta = \text{anticoincidenze}(\text{con } \Sigma) - \text{anticoincidenze}(\text{senza } \Sigma) \quad (1.1)$$

in quanto il secondo termine della differenza è dovuto interamente ai sistematici. Nel seguito quando si parlerà di anticoincidenze si intenderà sempre la differenza Δ .

modalità di misura	coincidenze	anticoincidenze
E. Lake con S	N_1	n_1
E. Lake senza S	N'_1	n'_1
Denver senza S	N_2	n_2

Tabella 1: Misure effettuate e notazioni

Le misure sono state effettuate a Denver ed a Echo Lake, essendo questa ultima località più elevata di 1624m rispetto a Denver (differenza di altitudine corrispondente a $147\text{g}/\text{cm}^2$ di aria). I dettagli delle misure sono riportati, insieme alle notazioni, in Tab. (1).

Alle energie considerate in questo esperimento si ha che $147\text{g}/\text{cm}^2$ di aria hanno una capacità di schermaggio analoga a quella di $200\text{g}/\text{cm}^2$ di ferro, quindi se i muoni fossero stabili si dovrebbe avere $N_1 = N_2$ e $n_1 = n_2$, mentre sperimentalmente si ottiene $N_1 > N_2$ e $n_1 > n_2$, fatto spiegabile

tramite il decadimento dei muoni nei 1624m di dislivello che separano le due località in cui è stato realizzato l'esperimento.

Se indichiamo con τ_0 il tempo di vita medio di un muone a riposo, il tempo di vita medio di un muone che si muove con velocità β è, a causa della dilatazione relativistica dei tempi,

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2)$$

quindi le particelle più lente decadranno prima. Questa previsione è supportata dal fatto che sperimentalmente si osserva

$$\frac{n'_1}{N'_1} > \frac{n_2}{N_2} \quad (1.3)$$

cioè la frazione di muoni lenti cresce con la quota. Bisogna tuttavia notare che il valore sperimentale di n/N non è completamente affidabile, in quanto le misure di N e n sono affette da errori sistematici diversi, che non si semplificano generalmente nel rapporto, come invece ci si aspetterebbe accadere per rapporti del tipo di n_2/n_1 .

Per procedere oltre è necessario sapere a che intervallo di impulsi corrispondono i mesoni in anticoincidenza, cioè quelli che riescono ad attraversare 196g/cm^2 di piombo ma non 311g/cm^2 . La perdita di impulso di un muone dovuta alla sua interazione con la materia è ben descritta dalla cosiddetta formula di Bethe-Bloch, che è una equazione differenziale della forma

$$-\frac{dp}{dx} = \text{funzione nota di } \beta \quad (1.4)$$

e dall'integrazione numerica di questa equazione si ottiene che un muone rivelato in anticoincidenza ha un impulso p compreso nell'intervallo

$$310\text{MeV}/c \leq p \leq 450\text{MeV}/c \quad (1.5)$$

Denotiamo ora con w_{12} la probabilità di sopravvivenza di un muone tra due quote z_1 e z_2 ($z_1 > z_2$) cioè la probabilità che un muone presente alla quota z_1 non si disintegri prima di arrivare alla quota z_2 . Il rapporto n_2/n_1 è allora il valore sperimentale di w_{12} per i mesoni tra le due quote dell'esperimento aventi all'arrivo un impulso compreso nell'intervallo (1.5).

Consideriamo dapprima il caso ideale in cui si possa trascurare la perdita di impulso del muone nella sua discesa. Allora la sua lunghezza media di sopravvivenza è data dall'espressione

$$L = \beta\tau = \frac{p\tau_0}{m} \quad (1.6)$$

e w_{12} sarebbe data da

$$\log w_{12} = -\frac{z_1 - z_2}{L} \quad (1.7)$$

Nel caso in cui sia presente perdita di impulso, l'equazione Eq. (1.7) continua ad essere vera, dove però ora si ha

$$L = \frac{\tilde{p}\tau_0}{m} \quad (1.8)$$

e \tilde{p} è un impulso efficace, la cui espressione è ottenibile con alcune ipotesi semplificative (vedi seguito). Per ora notiamo solo che all'intervallo Eq. (1.5) corrisponde

$$440\text{MeV}/c \leq \tilde{p} \leq 580\text{MeV}/c \quad (1.9)$$

Se consideriamo il valore medio $\tilde{p} = 500\text{MeV}/c$, da $w_{12}^{exp} = 0.698 \pm 0.031$ segue $L = (4.5 \pm 0.6) \times 10^5\text{cm}$ e $\tau_0/m = (9.07 \pm 1.3) \times 10^{-4}\text{cm c/eV}$ da cui, usando il valore del 1941 per la massa, $m = 80\text{MeV}/c^2$, si ottiene infine $\tau_0 = (2.4 \pm 0.3) \times 10^{-6}\text{s}$.

I valori attuali per massa e vita media riportati sul Particle Data Group sono

$$m = 105.658367(4)\text{MeV}/c^2 \quad \tau_0 = 2.197034(21) \times 10^{-6}\text{s} \quad (1.10)$$

1.2 L'impulso efficace \tilde{p}

Denotiamo con y la profondità atmosferica, cioè il rapporto pressione/ g (dove g è la accelerazione di gravità e chiaramente y cresce con il decrescere della quota su livello del mare). La probabilità per un muone di arrivare senza decadere alla profondità $y + \Delta y$ è (z è come in precedenza la quota)

$$w(y + \Delta y) = w(y) \left(1 + \frac{\Delta z}{L}\right) = w(y) \left(1 + \frac{m\Delta z}{\tau_0 p}\right) = w(y) \left(1 - \frac{m\Delta y}{\rho\tau_0 p}\right) \quad (1.11)$$

dove ρ è la densità atmosferica alla profondità y e si è usata la relazione $\Delta y = -\rho\Delta z$. Quindi la funzione $w(y)$ soddisfa l'equazione differenziale

$$-\frac{1}{w} \frac{dw}{dy} = \frac{m}{\rho\tau_0 p} \quad (1.12)$$

Se si suppone che la perdita di impulso sia lineare nella profondità

$$p(y) = p_0 + a(y_0 - y) \quad (1.13)$$

allora l'equazione Eq. (1.12) diventa

$$-\frac{1}{w} \frac{dw}{dy} = \frac{b}{y[p_0 + a(y_0 - y)]} \quad b = \frac{my}{\tau_0 \rho} \quad (1.14)$$

Assumiamo ora il seguente modello di atmosfera: atmosfera composta di gas perfetto isoterma. L'equazione di bilancio idrostatico è $\frac{dP}{dz} = -g\rho$ (dove P è la pressione) e l'equazione di stato è $\rho = \frac{MP}{RT}$ dove R è la costante del gas perfetto e M è la massa molare media dell'atmosfera. Si ottiene quindi $\frac{dP}{dz} = -\frac{gM}{RT}P$ e $P = P_0 \exp\left(-\frac{gM}{RT}z\right)$, inoltre $y/\rho = P/(g\rho) = RT/(Mg)$. Con queste assunzioni si ottiene quindi che il rapporto $y/\rho \equiv z_0$ è costante (quindi b in Eq. (1.14) è costante) e z_0 è anche la costante che determina l'andamento della profondità con la quota

$$y = \bar{y} \exp(-z/z_0) \quad z_0 \equiv y/\rho \quad (1.15)$$

Integrando l'equazione Eq. (1.14) tra y_1 e y_2 con la condizione iniziale $w(y_1) = 1$ (cioè la particella arriva sicuramente in y_1) si ottiene quindi

$$\log w_{12} = -\frac{m}{\tau_0} z_0 \frac{1}{p_2 + ay_2} \log \left(\frac{y_2 p_2 + a(y_2 - y_1)}{y_1 p_2} \right) \quad (1.16)$$

Usando l'equazione Eq. (1.7) con Eq. (1.8) e

$$z_1 - z_2 = -z_0 \log \frac{y_1}{\bar{y}} + z_0 \log \frac{y_2}{\bar{y}} = z_0 \log \frac{y_2}{y_1} \quad (1.17)$$

si ottiene dal confronto con Eq. (1.16) l'espressione

$$\tilde{p} = \frac{p_2 + ay_2}{1 + \left[\log \frac{p_2 + a(y_2 - y_1)}{p_2} \right] / \log \frac{y_2}{y_1}} \quad (1.18)$$

1.3 L'esperimento di Hafele e Keating [2, 3]

Scopo di questo esperimento è una verifica esplicita con orologi macroscopici del paradosso dei gemelli. Questo è un test della relatività ristretta (e parzialmente, si vedrà, anche di relatività generale) e consente di affermare che il tempo misurato da un orologio reale coincide effettivamente con il tempo proprio.

L'idea di base è di utilizzare degli orologi atomici (inizialmente sincronizzati) posizionati poi su aerei di linea per verificare se dopo ≈ 600 ore di volo gli orologi sono ancora sincronizzati o no

Fig. 1. Predicted relativistic time gain for a flying clock after a nonstop equatorial circumnavigation of the earth at various altitudes. The labeled dots correspond to cruising ground speeds and altitudes for the indicated aircraft. The area within the hatched lines is below approximate detection thresholds with a portable cesium beam clock.

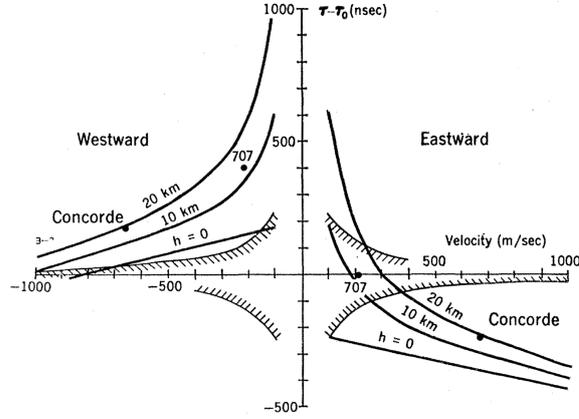


Figura 2: Figura originale dell'articolo di Hafele e Keating in cui si confrontano i valori attesi con la precisione di misura.

con un orologio rimasto fermo. Un punto importante è inoltre la direzionalità dell'esperimento: ci si aspetta una differenza tra i risultati dei voli in direzione concorde o discorde con il verso di rotazione terrestre.

Passiamo ora ad una analisi teorica di quello che ci si aspetta debba succedere: la relazione fondamentale di relatività ristretta da usare è chiaramente $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$, dove t è la coordinata temporale e τ il tempo proprio. Poichè in tutti i casi si avrà $v \ll c$ si può sviluppare questa espressione al primo ordine non banale in v/c , quindi

$$d\tau \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (RR) \quad (1.19)$$

Poichè gli aerei voleranno a quote diverse è necessario tenere in considerazione anche un effetto di relatività generale: nel limite di campo gravitazionale debole la previsione di relatività generale è data da

$$d\tau \approx \left(1 + \frac{\chi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (GR) \quad (1.20)$$

dove $\chi = -GM/r$ è il potenziale gravitazionale.

L'orologio rimasto fermo al suolo ruota con velocità $v = \Omega R$, dove Ω è velocità angolare di rotazione terrestre e R il raggio terrestre e quindi il tempo proprio da lui misurato sarà dato dall'espressione (si supponrà per semplicità che tutti i moti avvengano sul piano equatoriale; la generalizzazione è banale ma le formule si complicano notevolmente)

$$\tau_0 = \int_{t_i}^{t_f} d\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{R^2 \Omega^2}{2c^2}\right) \Delta t_0 \quad (1.21)$$

dove Δt_0 è la differenza della coordinata temporale, che chiaramente non è osservabile direttamente. A questo punto si deve considerare il caso degli aerei, in moto con velocità v rispetto al suolo. Poichè siamo interessati solo al termine dominante in uno sviluppo in potenze di $1/c$ e v compare in Eq. (1.20) moltiplicato per $1/c^2$, si può utilizzare la regola di somma galileiana delle velocità, quindi l'aereo avrà, rispetto ad un osservatore inerziale, velocità $u \approx (R + h)\Omega + v$ dove h è la quota di volo, quindi la sua differenza di tempo proprio è data da

$$\tau = \left(1 - \frac{GM}{c^2 R(1 + h/R)} - \frac{[R\Omega(1 + h/R) + v]^2}{2c^2}\right) \Delta t \quad (1.22)$$

Poichè i voli percorrono rotte diverse ma i punti iniziali i finali sono gli stessi, si ha nelle equazioni Eq. (1.21) e Eq. (1.22) $\Delta t = \Delta t_0$, quindi si ottiene per il rapporto τ/τ_0 la predizione

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{1 - \frac{GM}{c^2 R(1+h/R)} - \frac{[R\Omega(1+h/R)+v]^2}{2c^2}}{1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{R^2\Omega^2}{2c^2}} \quad (1.23)$$

Sviluppando in potenze di $1/c$ e di h/R si arriva all'espressione finale notevolmente più semplice

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + \frac{gh}{c^2} - \frac{2R\Omega v + v^2}{2c^2} \quad (1.24)$$

dove è stata introdotta la accelerazione superficiale di gravità $g = GM/R^2 - R\Omega^2$.

	est	west
esperimento	-59 ± 10	273 ± 7
teoria	-40 ± 23	275 ± 21

Tabella 2: Valori attesi e misurati per $\tau - \tau_0$ in ns.

Per verificare la attuabilità di questo esperimento è necessario verificare che lo scarto dato da Eq. (1.24) sia misurabile, ovvero che $\tau - \tau_0$ sia maggiore della precisione strumentale. Per effettuare ciò si può notare che (assumendo una singola orbita completa) all'ordine dominante $\tau_0 = 2\pi R/|v|$ e quindi dall'equazione Eq. (1.24) si ottiene

$$\tau - \tau_0 = \frac{2\pi R}{c^2} \left(\frac{gh}{|v|} - \frac{R\Omega v}{|v|} - \frac{|v|}{2} \right) \quad (1.25)$$

in cui solo il secondo termine dipende dalla direzione di volo. Alcuni valori tipici sono $2R\Omega \approx 930\text{m/s}$, $h \approx 10\text{Km}$ e $v \approx 300\text{m/s}$, con i quali si ottengono per la quantità $\delta \equiv (\tau - \tau_0)/\tau_0$ i valori $\delta(\text{west}) \approx 2.1 \times 10^{-12}$, $\delta(\text{east}) \approx -1.0 \times 10^{-12}$ ed il limite di misurabilità imposto dalla precisione tipica degli orologi atomici $\delta \approx 1.0 \times 10^{-13}$. Un grafico di Eq. (1.25) per alcuni casi tipici è riportato in Fig. (2). I risultati finali ottenuti sono riportati in Tab. (2)

1.4 Vita media di μ^\pm agli anelli di accumulazione [4]

In questo caso le particelle vengono mantenute su un'orbita circolare tramite un campo magnetico e si studia l'andamento nel tempo dei prodotti di decadimento.

Una particella in moto in un campo magnetico uniforme si muove, se il suo impulso iniziale è perpendicolare alla direzione del campo magnetico, su una traiettoria circolare il cui raggio è dato dalla relazione

$$cp_\perp = eBr \quad (1.26)$$

che nel caso di particelle di carica uguale a quella elettronica si può scrivere nella forma

$$p_\perp [\text{MeV}/c] = 3 \times 10^{-4} Br [\text{gauss cm}] = 300 Br [\text{tesla cm}] \quad (1.27)$$

In questo esperimento l'impulso dei muoni è approssimativamente $3.094\text{GeV}/c$ che corrisponde ad una velocità $\beta = 0.9994$ ed a $\gamma = 29.3$ e, considerato un diametro di circa 14m , ad un tempo di rotazione di circa $0.147\mu\text{s}$. I muoni decadono secondo

$$\mu^- \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e \quad (1.28)$$

quindi uno studio del tempo di decadimento dei μ^\pm può procedere nel seguente modo:

1. si iniettano dei muoni nell'anello di accumulazione
2. si studia l'andamento nel tempo del flusso degli elettroni uscenti

In un caso ideale il numero di elettroni emessi seguirebbe esattamente l'espressione $N = N_0 e^{-t/\tau}$, dove N_0 è il numero dei muoni iniziali e τ la vita media dei muoni. In realtà sono presenti alcune difficoltà pratiche quali ad esempio:

1. alcuni muoni possono sfuggire dall'anello di accumulazione prima di essere decaduti
2. alcuni degli elettroni di decadimento possono sfuggire alla rivelazione
3. è necessario verificare che i segnali rivelati corrispondano effettivamente al decadimento dei muoni e non ad un fondo che eventualmente andrebbe sottratto

Il risultato fondamentale dell'esperimento è il seguente: il valore di γ è stato stimato essere $\gamma = 29.327(4)$ ed indicando con τ^+ la vita media misurata dei μ^+ e con μ_0^+ la vita media di un muone a riposo (nota da altri esperimenti), si è ottenuto

$$\tau^+ = 64.419(58)\mu s \quad \tau^- = 64.368(29)\mu s \quad \frac{\tau_0^+ - \tau^+/\gamma}{\tau_0^+} = (2 \pm 9) \times 10^{-4} \quad (1.29)$$

Il risultato riportato per la verifica della dilatazione dei tempi è quello per τ^+ in quanto il corrispondente tempo di decadimento a riposo era conosciuto con maggiore accuratezza e quindi il test è più significativo.

Questo esperimento è particolarmente significativo per il fatto che i muoni nell'orbita circolare sono sottoposti ad una accelerazione di circa $10^{18}g$, quindi i risultati pongono limiti molto stretti a possibili violazioni dipendenti dalla accelerazione della legge relativistica di dilatazione dei tempi. Altro risultato importante è che le vite medie dei μ^\pm risultano compatibili; dal punto di vista teorico è infatti un risultato fondamentale (legato fundamentalmente all'invarianza di Lorentz delle teorie fondamentali) che le vite medie di particella ed antiparticella risultino eguali.

2 Deduzione quantistica della formula di Bethe non relativistica

Considereremo lo scattering inelastico di una particella pesante di massa M e carica ze su un atomo inizialmente nello stato fondamentale seguendo la trattazione data nelle sezioni §148 – 149 – 150 di [5].

Utilizzeremo per il calcolo la approssimazione di Born, che è valida se la velocità del proiettile è molto maggiore della velocità tipica degli elettroni atomici (che è dell'ordine di \hbar/a_0 , cioè, usando $\hbar c \approx 200\text{MeVfm}$, $10^{-3} \div 10^{-2}c$). Se si trascura il rinculo dell'atomo e consideriamo il processo in cui l'atomo viene eccitato al suo livello n -esimo, la probabilità di transizione è data, nella approssimazione di Born, dalla relazione

$$dw_n = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n, \mathbf{p}' | U | 0, \mathbf{p} \rangle|^2 \delta \left(\frac{p'^2 - p^2}{2M} + E_n - E_0 \right) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3} \quad (2.1)$$

dove il potenziale di interazione è dato da

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z) = \frac{Zze^2}{r} - \sum_{a=1}^Z \frac{ze^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} \quad (2.2)$$

Nell'equazione Eq. (2.1) si userà per la funzione d'onda della particella incidente la normalizzazione a flusso unitario

$$\psi_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{M}{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \quad (2.3)$$

mentre la convenzione utilizzata per lo spazio delle fasi corrisponde alla seguente normalizzazione per la funzione d'onda della particella uscente

$$\psi_{\mathbf{p}'} = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar} \quad (2.4)$$

Integrando Eq. (2.1) in p' si ottiene

$$d\sigma_n = \frac{Mp'}{4\pi^2\hbar^4} |\langle n, \mathbf{p}' | U | 0, \mathbf{p} \rangle|^2 d\omega' \quad (2.5)$$

dove $d\omega'$ è l'elemento di angolo solido relativo alla particella uscente e p' è dato da

$$\frac{p^2 - p'^2}{2M} = E_n - E_0 \quad (2.6)$$

Sostituendo in questa formula le espressioni esplicite per $\psi_{\mathbf{p}}$ e $\psi_{\mathbf{p}'}$ date in precedenza si ottiene

$$d\sigma_n = \frac{M^2}{4\pi^2\hbar^4} \frac{p'}{p} \left| \int U e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_n^* \psi_0 d\tau d\mathbf{r} \right|^2 d\omega' \quad (2.7)$$

dove $-\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ è l'impulso trasferito, $d\tau = d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_Z$ e ψ_n, ψ_0 sono gli orbitali atomici (quindi funzioni di $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_Z$). A causa dell'ortogonalità di ψ_0 e ψ_n ($n > 0$), il termine coulombiano del nucleo nell'interazione Eq. (2.2) non contribuisce all'elemento di matrice e si ha quindi

$$d\sigma_n = \frac{M^2}{4\pi^2\hbar^4} \frac{p'}{p} \left| \int \sum_{a=1}^Z \frac{ze^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_n^* \psi_0 d\tau d\mathbf{r} \right|^2 d\omega' \quad (2.8)$$

L'integrazione in $d\mathbf{r}$ può a questo punto essere effettuata utilizzando la nota espressione per la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano:

$$\int \frac{e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{q^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \quad (2.9)$$

ottenendo

$$d\sigma_n = \left(\frac{ze^2M}{\hbar^2} \right)^2 \frac{4p'}{pq^4} \left| \left\langle n \left| \sum_{a=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \right| 0 \right\rangle \right|^2 d\omega' \quad (2.10)$$

È ora conveniente riscrivere questa sezione d'urto differenziale in termini della variabile q invece dell'angolo solido: da

$$\hbar^2 q^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta \quad (2.11)$$

si ottiene, per una data perdita di energia (cioè fissati p e p'), l'espressione

$$\hbar^2 q dq = pp' \sin \theta d\theta = \frac{pp'}{2\pi} d\omega' \quad (2.12)$$

(avendo usato l'invarianza assiale del problema) e quindi Eq. (2.10) diventa infine

$$d\sigma_n = 8\pi \left(\frac{ze^2}{\hbar v} \right)^2 \frac{dq}{q^3} \left| \left\langle n \left| \sum_{a=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \right| 0 \right\rangle \right|^2 \quad (2.13)$$

dove v è la velocità della particella incidente.

Si vuole ora calcolare il rallentamento efficace $\chi(q_1)$ dato da

$$\chi(q_1) = \sum_n \int_{q_{min}}^{q_1} (E_n - E_0) d\sigma_n \quad (2.14)$$

cioè la perdita totale di energia dovuta agli urti con trasferimento di impulso $\leq \hbar q_1$. Notiamo subito che l'integrale e la sommatoria non possono essere scambiati di posto, in quanto q_{min} dipende da n : considerando il caso di piccoli trasferimenti di impulso, cioè $p - p' \ll p$, allora

$$E_n - E_0 = \frac{p^2 - p'^2}{2M} \approx \frac{\mathbf{p}}{M} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{v} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') = -\hbar \mathbf{v} \mathbf{q} \quad (2.15)$$

e si ottiene quindi

$$q_{min} = \frac{E_n - E_0}{\hbar v} \quad (2.16)$$

Per procedere oltre è conveniente spezzare l'integrale nell'equazione Eq. (2.14) in due termini:

$$\int_{q_{min}}^{q_1} = \int_{q_{min}}^{q_0} + \int_{q_0}^{q_1} \quad (2.17)$$

dove q_0 è scelto in modo che $q_0 a_0 \sim 1$, dove a_0 è una scala di lunghezza tipica atomica.

Consideriamo ora il primo dei due integrali, quello con $q_{min} \leq q \leq q_0$: poichè in questo intervallo di momenti si ha tipicamente $q r_a \ll 1$, nell'equazione Eq. (2.13) si può effettuare una approssimazione di dipolo, cioè si sviluppa l'esponenziale e si considera solo il primo termine non nullo. Scriviamo

$$e^{-iqr_a} \approx 1 - iqr_a = 1 - iqx_a \quad (2.18)$$

dove si suppone l'asse x orientato lungo \mathbf{q} . A causa dell'ortogonalità di $|n\rangle$ e $|0\rangle$, sostituendo questo sviluppo in Eq. (2.13) si ottiene

$$d\sigma_n = 8\pi \left(\frac{ze}{\hbar v}\right)^2 \frac{dq}{q} |\langle n|d_x|0\rangle|^2 \quad (2.19)$$

dove $d_x = e \sum_{a=1}^Z x_a$ è l'operatore di dipolo elettrico. Il contributo dato al rallentamento efficace da questo intervallo di momenti è quindi uguale a

$$\begin{aligned} \chi(q_0) &= 8\pi \left(\frac{ze}{\hbar v}\right)^2 \sum_n |\langle n|d_x|0\rangle|^2 (E_n - E_0) \int_{q_{min}}^{q_0} \frac{dq}{q} = \\ &= 8\pi \left(\frac{ze}{\hbar v}\right)^2 \sum_n |\langle n|d_x|0\rangle|^2 (E_n - E_0) \log \frac{q_0 \hbar v}{E_n - E_0} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nel secondo intervallo, $q_0 \leq q \leq q_1$, l'estremo inferiore di integrazione è indipendente da n e quindi la sommatoria e l'integrale possono essere invertiti di posizione, quindi

$$\chi(q_1) - \chi(q_0) = 8\pi \left(\frac{ze^2}{\hbar v}\right)^2 \int_{q_0}^{q_1} \sum_n (E_n - E_0) \left| \left\langle n \left| \sum_{a=1}^Z e^{-iqr_a} \right| 0 \right\rangle \right|^2 \frac{dq}{q^3} \quad (2.21)$$

Per effettuare le somme presenti nelle equazioni Eq. (2.20) e Eq. (2.21) si utilizza una regola di somma che dedurremo ora: consideriamo un generico operatore, che indicheremo con f . Le equazioni del moto dell'operatore f sono date da

$$\dot{f} = \frac{i}{\hbar} [H, f] \quad (2.22)$$

dove H è la hamiltoniana del sistema, quindi si ha in particolare la relazione tra gli elementi di matrice

$$\langle 0|\dot{f}|r\rangle = \frac{i}{\hbar} \langle 0|(Hf - fH)|n\rangle = \frac{i}{\hbar} (E_0 - E_n) \langle 0|f|n\rangle \quad (2.23)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_n (E_n - E_0) |\langle 0|f|n\rangle|^2 &= \sum_n (E_n - E_0) \langle 0|f|n\rangle \langle n|f^+|0\rangle = \\ &= i\hbar \sum_n \langle 0|\dot{f}|n\rangle \langle n|f^+|0\rangle = i\hbar \langle 0|\dot{f}f^+|0\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nel caso particolare in cui le funzioni d'onda sono reali (come per gli orbitali atomici) si ha $\langle 0|f|n\rangle = \langle n|f|0\rangle$ e quindi (vedi Eq. (2.23)) $\langle 0|\dot{f}|n\rangle = -\langle n|\dot{f}|0\rangle$. Di conseguenza la seconda riga dell'equazione Eq. (2.24) si può anche scrivere

$$= -i\hbar \sum_n \langle n|\dot{f}|0\rangle \langle 0|f^+|n\rangle = -i\hbar \langle 0|f^+ \dot{f}|0\rangle \quad (2.25)$$

quindi si ottiene la regola di somma

$$\sum_n (E_n - E_0) |\langle 0|f|n\rangle|^2 = \frac{i\hbar}{2} \langle 0|[f, f^+]|0\rangle \quad (2.26)$$

Utilizziamo ora la regola di somma con l'operatore $f = \sum_{a=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a}$: non è difficile verificare che si ha

$$f = \sum_{a=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \quad f^+ = \sum_{a=1}^Z e^{+i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \quad [f, f^+] = -\frac{i\hbar}{m} q^2 Z \quad (2.27)$$

dove m è la massa elettronica, che compare nel termine cinetico dell'hamiltoniana. La regola di somma diventa allora (regola di somma di Bethe)

$$\sum_n (E_n - E_0) \left| \left\langle n \left| \sum_{a=1}^Z e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \right| 0 \right\rangle \right|^2 = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} Z \quad (2.28)$$

e quindi l'equazione Eq. (2.21) diventa

$$\chi(q_1) - \chi(q_0) = 4\pi \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \int_{q_0}^{q_1} \frac{dq}{q} = 4\pi \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log \frac{q_1}{q_0} \quad (2.29)$$

Se si utilizza invece $f = \frac{1}{e} d_x = \sum_{a=1}^Z x_a$ si ha allora

$$f = \sum_{a=1}^Z x_a \quad f^+ = f \quad \dot{f} = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^Z p_a^{(x)} \quad [f, f^+] = -\frac{i\hbar}{m} Z \quad (2.30)$$

e quindi (regola di somma di Thomas-Reiche-Kuhn)

$$N_n = \frac{2m}{(e\hbar)^2} (E_n - E_0) |\langle n|d_x|0\rangle|^2 \quad \sum_n N_n = Z \quad (2.31)$$

Utilizzando le equazioni Eq. (2.20), Eq. (2.29) e quest'ultima relazione, si ottiene

$$\begin{aligned} \chi(q_1) &= 8\pi \left(\frac{ze}{\hbar v} \right)^2 \frac{(e\hbar)^2}{2m} \sum_n N_n \left[\log(q_0 \hbar v) - \log(E_n - E_0) \right] + 4\pi \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log \frac{q_1}{q_0} = \\ &= 4\pi \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log \frac{q_1 \hbar v}{I} \end{aligned} \quad (2.32)$$

dove I è una energia media di ionizzazione definita da

$$\log I = \frac{\sum_n N_n \log(E_n - E_0)}{\sum_n N_n} \quad (2.33)$$

Per concludere basta ora calcolare il valore massimo dell'impulso trasferito. Se supponiamo che $\hbar q_{max} \ll Mv$ (cioè che l'impulso trasferito sia sempre una piccola percentuale dell'impulso iniziale) il cambio dell'energia della particella pesante si può scrivere $\Delta E = \hbar \mathbf{v} \mathbf{q}$. D'altro canto nel limite di grande impulso trasferito, l'impulso sarà trasferito principalmente ad un singolo elettrone, che acquisterà una energia $\epsilon = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$. Da $\epsilon = \Delta E \leq \hbar v q$ si ottiene allora $\hbar q_{max} = 2mv$ e quindi

$$\chi = 4\pi \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log \frac{2mv^2}{I} \quad (2.34)$$

Questa è l'espressione della perdita media di energia di una particella di massa M e carica ze dovuta all'urto con un atomo con Z elettroni di massa m . Consideriamo ora il caso di un mezzo invece di un singolo atomo: se si suppone che la densità del mezzo sia sufficientemente piccola da

poter trascurare gli effetti collettivi del mezzo, allora la perdita di energia per unità di lunghezza in un mezzo con densità numerica N è data da

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 4\pi N \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log \frac{2mv^2}{I} \quad (2.35)$$

che è il corretto limite di bassa energia dell'equazione 13.14 di J. D. Jackson "Classical electrodynamics"

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 4\pi N \frac{Zz^2 e^4}{mc^2 \beta^2} \left\{ \log \frac{2\gamma^2 \beta^2 mc^2}{I} - \beta^2 \right\} \quad (2.36)$$

Vediamo infine la condizione affinché sia sensato trascurare gli effetti collettivi del mezzo: consideriamo un sistema con una frequenza caratteristica ω_0 , allora i tempi di risposta caratteristici del sistema sono dell'ordine di $1/\omega_0$ e tutte le perturbazioni con scale temporali maggiori risultano adiabatiche (e quindi non generano eccitazioni del sistema e perdita di energia del proiettile). Una carica elettrica in moto uniforme con velocità v e con parametro di impatto b genera un campo elettrico con tempi scala caratteristici dell'ordine $b/(\gamma v)$ (vedi seguito), quindi il parametro di impatto massimo che genera eccitazioni atomiche è dell'ordine di

$$b_{max} \approx \frac{\gamma v}{\omega_0} \quad (2.37)$$

Per un atomo tipico $\omega_0 \approx \hbar/\epsilon_0$ con $\epsilon_0 \approx 10\text{eV}$, quindi si ottiene

$$b_{max} \approx 100\text{\AA} \frac{\gamma v}{c} \quad (2.38)$$

e per poter trascurare gli effetti collettivi b_{max} deve essere più piccolo o dell'ordine delle distanze tipiche interatomiche. In particolare il trascurare effetti di densità finita risulta chiaramente una approssimazione migliore nei gas che nei solidi e non è mai una buona approssimazione nel limite ultrarelativistico, in cui $b_{max} \rightarrow \infty$.

D'altra parte effetti collettivi devono essere presi in considerazione anche per velocità piccole delle particelle: un impulso p corrisponde ad una lunghezza \hbar/p ed affinché gli effetti degli urti atomici risultino incoerenti \hbar/p deve essere più piccolo della tipica distanza interatomica. Se si indica con a_0 una distanza tipica atomica, la condizione $\hbar/p \lesssim a_0$ equivale a supporre l'impulso della particella pesante più grande dell'impulso tipico di un elettrone atomico, quindi questa condizione è sicuramente verificata se è soddisfatta la condizione di validità della approssimazione di Born (velocità del proiettile molto più grande della tipica velocità di un elettrone atomico).

2.1 Il campo di una carica in moto uniforme

Ricordiamo le regole di trasformazione del campo elettromagnetico

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nel caso di una carica e che si muove lungo la traiettoria $\mathbf{b} + \mathbf{v}t$ (con $\mathbf{b}\mathbf{v} = 0$) si ha $\mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{E} = e\mathbf{r}/r^3$ inoltre sotto una trasformazione di Lorentz si ha

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma \mathbf{r}_{\parallel} \quad (2.40)$$

quindi in particolare $\mathbf{b} + \mathbf{v}t = \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{b} + \mathbf{v}\gamma t$ e

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}') + \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}') = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}') + \gamma \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}') = e\gamma \frac{\mathbf{b} + \mathbf{v}t}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}} \quad (2.41)$$

da cui si vede che il tempo caratteristico per cui il campo agisce è $b/(\gamma v)$.

3 Deduzione macroscopica della formula di Bethe non relativistica e il caso di piccole velocità

Si vedrà in questa sezione come dedurre la formula di Bethe non relativistica macroscopicamente seguendo approssimativamente la sezione §113 di [6]. Indicando con \mathbf{E}, \mathbf{B} i campi nel vuoto, le equazioni di Maxwell nel mezzo di scrivono come

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}\quad (3.1)$$

ed in trasformata di Fourier si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= \mu(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \\ \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) &= \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Per le trasformate di Fourier quadridimensionali useremo le convenzioni

$$\begin{aligned}F(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} F(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \\ F(\mathbf{k}, \omega) &= \int d\mathbf{r} \int dt F(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}\end{aligned}\quad (3.3)$$

e ricordiamo che $\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x} = 2\pi\delta(\mathbf{k})$.

Consideriamo il campo generato da una carica ze in moto con velocità \mathbf{v} non relativistica: le equazioni che servono sono

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad \nabla \times \mathbf{E} \approx 0 \quad (3.4)$$

con $\rho = ze\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$. Considerando la trasformata della prima equazione si ottiene

$$i\epsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 8\pi^2 ze\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k}) \quad (3.5)$$

mentre dalla seconda si ottiene $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ e quindi $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -i\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, \omega)$. Unendo questi due risultati si ottiene

$$\phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{8\pi^2 ze\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})}{k^2\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \quad (3.6)$$

e quindi per il campo elettrico

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -i \frac{2ze}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \int d\omega \frac{\mathbf{k}\delta(\omega - \mathbf{v}\mathbf{k})}{k^2\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} = \\ &= -i \frac{2ze}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}}{k^2\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \mathbf{k}\mathbf{v}t)} =\end{aligned}\quad (3.7)$$

La potenza dissipata dalla carica in moto è

$$P = - \int \mathbf{j} \mathbf{E} d\mathbf{r} = -ze \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \mathbf{v} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = -ze\mathbf{v} \mathbf{E}(\mathbf{v}t, t) \quad (3.8)$$

e l'energia dissipata per unità di lunghezza è

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{v} P \quad (3.9)$$

quindi

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = i \frac{2(ze)^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{vk^2\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v})} \quad (3.10)$$

A questo punto supponiamo l'asse x diretto lungo \mathbf{v} ed introduciamo la notazione

$$\omega = vk_x \quad q = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} \quad (3.11)$$

quindi $\mathbf{v}\mathbf{k} = \omega$ e $d\mathbf{k} = dk_x 2\pi q dq = \frac{2\pi}{v} d\omega q dq$ e l'equazione Eq. (3.10) diventa

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = i \frac{(ze)^2}{\pi} \int d\omega dq \frac{\omega q}{(\omega^2 + v^2 q^2) \epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \quad (3.12)$$

Consideriamo ora gli estremi di integrazione ed i limiti di validità dell'espressione ottenuta: $\hbar\mathbf{k}$ corrisponde all'impulso trasferito dalla particella incidente all'elettrone, e ad un trasferimento di impulso $\hbar\mathbf{k}$ corrisponde un parametro di impatto $1/k$. Affinchè la trattazione macroscopica sia consistente, si deve supporre che $k \ll 1/a$, dove a è una tipica dimensione atomica. D'altra parte si ha $k^2 = q^2 + \omega^2/v^2$ e quindi si deve avere $q \ll 1/a$ e $\omega/v \ll 1/a$.

È a questo punto necessario effettuare alcune ipotesi fisiche sulla funzione dielettrica. Poichè si vuole ottenere nuovamente la formula di Bethe, si considererà il caso in cui l'assorbimento sia dovuto ad eccitazioni elettroniche e non ad eccitazioni collettive del mezzo (vedi dopo per alcuni cenni a questo caso). Si assumerà quindi che essa dipenda solo dalla frequenza ω e non dal vettore d'onda (come tipicamente accade per le frequenze ottiche), inoltre per alte frequenze la funzione dielettrica tende ad 1, quindi la parte immaginaria di $1/\epsilon$ (quella legata all'assorbimento) è significativamente diversa da zero solo se $\omega \lesssim \bar{\omega}$, dove $\bar{\omega}$ è una frequenza tipica atomica (con $\hbar\bar{\omega} \lesssim 1\text{eV}$). Le precedenti espressioni sono state ottenute in approssimazione non relativistica, quindi è ovvio che affinché siano valide si deve avere $v \ll c$, tuttavia deve anche essere verificata la condizione $\bar{\omega}/v \ll 1/a$ (vedi paragrafo precedente), ovvero $v \gg a\bar{\omega} \approx 10^{-3}c$, quindi v deve essere molto più grande delle velocità tipiche degli elettroni nell'atomo.

Se si effettua dapprima l'integrale in q in Eq. (3.12) si deve quindi considerare un intervallo di integrazione del tipo $[0, q_0]$ con $q_0 \ll 1/a$, e supponiamo di considerare un limite sulle velocità permesse tale per cui $\bar{\omega}/v \ll q_0 \ll 1/a$. Per quanto riguarda l'integrazione in ω , essa può essere estesa su tutto l'asse reale in quanto la funzione dielettrica stessa funzionerà da cut-off naturale, riducendo in pratica l'integrale a $\int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}}$, quindi

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = i \frac{(ze)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{q_0} dq \frac{\omega q}{(\omega^2 + v^2 q^2) \epsilon(\omega)} \quad (3.13)$$

La funzione a primo membro è chiaramente reale, quindi si ha

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{(ze)^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{q_0} dq \frac{\omega q}{(\omega^2 + v^2 q^2)} \Im \left(-\frac{1}{\epsilon(\omega)} \right) \quad (3.14)$$

È un fatto generale che la parte immaginaria di $1/\epsilon$ è dispari nella frequenza (un esempio si vedrà nel seguito), quindi si può limitare l'integrale in ω al solo semiasse positivo (chiaramente moltiplicando per 2). L'integrazione in q può a questo punto essere effettuata esplicitamente, ottenendo infine (per la scelta di q_0 si ha $q_0^2 v^2 + \omega^2 \approx q_0^2 v^2$)

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{2(ze)^2}{\pi v^2} \int_0^{+\infty} d\omega \omega \log \left(\frac{q_0 v}{\omega} \right) \Im \left(-\frac{1}{\epsilon(\omega)} \right) \quad (3.15)$$

La funzione $-\Im(1/\epsilon)$ è per questo motivo spesso chiamata "energy-loss function".

Per procedere oltre è chiaramente necessario avere la forma di $\epsilon(\omega)$: ricordiamo innanzitutto la definizione "microscopica" di \mathbf{D} : si ha $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ dove \mathbf{P} è la polarizzazione indotta nel mezzo, quindi calcolare ϵ equivale a calcolare \mathbf{P} . Consideriamo il modello estremamente semplice di un elettrone in una buca armonica in presenza di dissipazione: l'equazione del moto è

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}) = -e\mathbf{E} \quad (3.16)$$

e se supponiamo il campo \mathbf{E} un campo monocromatico con frequenza ω e indipendente dalla posizione, si ottiene allora per la polarizzazione indotta

$$\mathbf{p} \equiv -e\mathbf{x} = \left(\frac{e^2}{m}\right) \frac{\mathbf{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (3.17)$$

Se consideriamo un mezzo con N atomi per unità di volume e supponiamo non siano presenti effetti collettivi (l'ipotesi fondamentale della formula di Bethe), allora si ottiene

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \quad (3.18)$$

Un caso più realistico si ottiene nel caso in cui siano presenti diverse frequenze ω_j ed i vari modi abbiano intensità f_j , con $\sum f_j = Z$ (f -sum rule). In questo caso

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2 N}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (3.19)$$

Se il secondo termine di Eq. (3.19) non è troppo grande, allora

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \approx 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (3.20)$$

inoltre se consideriamo il limite $\gamma_j \rightarrow 0$ si può utilizzare la relazione

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{A \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{A} \mp i\pi\delta(A) \quad (3.21)$$

per calcolare la parte immaginaria di Eq. (3.20), ottenendo

$$\Im \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right) = -\frac{4\pi^2 e^2 N}{m} \sum_j f_j \left[\delta(\omega_j^2 - \omega^2) \Theta(\omega) - \delta(\omega_j^2 - \omega^2) \Theta(-\omega) \right] \quad (3.22)$$

che soddisfa le ipotesi precedentemente usate: è dispari in ω e non dipende dal vettore d'onda.

Usando questo risultato nell'equazione Eq. (3.15) si trova

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{8\pi e^2 (ze)^2 N}{mv^2} \int_0^{+\infty} d\omega \omega \log\left(\frac{q_0 v}{\omega}\right) \sum_j f_j \delta(\omega_j^2 - \omega^2) \quad (3.23)$$

Poichè l'integrale è esteso solo al semiasse positivo, $\delta(\omega_j^2 - \omega^2)$ è equivalente a $\frac{1}{2\omega} \delta(\omega_j - \omega)$ quindi

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{4\pi e^2 (ze)^2 N}{mv^2} \sum f_j \log\left(\frac{q_0 v}{\omega_j}\right) \quad (3.24)$$

Ricordando che $\sum f_j = Z$ si ha

$$\sum f_j \log \frac{q_0 v}{\omega_j} = Z \log(q_0 v) - Z \frac{\sum f_j \log \omega_j}{Z} = Z \log(q_0 v) - Z \log(I/\hbar) = Z \log \frac{\hbar q_0 v}{I} \quad (3.25)$$

dove si è introdotto

$$\log(I/\hbar) = \frac{\sum f_j \log \omega_j}{\sum f_j} \quad (3.26)$$

Quindi infine

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = 4\pi N \frac{Z z^2 e^4}{mv^2} \log\left(\frac{\hbar q_0 v}{I}\right) \quad (3.27)$$

che corrisponde al $\chi(q)$ dell'equazione Eq. (2.32) della sezione precedente (moltiplicata per N , la densità numerica del mezzo) nel caso in cui $q = q_0 \ll \hbar/a$, ovvero alla parte di perdita di energia dovuta agli urti con piccolo trasferimento di impulso.

Consideriamo ora il caso in cui la velocità della particella incidente sia molto più piccola delle velocità atomiche tipiche: in questo caso la lunghezza d'onda di de Broglie della particella incidente sarà molto più grande delle dimensioni tipiche atomiche e quindi non si possono trascurare gli effetti collettivi. In questo caso le perdite di energia non sono dovute all'eccitazione di singoli elettroni atomici ma ad eccitazioni del mezzo. In questo limite il mezzo può essere approssimato come un gas quasi-degenere di elettroni stabilizzato dalla presenza delle cariche nucleari statiche e non esiste una frequenza tipica $\bar{\omega}$ come nel caso delle eccitazioni nucleari.

Quasi-degenere significa che la funzione di distribuzione delle velocità può essere approssimata da $\Theta(v_F - v)$ dove v_F è la velocità di Fermi, cioè tutti gli stati con $v < v_F$ sono popolati e tutti gli stati con $v > v_F$ sono liberi e v_F è determinata dal fatto che in numero totale degli stati deve essere uguale al numero totale di elettroni.

In queste condizioni la forma esplicita della funzione dielettrica non è banale e dipende esplicitamente dal vettore d'onda (vedi dopo), ma è semplice ottenere una stima [7] semi-quantitativa di $-d\mathcal{E}/dx$: in una collisione tra la particella incidente di massa M e velocità v ed un elettrone, la variazione di velocità dell'elettrone risulta tipicamente $\approx v$. A causa del principio di Pauli gli unici stati che possono contribuire allo scattering anelastico sono quelli con velocità inferiore a v_F di una quantità $\lesssim v$, in modo che lo stato finale abbia velocità maggiore di v_F e non sia quindi occupato. Il numero per unità di volume di questi stati è

$$n \approx \frac{p^2 dp}{\hbar^3} \quad (3.28)$$

con $p \approx mv_F$ e $dp \approx mv$, quindi

$$n \approx \frac{m^3 v_F^2 v}{\hbar^3} \quad (3.29)$$

D'altra parte un valore tipico per la sezione d'urto è (collisioni con angolo di deflessione apprezzabile)

$$\sigma \approx \left(\frac{e^2}{mv_F^2} \right)^2 \quad (3.30)$$

e l'energia trasferita ad un elettrone in un urto è sempre positiva (sempre per Pauli) ed è tipicamente dell'ordine di grandezza

$$-\Delta\mathcal{E} \approx \frac{\mathbf{p}\Delta\mathbf{p}}{m} \approx mv_F v \quad (3.31)$$

si ottiene quindi

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \frac{1}{v} \Delta\mathcal{E} \sigma n v_F = \frac{m^2 e^4 v}{\hbar^3} \quad (3.32)$$

quindi lineare nella velocità della particella incidente.

Un calcolo più accurato si può ottenere utilizzando la funzione dielettrica di Lindhard, per la quale, nel limite di piccole velocità, si ha

$$\Im \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right) = -2 \frac{\omega}{k^3} \frac{e^2 m^2}{\hbar^3} \quad (3.33)$$

La funzione dielettrica di Lindhard è data da (vedi ad esempio [8, 9])

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{4\pi^3} \frac{f_{\mathbf{p}-\frac{1}{2}\mathbf{k}} - f_{\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{k}}}{\hbar^2 \mathbf{p}\mathbf{k}/m + \hbar\omega + i0^+} \quad (3.34)$$

dove $f_{\mathbf{p}} = 1/(e^{(E-\mu)/kT} + 1)$ è la distribuzione di Fermi-Dirac (\mathbf{p} è un vettore d'onda, è $\hbar\mathbf{p}$ ad essere un impulso). Nel limite di $k \ll mv_F/\hbar$ si ha

$$f_{\mathbf{p}\mp\frac{1}{2}\mathbf{k}} = f_{\mathbf{p}} \pm \frac{\hbar^2}{2m} \mathbf{p}\mathbf{k} \partial_{\mu} f_{\mathbf{p}} \quad (3.35)$$

dove μ è il potenziale chimico, quindi

$$\begin{aligned} \Im \left(\frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \right) &\approx \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{p}}{4\pi^3} \hbar^2 \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}}{m} \partial_\mu f_{\mathbf{p}} \pi \delta \left(\hbar^2 \frac{\mathbf{p}\mathbf{k}}{m} + \hbar\omega \right) = \\ &= \frac{e^2}{\pi k^2} \int p^2 dp d \cos \theta 2\pi \frac{pk \cos \theta}{m} \partial_\mu f_{\mathbf{p}} \delta \left(\hbar^2 \frac{pk \cos \theta}{m} + \hbar\omega \right) = \\ &= - \frac{2e^2 \omega m}{k^3 \hbar} \int p \partial_\mu f_{\mathbf{p}} dp \end{aligned} \quad (3.36)$$

Usando

$$\partial_\mu f_{\mathbf{p}} = - \frac{m}{\hbar^2 p} \partial_p f_{\mathbf{p}} \quad \int_0^\infty \partial_p f_{\mathbf{p}} dp = -1 \quad (3.37)$$

si ottiene Eq. (3.33). Utilizzando l'espressione Eq. (3.33) in Eq. (3.10) si ottiene

$$\begin{aligned} - \frac{d\mathcal{E}}{dx} &= \frac{(ze)^2 e^2 m}{\pi^2 \hbar v} \int d\mathbf{k} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{k^5} = \\ &= \frac{(ze)^2 e^2 m}{\pi^2 \hbar v} \int k^2 dk d \cos \theta 2\pi \frac{k^2 v^2 \cos^2 \theta}{k^5} = \\ &= \frac{4 z^2 e^4 m^2 v}{3 \pi \hbar^3} \int \frac{dk}{k} \end{aligned} \quad (3.38)$$

La determinazione degli estremi di integrazione viene effettuata in questo modo: il valore massimo di k è dell'ordine dell'inverso di $a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$ (raggio di Bohr, dimensione tipica atomica), altrimenti la descrizione macroscopica non è più giustificata, il valore minimo è dato dall'inverso dalla lunghezza di screening del plasma di elettroni degeneri: una carica elettrica e viene schermata ad una distanza $\lambda_D = \sqrt{\frac{a_0 \hbar}{m v_F}}$, quindi $k_{min} \approx 1/\lambda_D$. In questo modo si ottiene

$$- \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{4 z^2 e^4 m^2 v}{3 \pi \hbar^3} \log \sqrt{\frac{e^2}{\hbar v_F}} \quad (3.39)$$

4 Perdita di energia nel caso relativistico

L'espressione relativistica della perdita di energia corrispondente a Eq. (3.15) è (vedi §13.3 di [10] con l'introduzione di μ)

$$\begin{aligned} \left(- \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{>a} &= \frac{2 (ze)^2}{\pi v^2} \Re \int_0^\infty i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \mu(\omega) \beta^2 \right) d\omega \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

che è l'espressione per il flusso di energia attraverso un cilindro di raggio a posizionato intorno alla traiettoria della particella veloce.

4.1 Radiazione Cherenkov

Partendo dall'equazione Eq. (4.1) è semplice ottenere l'espressione per lo spettro della radiazione Cherenkov. Se si è interessati alla radiazione emessa (e non solo all'energia persa dalla particella incidente) si deve considerare il limite $a \rightarrow \infty$, in modo da calcolare il flusso di energia all'infinito. Per fare ciò si devono utilizzare le espressioni asintotiche

$$x \gg 1 \quad K_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad (4.2)$$

ottenendo

$$\begin{aligned} \left(- \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{a \rightarrow \infty} &= \frac{(ze)^2}{v^2} \Re \int_0^\infty i\omega \sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} e^{-(\lambda + \lambda^*)a} \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \mu(\omega) \beta^2 \right) d\omega \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

da cui si vede che, a causa dell'esponenziale, il limite $a \rightarrow \infty$ può essere non nullo solo se $\lambda + \lambda^* = 0$, cioè se $\lambda^2 < 0$, ovvero se

$$v^2 > \frac{c^2}{\epsilon(\omega)} \quad (4.4)$$

Limitandosi al caso in cui $\mu \equiv 1$, dall'equazione Eq. (4.4) segue che $\sqrt{\frac{\lambda^*}{\lambda}} = i$ e quindi

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{rad} = \frac{(ze)^2}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > 1/\beta^2} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon(\omega)}\right) d\omega \quad (4.5)$$

che è la decomposizione spettrale della radiazione Cherenkov (formula di Frank-Tamm).

4.2 La formula di Bethe

Vedremo ora come, con alcune approssimazioni, si possa dedurre la formula di Behte dall'espressione Eq. (4.1). Utilizzeremo la approssimazione $\epsilon \approx 1$ nella definizione di λ (che è sicuramente non corretta per $\beta \approx 1$, vedi la sezione successiva per questo caso), quindi $\lambda \approx \omega/(v\gamma) \in \mathbb{R}$. Mentre nella sezione precedente si è considerato il limite per $a \rightarrow \infty$, si deve ora considerare il limite opposto, quindi si useranno gli sviluppi

$$x \ll 1 \quad K_0(x) \approx \log\left(\frac{c_1}{x}\right) \quad c_1 \approx 1.12 \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x}. \quad (4.6)$$

Si ottiene quindi (supporremo $\mu \equiv 1$)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} &= \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \Re \int_0^\infty i\omega \log\left(\frac{c_1}{\lambda a}\right) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \beta^2\right) d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \int_0^\infty \omega \log\left(\frac{c_1}{\lambda a}\right) \Im\left(-\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right) d\omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Per $\epsilon(\omega)$ useremo l'espressione Eq. (3.19), ovvero

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{Z} \sum \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m} \quad \sum f_j = Z, \quad (4.8)$$

e considereremo il limite di piccolo assorbimento, in modo da poter usare

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{Z} \sum \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j}. \quad (4.9)$$

Considerando il limite $\gamma_j \rightarrow 0$ si ha (poichè l'integrale per $d\mathcal{E}/dx$ è esteso a $\omega \geq 0$ consideriamo solo la soluzione positiva nella delta) si ha quindi

$$\Im\left(-\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right) = \frac{\pi\omega_p^2}{Z} \sum f_j \frac{\delta(\omega_j - \omega)}{2\omega}. \quad (4.10)$$

Di conseguenza

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{4\pi N e^2 (ze)^2}{m v^2} \sum_j f_j \log\left(\frac{c_1 v \gamma}{a \omega_j}\right) \quad (4.11)$$

e, ricordando che

$$\sum f_j = Z \quad \log(I/\hbar) = \frac{\sum f_j \log(\omega_j)}{\sum f_j}, \quad (4.12)$$

si ottiene infine

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = 4\pi N \frac{Z z^2 e^4}{m v^2} \log\left(\frac{c_1 \hbar v \gamma}{a I}\right). \quad (4.13)$$

che è la generalizzazione relativistica dell'equazione Eq. (3.27).

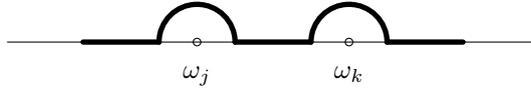


Figura 3: Il cammino di integrazione dell'equazione Eq. (4.16).

4.3 L'effetto di densità finita sulla perdita di energia per ionizzazione di una carica elettrica

Consideriamo l'equazione Eq. (4.1) nel limite ultrarelativistico $v \rightarrow c$: in questo caso si ha

$$\lambda = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \epsilon} \quad (4.14)$$

ed utilizzando gli sviluppi asintotici

$$x \ll 1 \quad K_0(x) \approx \log\left(\frac{c_1}{x}\right) \quad c_1 \approx 1.12 \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x} \quad (4.15)$$

si ottiene quindi

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{c^2} \Re \int_0^\infty i\omega \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1\right) \left\{ \log\left(\frac{c_1 c}{\omega a}\right) - \frac{1}{2} \log(1 - \epsilon(\omega)) \right\} d\omega \quad (4.16)$$

Utilizzeremo per $\epsilon(\omega)$ l'espressione Eq. (3.19), ovvero

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{Z} \sum \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N Z e^2}{m} \quad \sum f_j = Z \quad (4.17)$$

e nuovamente supporremo

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \approx -\frac{\omega_p^2}{Z} \sum \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_j} \quad (4.18)$$

ed utilizzeremo il limite $\gamma_j \rightarrow 0^+$. I poli positivi delle due equazioni Eq. (4.17) e Eq. (4.18) soddisfano l'equazione

$$\omega_j = \omega \sqrt{1 + \frac{i\gamma_j}{\omega}} \approx \omega \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\gamma_j}{\omega}\right) = \omega + \frac{i}{2} \gamma_j \quad (4.19)$$

quindi i loro valori sono

$$\omega = \omega_j - \frac{i}{2} \gamma_j \quad (4.20)$$

ed il cammino di integrazione può essere deformato come in Fig. (3). Questo integrale può essere convenientemente effettuato utilizzando il teorema di Cauchy: poichè le uniche singolarità dell'integrando sono in corrispondenza dei valori ω_j , l'integrale esteso al percorso mostrato in Fig. (4) è nullo, quindi l'integrale sull'asse reale può essere scritto tramite un termine integrato sull'asse immaginario ed uno su un quarto di circonferenza.

Verifichiamo che il contributo alla perdita di energia dovuto all'integrale su Γ_3 (asse immaginario) risulta nullo: ponendo $\omega = i|\omega|$, si vede subito che

$$\epsilon(i|\omega|), \frac{1}{\epsilon(i|\omega|)} - 1, 1 - \epsilon(i|\omega|) \in \mathbb{R} \quad 1 - \epsilon(i|\omega|) < 0 \quad (4.21)$$

e ricordando che

$$z \in \mathbb{C} \quad \log z = \log |z| + i \arg z \quad (4.22)$$

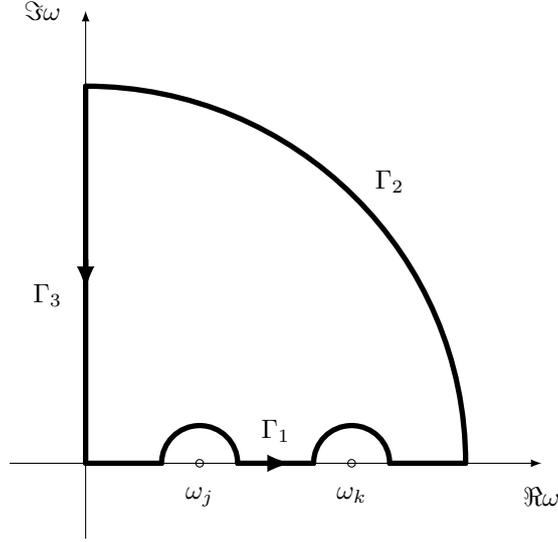


Figura 4: Cammino di integrazione lungo cui l'integrale in Eq. (4.16) risulta nullo.

ed utilizzando la convenzione $\arg z \in [-5/4\pi, 3/4\pi)$ (inusuale ma in questo caso comoda) l'integrale in Eq. (4.16) risulta essere

$$\Re \int_0^\infty \underbrace{(-|\omega|)}_{\text{reale}} \underbrace{\left(\frac{1}{\epsilon(i|\omega|)} - 1 \right)}_{\text{reale}} \underbrace{\left\{ \log \left(\frac{c_1 c}{i|\omega| a} \right) - \frac{1}{2} \log (1 - \epsilon(i|\omega|)) \right\}}_{\substack{\text{reale} - i\pi/2 \\ \text{reale} - i\pi}} id|\omega| = 0 \quad (4.23)$$

quindi

$$\Re \int_{\Gamma_1} = -\Re \int_{\Gamma_2} \quad (4.24)$$

Per effettuare l'integrale lungo Γ_2 usiamo $\omega = r e^{i\phi}$ ($r \in \mathbb{R}$) e siamo interessati al limite $r \rightarrow \infty$, limite in cui

$$\frac{1}{\epsilon(\omega)} - 1 \rightarrow \omega_p^2 \frac{e^{-2i\phi}}{r^2} \quad 1 - \epsilon(\omega) \rightarrow \omega_p^2 \frac{e^{-2i\phi}}{r^2} \quad (4.25)$$

Utilizzando $d\omega = i r e^{i\phi} d\phi$ l'integrale su Γ_2 ha la forma

$$I_{\Gamma_2} = \Re \int_0^{\pi/2} i r e^{i\phi} \omega_p^2 \frac{e^{-2i\phi}}{r^2} \left\{ \log \left(\frac{c_1 c}{r a} e^{-i\phi} \right) - \frac{1}{2} \log \left(\omega_p^2 \frac{e^{-2i\phi}}{r^2} \right) \right\} r e^{i\phi} id\phi \quad (4.26)$$

e con le convenzioni adottate per il logaritmo si ha

$$\left\{ \dots \right\} = \log \left(\frac{c_1 c}{a \omega_p} \right) \quad (4.27)$$

e quindi

$$I_{\Gamma_2} = -\Re \int_0^{\pi/2} \omega_p^2 \log \left(\frac{c_1 c}{a \omega_p} \right) d\phi = \frac{\pi}{2} \omega_p^2 \log \left(\frac{c_1 c}{a \omega_p} \right) \quad (4.28)$$

Usando infine Eq. (4.24) si ottiene per Eq. (4.16) l'espressione (ricordiamo che $c_1 \approx 1.12$)

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{>a} = \frac{(ze)^2 \omega_p^2}{c^2} \log \left(\frac{c_1 c}{a \omega_p} \right) \quad (4.29)$$

mentre da una trattazione relativistica microscopica che trascura l'effetto del mezzo si otterrebbe (vedi Eq. (4.13))

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{(ze)^2\omega_p^2}{c^2} \log\left(\frac{\hbar c_1 c \gamma}{aI}\right) \quad (4.30)$$

quindi l'effetto del mezzo è di eliminare il γ dall'argomento del logaritmo e sostituire la frequenza caratteristica atomica $\frac{I}{\hbar}$ con la frequenza di plasma ω_p .

5 Perdita di energia di monopoli magnetici

Se si volesse calcolare la perdita di energia di un monopolo magnetico il calcolo potrebbe essere effettuato in modo analogo, solo partendo dalle equazioni di Maxwell modificate alla Dirac:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_m & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_e \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_e & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove si è indicato con ρ_e la densità di carica elettrica, con ρ_m la densità di carica magnetica ed analogamente per \mathbf{j}_e e \mathbf{j}_m . L'unica differenza notevole a cui prestare attenzione è nel calcolo della potenza: si verifica facilmente che si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{H} - \mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E} \quad (5.2)$$

dove $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ è il vettore di Poynting. Quindi la potenza dissipata è $-\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{H}$. Procedendo in modo analogo a come fatto in precedenza si ottiene nuovamente una formula del tipo di Eq. (3.15), solo con $\Im(-1/\epsilon)$ sostituito da $\Im(-1/\mu)$.

Poichè per la gran parte dei materiali si ha $\mu \approx 1$ si otterrebbe che i monopoli non perdono energia tramite ionizzazione. Questo risultato è dovuto al fatto che la formula Eq. (3.15) è stata ottenuta nell'approssimazione non relativistica $c \rightarrow \infty$ e la perdita di energia nel caso dei monopoli magnetici è puramente relativistica: la forza di Lorentz scompare per $c \rightarrow \infty$.

Un metodo per calcolare la perdita di energia per ionizzazione potrebbe essere quello di partire dalla espressione relativistica Eq. (4.1)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} &= \frac{2}{\pi} \frac{(ze)^2}{v^2} \Re \int_0^\infty i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\epsilon(\omega)} - \mu(\omega) \beta^2 \right) d\omega \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \epsilon(\omega)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

e notare che le equazioni di Maxwell sono invarianti sotto le sostituzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\rightarrow \mathbf{D} & \mathbf{D} &\rightarrow -\mathbf{B} \\ \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{E} & \mathbf{E} &\rightarrow -\mathbf{H} \\ \mathbf{j}_m &\rightarrow \mathbf{j}_e & \mathbf{j}_e &\rightarrow -\mathbf{j}_m \\ \rho_m &\rightarrow \rho_e & \rho_e &\rightarrow -\rho_m \\ \mu &\rightarrow \epsilon & \epsilon &\rightarrow \mu \end{aligned} \quad (5.4)$$

quindi nel caso magnetico si ottiene [11]

$$\begin{aligned} \left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} &= \frac{2}{\pi} \frac{g^2}{v^2} \Re \int_0^\infty i\omega \lambda^* a K_1(\lambda^* a) K_0(\lambda a) \left(\frac{1}{\mu(\omega)} - \epsilon(\omega) \beta^2 \right) d\omega \\ \lambda^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} [1 - \beta^2 \mu(\omega)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove g è la carica magnetica del monopolo ed a è una lunghezza che per i nostri scopi può essere posta uguale alle dimensioni tipiche atomiche.

Se si considera il caso di un materiale non magnetico ($\mu \equiv 1$), allora λ è reale

$$\lambda = \frac{\omega}{v\gamma} \quad (5.6)$$

e l'equazione Eq. (5.5) si riduce a

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{2g^2}{\pi c^2} \int_0^\infty \omega \lambda a K_1(\lambda a) K_0(\lambda a) \Im(\epsilon(\omega)) d\omega \quad (5.7)$$

e la dipendenza $1/v^2$ scompare. Se si sviluppano le funzioni di Bessel per piccoli valori della variabile usando

$$x \ll 1 \quad K_0(x) \approx \log\left(\frac{c_1}{x}\right) \quad c_1 \approx 1.12 \quad K_1(x) \approx \frac{1}{x} \quad (5.8)$$

si trova

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{2g^2}{\pi c^2} \int_0^\infty \omega \log\left(\frac{c_1 v \gamma}{a\omega}\right) \Im(\epsilon(\omega)) d\omega \quad (5.9)$$

Se ora si considera la funzione dielettrica data da Eq. (4.17), considerato che l'integrale in Eq. (5.9) è esteso solo a $\omega > 0$, si vede che

$$\Im(\epsilon(\omega)) \approx \frac{2\pi^2 e^2 N}{m} \sum f_j \frac{\delta(\omega_j - \omega)}{\omega} \quad (5.10)$$

e quindi

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a} = \frac{4\pi g^2 e^2 N}{mc^2} \sum f_j \log\left(\frac{c_1 v \gamma}{a\omega_j}\right) \quad (5.11)$$

Ricordando che

$$\sum f_j = Z \quad \log(I/\hbar) = \frac{\sum f_j \log(\omega_j)}{\sum f_j} \quad (5.12)$$

si ottiene infine

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a}^{magn} = 4\pi N \frac{Zg^2 e^2}{mc^2} \log\left(\frac{c_1 \hbar v \gamma}{aI}\right) \quad (5.13)$$

che è la analoga della equazione Eq. (4.13) (ottenuta trascurando l'effetto densità)

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a}^{el} = 4\pi N \frac{Zz^2 e^4}{mv^2} \log\left(\frac{c_1 \hbar v \gamma}{aI}\right) \quad (5.14)$$

In particolare si vede che per $v \approx c$ si ha

$$\frac{\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a}^{magn}}{\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx}\right)_{>a}^{el}} = \frac{g^2}{(ze)^2} \quad (5.15)$$

Un modo intuitivo [12] per passare dalla Eq. (5.14) alla Eq. (5.13) è il seguente: la forza esercitata da un monopolo di carica g in moto con velocità v su un elettrone fermo è

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \sim eg \frac{v}{c} \frac{1}{r^2} \quad (5.16)$$

mentre la forza esercitata da una particella di carica elettrica ze su un elettrone fermo è

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} \sim \frac{ze^2}{r^2} \quad (5.17)$$

quindi le formule magnetiche posso essere ottenute dalle corrispondenti formule elettriche con la sostituzione

$$ze \rightarrow \frac{gv}{c} \quad (5.18)$$

Questo stesso metodo può essere applicato anche al caso di velocità molto piccole: in questo caso si deve considerare la forza esercitata da un monopolo fermo su un elettrone con velocità v_F , quindi

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \sim eg \frac{v_F}{c} \frac{1}{r^2} \quad (5.19)$$

e quindi la regola di sostituzione è in questo caso

$$ze \rightarrow \frac{gv_F}{c} \quad (5.20)$$

quindi dal caso elettrico Eq. (3.39)

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^{el} = \frac{4}{3} \frac{z^2 e^4 m^2 v}{\pi \hbar^3} \log \sqrt{\frac{e^2}{\hbar v_F}} \quad (5.21)$$

si ottiene per il caso magnetico [13]

$$\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)^{magn} = \frac{4}{3} \frac{g^2 e^2 m^2 v v_F^2}{\pi \hbar^3 c^2} \log \sqrt{\frac{e^2}{\hbar v_F}} \quad (5.22)$$

e quindi

$$\frac{\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{>a}^{magn}}{\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dx} \right)_{>a}^{el}} = \frac{g^2}{(ze)^2} \frac{v_F^2}{c^2} \quad (5.23)$$

Vediamo ora quali sono le limitazioni poste dalla meccanica quantistica sulla carica di un monopolo: a livello classico le equazioni del moto si scrivono in termini dei campi elettrici e magnetici e l'introduzione di un monopolo magnetico non crea problemi. A livello quantistico nell'equazione di Schrodinger compaiono il potenziale scalare ϕ ed il potenziale vettore \mathbf{A} (nel seguito considereremo per semplicità sempre il caso $\phi = 0$) e la hamiltoniana di una particella di massa m e carica elettrica e si scrive come

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \quad (5.24)$$

quindi l'oggetto fondamentale è il potenziale vettore. D'altra parte da $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ segue che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e quindi non possono esistere monopoli magnetici. L'introduzione dei monopoli magnetici si basa su un allentamento delle condizioni di regolarità del potenziale vettore: consideriamo ad esempio il campo

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{g}{r} \left(\frac{-y}{r-z}, \frac{x}{r-z}, 0 \right) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (5.25)$$

è semplice vedere che, se si effettuano le derivate senza particolari attenzioni alle singolarità, si ottiene

$$\mathbf{B}^{naive} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.26)$$

cioè esattamente il campo del monopolo. È quindi chiaro che è necessario analizzare con cura le singolarità. Un modo per regolarizzare le singolarità è utilizzare la sostituzione $r \rightarrow R = \sqrt{r^2 + \epsilon^2}$, effettuare il calcolo e nel risultato finale mandare $\epsilon \rightarrow 0$. Il calcolo completo non è difficile, tuttavia è più semplice procedere come segue: il potenziale Eq. (5.25) è singolare solo nell'origine e sull'asse z positivo, quindi lontano dalle singolarità il risultato "naive" deve coincidere con il risultato corretto. Oltre al campo "naive" può però essere presente una singolarità della forma $f(r)\Theta(z)\delta(x)\delta(y)$. La

funzione $f(r)$ si determina imponendo che il flusso totale del campo magnetico sia nullo (questa proprietà è vera per ogni $\epsilon > 0$ e deve quindi sopravvivere al limite $\epsilon \rightarrow 0$). Calcolando il flusso su una sfera di raggio ρ del campo

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} + f(r)\Theta(z)\delta(x)\delta(y) \quad (5.27)$$

ed imponendo che il risultato sia nullo si ottiene subito

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4\pi g \Theta(z)\delta(x)\delta(y) \quad (5.28)$$

che è il campo magnetico corrispondente al potenziale vettore Eq. (5.25). Il termine singolare del campo magnetico è noto come stringa di Dirac ed il campo Eq. (5.28) non è evidentemente il campo magnetico di un monopolo. Tuttavia si vedrà che per alcuni valori della carica magnetica g , la stringa di Dirac non ha alcun effetto sulla dinamica quantistica di una particella carica, quindi il campo Eq. (5.28) è, per alcuni valori di g , equivalente al campo di un monopolo magnetico.

La condizione da imporre su g si chiama condizione di quantizzazione di Dirac e può essere dedotta in molti modi diversi (vedi ad es. §2.6 di [14] e [15]). Vediamo preliminarmente come una soluzione dell'equazione di Schrodinger associata alla hamiltoniana Eq. (5.24) con $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ possa essere ottenuta senza difficoltà dalla soluzione corrispondente al caso $\mathbf{A} = 0$: introduciamo la funzione

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}S\right) \quad S = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{e}{c} \mathbf{A} d\mathbf{s} \quad (5.29)$$

dove ψ_0 è una soluzione dell'equazione di Schrodinger con $\mathbf{A} = 0$ (il fatto che $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ serve per fare in modo che la funzione ψ non dipenda dal cammino di integrazione). Verifichiamo ora che ψ è soluzione dell'equazione di Schrodinger associata all'hamiltoniana Eq. (5.24):

$$\mathbf{p}\psi = e^{-iS/\hbar}(-i\hbar\nabla)\psi_0 + \frac{e}{c}\mathbf{A}e^{-iS/\hbar}\psi_0 \quad (5.30)$$

quindi

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi = e^{-iS/\hbar}\mathbf{p}\psi_0 \quad (5.31)$$

e procedendo analogamente si ottiene

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = e^{-iS/\hbar}\mathbf{p}^2\psi_0 \quad (5.32)$$

quindi da $\mathbf{p}^2\psi_0 = 2mE\psi_0$ segue

$$\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi = E\psi \quad (5.33)$$

Applichiamo ora la formula precedente al caso di due particelle cariche che passano una a sinistra ed una a destra della stringa. Queste due particelle acquisite fasi diverse, secondo la Eq. (5.29) e la condizione di Dirac si ottiene imponendo che la differenza di fase dovuta esclusivamente alla stringa sia nulla, cioè la stringa sia invisibile in un esperimento di interferenza. Questa condizione si scrive

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \oint \mathbf{A}^{string} d\mathbf{s} = 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.34)$$

Utilizzando il teorema di Stokes ed il termine singolare del campo magnetico Eq. (5.28) si ottiene la condizione di quantizzazione di Dirac:

$$2 \frac{eg}{\hbar c} = n \quad (5.35)$$

cioè il prodotto eg è quantizzato. In particolare l'esistenza di un monopolo magnetico sarebbe in grado di spiegare la quantizzazione della carica elettrica in multipli interi della carica elementare elettronica.

Per avere una idea dei numeri che compaiono a secondo membro delle equazioni Eq. (5.15) e Eq. (5.23) consideriamo il caso base $n = 1$, nel qual caso si ottiene

$$\frac{g}{e} = \frac{\hbar c}{2e^2} \approx \frac{137}{2} \quad (5.36)$$

quindi la perdita di energia per ionizzazione di un monopolio con velocità $v \approx c$ è attesa essere circa 4 ordini di grandezza maggiore di quella di una particella carica con la stessa velocità. Nel caso di piccolissime velocità questa sproporzione è bilanciata dalla presenza del termine $\frac{v_F}{c} \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$.

6 Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irradiata da una carica in moto. Applicazione al decadimento β .

Si seguirà approssimativamente la trattazione delle sezioni §14.5 e 15.6 di [10]. Ricordiamo che il campo generato da una carica e in moto secondo la legge oraria $\mathbf{s}(t)$ può essere ottenuto dai potenziali di Lienardt-Wiechert

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{e}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})R} \right]_{ret} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{e\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})R} \right]_{ret} \quad (6.1)$$

dove

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{s}| \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{s}}{R} \quad (6.2)$$

ed il pedice *ret* significa che le espressioni tra parentesi quadre devono essere valutate al tempo t_{ret} dato dall'equazione

$$t = t_{ret} + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_{ret})| \quad (6.3)$$

I campi elettrico e magnetico corrispondenti al potenziale Eq. (6.1) possono essere decomposti in un termine coulombiano, di andamento $\sim 1/R^2$, ed uno di radiazione, di andamento $\sim 1/R$. In questa sezione saremo interessati solo ai termini di radiazione, che possono essere scritti nella forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^3 R} \right]_{ret} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}_{ret} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.4)$$

quindi sia \mathbf{E} che \mathbf{B} sono trasversi ed il vettore di Poynting è dato da

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}_{ret} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}_{ret} |\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (6.5)$$

Introduciamo ora per comodità il vettore $\mathbf{C}(\mathbf{r}, t)$ definito da

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R_{ret} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (6.6)$$

allora l'energia totale irradiata dell'angolo solido $d\Omega$ è data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{C}(\mathbf{r}, t)|^2 dt \quad (6.7)$$

Se ora definiamo la trasformata di Fourier temporale utilizzando le convenzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt \\ \mathbf{C}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (6.8)$$

allora dal teorema di Parsefall segue che

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} (|\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega)|^2 + |\mathbf{C}(\mathbf{r}, -\omega)|^2) d\omega \quad (6.9)$$

inoltre, poichè \mathbf{E} è reale, si ha $\mathbf{C}(\mathbf{r}, -\omega) = \mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega)^*$, quindi per l'energia irraggiata per unità di angolo solido e di frequenza si ottiene l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = 2|\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \quad (6.10)$$

Utilizzando per il campo elettrico l'espressione Eq. (6.4), il vettore \mathbf{C} si scrive esplicitamente nella forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^3} \right]_{ret} dt \quad (6.11)$$

cambiando variabile da t a t_{ret} ed usando

$$dt = [1 - \mathbf{n}(t_{ret})\boldsymbol{\beta}(t_{ret})] dt_{ret} \quad (6.12)$$

questa equazione si riscrive nella forma (d'ora in poi, non essendoci possibilità di confusione, indicheremo per semplicità t_{ret} semplicemente con t)

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[t+R(t)/c]} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^2} dt \quad (6.13)$$

Poichè per valutare la perdita di energia per irraggiamento si deve avere $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{s}|$, si può supporre il vettore \mathbf{n} indipendente dal tempo ed approssimare $R(t)$ con

$$R(t) \approx |\mathbf{r}| - \mathbf{n}\mathbf{s}(t) \quad (6.14)$$

ottenendo quindi, a meno di una fase inessenziale, l'espressione

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\frac{e^2}{8\pi^2 c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[t-\mathbf{n}\mathbf{s}(t)/c]} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^2} dt \quad (6.15)$$

e quindi dall'espressione Eq. (6.10) si ottiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[t-\mathbf{n}\mathbf{s}(t)/c]} \frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^2} dt \right|^2 \quad (6.16)$$

Risulta inoltre utile osservare che si ha

$$\frac{\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{n})^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} \right) \quad (6.17)$$

ottenendo infine l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{8\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[t-\mathbf{n}\mathbf{s}(t)/c]} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} \right) dt \right|^2 \quad (6.18)$$

Nel caso in cui si sia interessati solo all'energia irraggiata con una data polarizzazione $\boldsymbol{\epsilon}$ del campo elettrico si può usare, invece del vettore \mathbf{C} definito dall'equazione Eq. (6.16), lo scalare C definito da

$$C(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{c}{4\pi}} R_{ret} |\boldsymbol{\epsilon}^* \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)| \quad (6.19)$$

in modo da eliminare tutte le componenti con polarizzazione ortogonale ad $\boldsymbol{\epsilon}$. Notando che la polarizzazione deve sempre essere ortogonale al vettore di propagazione \mathbf{n} ($\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{n} = 0 = \boldsymbol{\epsilon}^*\mathbf{n}$ poichè \mathbf{n} è reale), l'espressione Eq. (6.18) diviene quindi (ricordiamo che $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[t - \mathbf{n}\mathbf{s}(t)/c]} \frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \boldsymbol{\beta}}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} \right) dt \right|^2 \quad (6.20)$$

Consideriamo ora il caso di un processo fisico caratterizzato da una frequenza tipica ω_0 ed analizziamo il limite $\omega \ll \omega_0$ dell'espressione Eq. (6.20). In questo limite si può approssimare

$$e^{i\omega[t - \mathbf{n}\mathbf{s}(t)/c]} \approx 1 \quad (6.21)$$

e quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \boldsymbol{\beta}_1}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}_1} - \frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \boldsymbol{\beta}_2}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}_2} \right|^2 \quad (6.22)$$

dove $\boldsymbol{\beta}_1$ e $\boldsymbol{\beta}_2$ sono i valori di $\boldsymbol{\beta}$ rispettivamente a $t = -\infty$ e $t = +\infty$.

Un modo più diretto di arrivare a questo risultato è il seguente (tratto §69 di [16]): se utilizziamo come punto di partenza l'espressione Eq. (6.5) nella versione magnetica, si ha

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = 2 \frac{c}{4\pi} R^2 |\boldsymbol{\epsilon}_B^* \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \quad (6.23)$$

dove $\boldsymbol{\epsilon}_B$ è la polarizzazione del campo magnetico (il 2 è lo stesso di Eq. (6.10)), inoltre a grande distanza il potenziale vettore è localmente una onda piana, quindi si può usare

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = ik\mathbf{n} \times \mathbf{A} = i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} \quad (6.24)$$

quindi, nel limite $\omega \rightarrow 0$, si ha

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dt \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dt = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) \times \mathbf{n} \quad (6.25)$$

Utilizzando per \mathbf{A} l'espressione Eq. (6.1), notando che da Eq. (6.4) segue che $\boldsymbol{\epsilon}_B = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}$ e che $(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\epsilon}^*)(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\epsilon}^* \boldsymbol{\beta}$ si riottiene Eq. (6.22).

Consideriamo ora una applicazione fisica particolarmente immediata della formula Eq. (6.22): il caso in cui una particella passa "istantaneamente" da velocità nulla a velocità \mathbf{v} . Questo caso si verifica ad esempio in un decadimento debole, in cui un nucleo di numero atomico Z decade come segue

$$Z \rightarrow (Z \pm 1) + e^{\mp} + \overset{(-)}{\nu} \quad (6.26)$$

Trascurando il rinculo del nucleo, il processo precedente è equivalente, dal punto di vista elettromagnetico, all'accelerazione di un elettrone (o positrone) da velocità nulla alla sua velocità finale nel tempo τ_0 del decadimento. Le energie caratteristiche di questo processo sono dell'ordine del MeV, quindi il tempo caratteristico in cui avviene il decadimento (questo non è il tempo di vita medio, che è il tempo medio da attendere prima che il decadimento avvenga) è $\tau_0 = \hbar/E$ con $E \sim 1\text{MeV}$, quindi

$$\tau_0 \sim 200 \frac{\text{fm}}{c} \sim 200 \frac{10^{-15} \text{m}}{3 \times 10^8 \text{m/s}} \sim 10^{-21} \text{s} \quad (6.27)$$

Per questo processo $\omega_0 \approx E/\hbar$ e Eq. (6.22) si riduce a

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{\boldsymbol{\epsilon}^* \boldsymbol{\beta}}{1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\beta}} \right|^2 \quad (6.28)$$

Ricordando che $\boldsymbol{\epsilon}$ è ortogonale alla direzione di osservazione \boldsymbol{n} , si vede che affinché il secondo membro dell'equazione precedente non sia nullo la radiazione emessa deve essere polarizzata linearmente nel piano contenente la velocità di emissione $\boldsymbol{\beta}$ e la direzione di osservazione \boldsymbol{n} . In coordinate sferiche la distribuzione dell'energia irraggiata è data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \quad (6.29)$$

dove θ è l'angolo tra $\boldsymbol{\beta}$ e \boldsymbol{n} e $\pi/2 - \theta$ è l'angolo tra $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$. Integrando sull'angolo solido si ottiene la distribuzione in frequenza della radiazione emessa

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2 \right] \quad (6.30)$$

che per $\beta \ll 1$ si riduce a $2e^2\beta^2/(3\pi c)$. L'energia totale irraggiata è approssimativamente ($E = \hbar\omega_0$)

$$\mathcal{E} \approx \int_0^{\omega_0} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega = \frac{e^2}{\pi c \hbar} \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right) - 2 \right] E \quad (6.31)$$

dove E è l'energia dell'elettrone emesso. Considerando il limite ultrarelativistico $E \gg mc^2$, $\beta \rightarrow 1$ si ha

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \beta^2} \approx \frac{m^2 c^4}{2(1 - \beta)} \quad (6.32)$$

e quindi

$$\mathcal{E} = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\pi \hbar} \left[\log \left(\frac{2E}{mc^2} \right) - 1 \right] E \quad (6.33)$$

Usando $\frac{e^2}{\pi \hbar} \approx \frac{1}{137}$ ed il fatto che nei decadimenti più energetici si ha $E \approx 30mc^2$ si vede che $\mathcal{E}/E \lesssim 0.015$.

7 Bremsstrahlung

Una descrizione accurata della perdita di energia di una particella carica per emissione di radiazione in elettrodinamica classica è esposta in [10] cap. 15; questa trattazione risulta non banale e comunque richiede alcune correzioni *ad hoc* per ottenere i risultati dell'elettrodinamica quantistica. In vista di queste difficoltà ci si limiterà ad un approccio semi-quantitativo, seguendo la trattazione di [17] §II.3.

Considereremo il caso dello scattering di un elettrone su un nucleo di carica Ze e ci limiteremo al caso di un elettrone ultrarelativistico, con $v \approx c$. Per effettuare il calcolo si seguirà il seguente schema:

- si passerà al sistema in cui l'elettrone è inizialmente in quiete
- si calcoleranno le caratteristiche del campo elettromagnetico corrispondente al nucleo in moto
- si otterrà la corrispondente densità di fotoni
- si calcolerà la probabilità di scattering (Thompson) di questi fotoni sull'elettrone
- si ritornerà al sistema di laboratorio

e considereremo per semplicità il caso di un nucleo infinitamente massivo. Questo metodo è chiaramente approssimato, tuttavia permette di descrivere in modo semplice un processo in cui c'è creazione di radiazione tramite un altro processo in cui c'è solo diffusione di radiazione.

Si vedrà tra breve che, nel limite ultrarelativistico, il campo elettromagnetico generato da una particella carica in moto è analogo a quello di una onda elettromagnetica. Il motivo per cui si

passa al sistema di riferimento in cui l'elettrone è inizialmente in quiete è che si vuole effettuare il calcolo nella approssimazione "particella incidente" = "onda elettromagnetica" e "bremsstrahlung" = "radiazione diffusa dalla altra particella": nel sistema in cui l'elettrone è inizialmente in quiete, il nucleo si muove di moto rettilineo uniforme, quindi il processo può essere pensato come

$$\text{onda elettromagnetica} + e \rightarrow \text{componente diffusa} + \text{componente non scatterata} + e$$

dove l'elettrone finale è in moto, la componente non scatterata dell'onda elettromagnetica rappresenta il nucleo che si allontana in moto rettilineo uniforme e la componente scatterata è il bremsstrahlung. Questa descrizione non sarebbe consistente nel sistema di riferimento in cui il nucleo è fermo poichè la traiettoria dell'elettrone non è rettilinea, quindi non si potrebbe interpretare la componente di radiazione non diffusa come la particella che si allontana. A questo si deve aggiungere che la sezione d'urto Thompson è proporzionale all'inverso del quadrato della massa del centro scatteratore, quindi nella approssimazione di nucleo infinitamente massivo non ci sarebbe diffusione.

Indichiamo con un asterisco i valori calcolati nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone. In questo sistema di riferimento il nucleo ha velocità \mathbf{v} e considereremo uno scattering con parametro d'impatto \mathbf{b} . I campi elettrici e magnetici sono dati dalle espressioni (vedi (2.39)-(2.41))

$$\mathbf{E}^* = eZ\gamma \frac{\mathbf{b} + \mathbf{v}t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad \mathbf{B}^* = \frac{eZ\gamma}{c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{v}}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \quad (7.1)$$

inoltre nel seguito si vedrà che il risultato finale dipende dall'energia incidente per unità di superficie ed è semplice vedere che la componente di \mathbf{E}^* parallela alla velocità contribuisce con un termine $\sim 1/\gamma$ mentre le altre componenti con un termine $\sim \gamma$, quindi la componente parallela, nel limite $v \rightarrow c$, è trascurabile¹. Nel limite ultrarelativistico si può quindi approssimare il campo Eq. (7.1) con

$$\mathbf{E}^* = eZ\gamma \frac{\mathbf{b}}{(b^2 + \gamma^2 c^2 t^2)^{3/2}} \quad \mathbf{B}^* = eZ\gamma \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{(b^2 + \gamma^2 c^2 t^2)^{3/2}} \quad (7.2)$$

dove \mathbf{n} è il versore di \mathbf{v} . Questo campo ha la esattamente la forma di una onda elettromagnetica: $\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}^* \propto \mathbf{n}$. Per un calcolo semi-quantitativo è sufficiente notare che questo campo ha intensità

$$|\mathbf{E}^*| = |\mathbf{B}^*| \approx \frac{\gamma Z e}{b^2} \quad (7.3)$$

ed agisce per un tempo caratteristico

$$\Delta T^* \approx \frac{b}{\gamma c} \quad (7.4)$$

La densità di energia per unità di volume è data da

$$\frac{|\mathbf{E}^*|^2 + |\mathbf{B}^*|^2}{8\pi} \approx \frac{Z^2 e^2 \gamma^2}{b^4} \quad (7.5)$$

e quindi l'energia incidente per unità di superficie è

$$\frac{Z^2 e^2 \gamma^2}{b^4} \Delta X^* = \frac{Z^2 e^2 \gamma^2}{b^4} c \Delta T^* = \frac{Z^2 e^2 \gamma}{b^3} \quad (7.6)$$

Questa energia è distribuita tra le varie frequenze ν^* della radiazione. La trasformata di Fourier dei campi Eq. (7.2) può essere scritta esplicitamente, in termini di funzioni di Bessel, tuttavia per i nostri scopi è sufficiente notare che le componenti dominanti saranno quelle dell'intervallo $[0, \nu_{max}^*]$, con

$$\nu_{max}^* \approx \frac{1}{\Delta T^*} = \frac{\gamma c}{b} \quad (7.7)$$

¹La parte trasversale contribuisce con $\int_{-\Delta T^*}^{\Delta T^*} \gamma^2 dt \approx \gamma^2 \Delta T^*$, la parte longitudinale con $\int_{-\Delta T^*}^{\Delta T^*} \gamma^2 t^2 dt \approx \gamma^2 (\Delta T^*)^3$. Vedi poi (7.4).

ed approssimare la distribuzione spettrale dell'energia incidente con una funzione a gradino. Ricordando che l'energia di un fotone di frequenza ν^* è data da $h\nu^*$, il numero di fotoni per unità di superficie con frequenza nell'intervallo $d\nu^*$ centrato in ν^* può essere approssimato con

$$N(\nu^*)d\nu^* = \begin{cases} \frac{Z^2 e^2 \gamma}{b^3 \nu_{max}^*} d\nu^* \frac{1}{h\nu^*} & \nu^* < \nu_{max}^* \\ 0 & \nu^* > \nu_{max}^* \end{cases} \quad (7.8)$$

Il numero medio di processi di scattering per fotoni con frequenza ν^* con parametro di impatto b è dato dal prodotto della sezione d'urto Thompson per il numero di fotoni con frequenza ν^* e parametro d'impatto b , cioè (usando Eq. (7.8) e Eq. (7.7))

$$\frac{Z^2 e^2}{chb^2} \frac{d\nu^*}{\nu^*} \sigma_T(\nu^*) \quad (7.9)$$

Il numero totale di fotoni scatterati per unità di frequenza è quindi

$$\Sigma(\nu^*)d\nu^* \approx \frac{Z^2 e^2}{ch} \frac{d\nu^*}{\nu^*} \sigma_T(\nu^*) \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b^2} 2\pi b db = 2\pi \frac{Z^2 e^2}{ch} \frac{d\nu^*}{\nu^*} \sigma_T(\nu^*) \log\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) \quad (7.10)$$

A questo punto è necessario determinare i parametri di impatto massimo e minimo. Una prima limitazione su parametro massimo viene dalla espressione Eq. (7.7): per $b > b'_{max} = c\gamma/\nu^*$, la frequenza ν^* non è presente nel pacchetto e quindi non può contribuire allo scattering. Un secondo limite è che b deve essere minore delle dimensioni tipiche atomiche, altrimenti la carica del nucleo è schermata dagli elettroni e la carica efficace è nulla; questa condizione impone $b''_{max} \approx a_0/Z^{1/3}$ (approssimazione di Thomas-Fermi, vedi ad esempio [5] §70). Poichè siamo interessati al caso ultrarelativistico $\gamma \gg 1$, tipicamente $b'_{max} \gg b''_{max}$, quindi il corretto limite superiore è $b_{max} = b''_{max}$.

La condizione su b_{min} è che il parametro di impatto deve essere maggiore della dimensione elettrodinamica tipica dell'elettrone, che è la sua lunghezza d'onda Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$, quindi

$$\frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{a_0}{\lambda_c Z^{1/3}} \approx \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{mc}{\hbar} \frac{1}{Z^{1/3}} = \frac{\hbar c}{e^2} \frac{1}{Z^{1/3}} \approx \frac{137}{Z^{1/3}} \quad (7.11)$$

La sezione d'urto Thompson è data da

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad r_e = \frac{e^2}{mc^2} \quad (7.12)$$

ed inserendo queste espressioni nell'equazione Eq. (7.10) si ottiene (a meno di alcuni fattori numerici)

$$\Sigma(\nu^*)d\nu^* = 4Z^2 \frac{e^2}{c\hbar} r_e^2 \log\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \frac{d\nu^*}{\nu^*} \quad (7.13)$$

Il cambio di riferimento finale si ottiene usando la legge di trasformazione delle frequenze:

$$\nu = \frac{1 + \beta \cos \theta^*}{\sqrt{1 - \beta^2}} \nu^* \quad (7.14)$$

e quindi

$$\frac{d\nu}{\nu} = \frac{d\nu^*}{\nu^*} \quad (7.15)$$

Notiamo ora che l'uso della sezione d'urto Thomson è giustificato se $h\nu^* \lesssim mc^2$. Usando Eq. (7.14) si ha $\nu \approx \gamma\nu^*$ e quindi $h\nu^* \lesssim mc^2$ corrisponde a $h\nu \lesssim mc^2\gamma$, cioè al fatto che l'elettrone non può irraggiare più della sua energia. Utilizzando Eq. (7.15), si ottiene infine

$$\Sigma(\nu)d\nu = 4Z^2 \frac{e^2}{c\hbar} r_e^2 \log\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \frac{d\nu}{\nu} \quad (7.16)$$

La perdita di energia per unità di lunghezza in un mezzo con densità numerica N è quindi data da

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = N \int_0^{E/\hbar} h\nu \Sigma(\nu) d\nu = 4Z^2 \frac{e^2}{c\hbar} r_e^2 N E \log\left(\frac{183}{Z^{1/3}}\right) \quad (7.17)$$

dove E è l'energia dell'elettrone. Quindi la perdita di energia è lineare nell'energia, proporzionale a Z^2 (e non Z come per la formula di Bethe) e proporzionale a $\frac{1}{m^2}$, dove m è la massa della particella che perde energia.

8 Teoria di Fermi del decadimento β e massa del neutrino

Il punto di partenza per calcolare la probabilità di transizione per unità di tempo dovuta ad una data interazione è la regola d'oro di Fermi:

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \rho \quad (8.1)$$

dove H_{if} è l'elemento di matrice dell'interazione tra gli stati iniziali e finali e ρ è la densità degli stati finali. Chiaramente la parte di fisica specifica dell'interazione è nascosta nell'elemento di matrice.

La assunzione di base della teoria di Fermi del decadimento β (e più in generale dell'interazione debole) è di supporre una interazione di contatto: se indichiamo con u_i e u_f gli stati nucleari prima e dopo il decadimento e con ψ_e e $\psi_{\bar{\nu}}$ le funzioni d'onda dell'elettrone e dell'antineutrino, questo significa supporre

$$H_{if} = g \int \psi_e^*(\mathbf{r}) \psi_{\bar{\nu}}^*(\mathbf{r}) u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (8.2)$$

dove g è una costante. Poichè le funzioni d'onda nucleari sono localizzate l'integrale è praticamente esteso al volume occupato dal nucleo. L'elemento di matrice H_{if} , essendo elemento di matrice della hamiltoniana, ha le dimensioni di una energia, MeV, mentre le dimensioni del secondo membro di Eq. (8.2) sono $[g]/\text{fm}^3$, quindi la costante g è dimensionata con dimensioni

$$[g] = \text{MeV fm}^3 \quad (8.3)$$

Per procedere oltre consideriamo per le funzioni d'onda dell'elettrone e dell'antineutrino le seguenti onde piane

$$\psi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_e \mathbf{r}} \quad \psi_{\bar{\nu}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_{\bar{\nu}} \mathbf{r}} \quad (8.4)$$

e notiamo che, essendo le energie caratteristiche del decadimento debole dell'ordine del MeV, si ha

$$\frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p} \approx \frac{c\hbar}{E} \approx \frac{200 \text{ MeV fm}}{\text{MeV}} = 200 \text{ fm} \quad (8.5)$$

quindi $1/k$ è grande rispetto alle dimensioni tipiche nucleari. Si possono quindi sviluppare gli esponenziali

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}\mathbf{r} + \dots \quad (8.6)$$

e tenere solo il primo termine con contributo non nullo. In questo modo si ottiene una gerarchia di processi a seconda di quale è il primo termine che contribuisce: se questo è 1 si parla di "processo permesso", se è $\mathbf{k}\mathbf{r}$ di processo "primo vietato" e così di seguito. I processi "vietati" non sono chiaramente rigorosamente vietati, sono solo soppressi da potenze più alte in $1/k$ (analogamente a come accade per la radiazione di dipolo, quadrupolo, ottupolo).

Considereremo ora il caso di un processo permesso, per il quale si ha quindi

$$H_{if} = \frac{g}{V} M_{if} \quad (8.7)$$

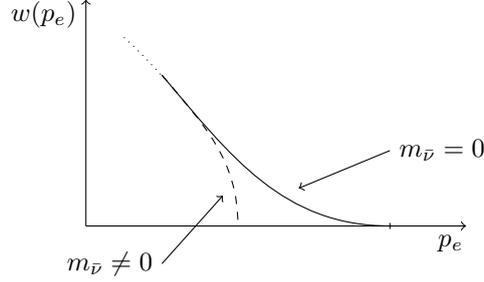


Figura 5: Cambiamento dell'andamento di $w(p_e)$ vicino all'end-point dovuto alla massa del neutrino.

dove M_{if} è l'elemento di matrice nucleare (numero non dimensionato). Si vuole ora calcolare la probabilità che l'elettrone finale abbia un dato impulso. Se si trascura il contributo all'energia del rinculo del nucleo, l'energia totale si scrive

$$E = E_{\bar{\nu}} + E_e = cp_{\bar{\nu}} + \sqrt{m^2c^4 + c^2p_e^2} \quad (8.8)$$

ed il numero degli stati totale (elettrone e antineutrino) è dato da

$$dN_e dN_{\bar{\nu}} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_e^2 dp_e \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_{\bar{\nu}}^2 dp_{\bar{\nu}} \quad (8.9)$$

In questa espressione si possono eliminare $p_{\bar{\nu}}$ e $dp_{\bar{\nu}}$ notando che $cp_{\bar{\nu}} = E - E_e$ e quindi, per p_e costante, si ha $dE = cd p_{\bar{\nu}}$. Quindi la densità degli stati in cui l'elettrone ha impulso p_e indipendentemente dall'impulso del neutrino è

$$\frac{dN_e dN_{\bar{\nu}}}{dE} = \frac{(4\pi)^2 V^2}{c^3 (2\pi\hbar)^6} (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (8.10)$$

e la probabilità di produrre un elettrone con impulso p_e è

$$w(p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{if}|^2 \frac{(4\pi)^2}{c^3 (2\pi\hbar)^6} (E - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (8.11)$$

Se si vuole ottenere la probabilità totale di decadimento Γ , questa espressione deve essere integrata nell'intervallo $0 \leq p_e \leq p_e^{max}$, dove p_e^{max} è l'impulso massimo possibile per l'elettrone. La forma esplicita di Γ non è particolarmente trasparente, tuttavia permette di ottenere per g il valore

$$g \approx 10^{-4} \text{MeV fm}^3 \quad (8.12)$$

L'equazione Eq. (8.11) può essere riscritta nella forma

$$w(p_e) dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{if}|^2 \frac{(4\pi)^2}{c^3 (2\pi\hbar)^6} \left(\sqrt{m^2c^4 + c^2(p_e^{max})^2} - \sqrt{m^2c^4 + c^2p_e^2} \right)^2 p_e^2 dp_e \quad (8.13)$$

ed è semplice vedere che per $p \approx 0$ si ha $w(p) \propto p^2$ e che per $p \approx p^{max}$ si ha $w(p) \propto (p - p^{max})^2$.

Fino ad ora si è considerato il caso in cui l'antineutrino avesse massa nulla. Il caso massivo può essere trattato in modo analogo e la principale differenza che si ottiene è l'andamento di $w(p)$ vicino a p^{max} : nel caso di un neutrino massivo, $w(p)$ si avvicina all'asse x con derivata infinita, come mostrato in Fig. (5). Questo è dovuto alla seguente modifica della Eq. (8.10)

$$(E - E_e)^2 \rightarrow (E - E_e) \sqrt{(E - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4} \quad (8.14)$$

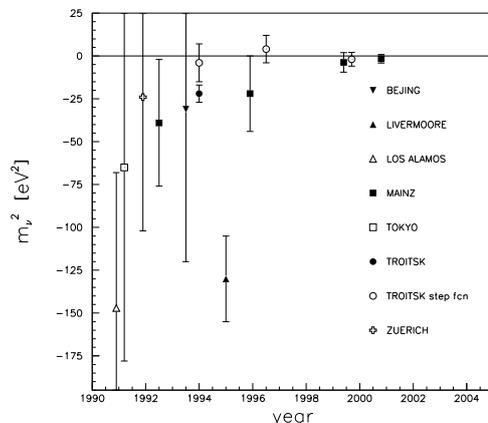


Figura 6: Stime della massa quadra del ν_e ottenute dallo studio del decadimento β del trizio in vari esperimenti degli ultimi 20 anni, da Ch. Kraus et al. Eur. Phys. J. C **40**, 447 (2005).

Poichè la funzione Eq. (8.11) non è visivamente particolarmente trasparente, è di uso comune il cosiddetto plot di Kurie, in cui si grafica $\sqrt{w(p)/p^2}$ in funzione di E_e ; in questo modo la previsione teorica diventa una retta e risulta quindi più semplice individuare deviazioni dovute, ad esempio, alla massa del neutrino.

Gli esperimenti per la rivelazione di una massa finita del neutrino tramite decadimento β sono tipicamente effettuati con la reazione



che ha un tempo di dimezzamento di 12.3 anni. Questa reazione è particolarmente conveniente in quanto

- il trizio è facile da produrre (o economico da comprare)
- il valore Q della reazione è basso: 18.6KeV, rendendo più influente la presenza di una massa del neutrino
- gli stati eccitati del nucleo di 3He hanno energie di eccitazione molto alte e possono quindi essere trascurati

D'altra parte restano notevoli difficoltà sperimentali: poichè l'effetto cercato è legato ad energie $\lesssim 10eV$, sono importanti anche le eccitazioni atomiche, inoltre la coda della distribuzione è chiaramente il punto più difficile da studiare a causa della bassa statistica (pochi eventi).

In pratica tutti i tentativi di misura della massa del neutrino tramite decadimenti deboli hanno sempre portato solo a limiti superiori per la massa stessa (il più preciso attualmente, del 2005, è $m_{\nu_e} < 2.3eV$), non escludendo quindi la possibilità che il neutrino elettronico possa avere massa nulla.

Un chiaro indice della difficoltà di questo tipo di esperimenti è dato dalla figura Fig. (6). Da notare che i valori medi della quasi totalità degli esperimenti cadono nella zona non fisica $m_{\nu_e}^2 < 0$.

9 Effetto Mössbauer

Per fluorescenza di risonanza si intende il processo nel quale la radiazione emessa nel decadimento di uno stato eccitato S^* , che decade nello stato fondamentale S , è assorbita da un sistema nel fondamentale, che viene quindi portato allo stato eccitato S^* . Questo processo può avvenire sia a

livello atomico sia a livello nucleare e la fluorescenza di risonanza nucleare viene tipicamente usata per effettuare misure di estrema precisione sugli spostamenti dei livelli energetici (ad es. il red-shift gravitazionale).

Consideriamo dapprima il caso in cui i sistemi che emettono ed assorbono radiazione siano due nuclei di un gas o di un liquido: in questo caso le scale di energia rilevanti sono

- E_0 : la differenza di energia tra lo stato eccitato ed il fondamentale
- $\Delta E \equiv \alpha E_0$: la differenza di energia che si vuole misurare
- Γ : la larghezza naturale dello stato eccitato
- E_R : l'energia di rinculo dell'atomo
- T : la temperatura

Alcuni valori tipici sono

- $E_0 \approx 1\text{eV}$ (caso atomico) e $E_0 \approx 100\text{KeV}$ (caso nucleare)
- $\alpha \approx 10^{-15}$ (caso del red-shift gravitazionale)
- $\Gamma \approx 10^{-7}\text{eV}$ (caso atomico, transizioni ottiche) e $\Gamma \approx 10^{-11} \div 10^{-4}\text{eV}$ (caso nucleare)

Affinchè lo spostamento dei livelli risulti osservabile deve essere naturalmente soddisfatta la condizione

$$\Delta E = \alpha E_0 \gtrsim \Gamma \quad (9.1)$$

da cui si vede che nel caso atomico non c'è speranza di osservare l'effetto del red-shift gravitazionale, mentre nel caso nucleare si.

Per procedere oltre passeremo ora al calcolo di E_R : consideriamo un atomo in uno stato eccitato di energia E_e in moto con velocità v che decade nel fondamentale (energia E_g), allora si ha

$$\begin{aligned} mv &= \frac{E_\gamma}{c} + m(v - v_R) \\ E_e + \frac{1}{2}mv^2 &= E_g + E_\gamma + \frac{1}{2}m(v - v_R)^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

dove E_γ è l'energia del fotone emesso e v_R è la velocità di rinculo. Si ha quindi

$$E_\gamma = E_0 - E_R + E_D \quad (9.3)$$

dove

$$E_R = \frac{1}{2}mv_R^2 = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} \approx \frac{E_0^2}{2mc^2} \quad (9.4)$$

e

$$E_D = mvv_R = \frac{v}{c}E_\gamma \approx \frac{v}{c}E_0 \quad (9.5)$$

Nell'equazione (9.3) E_R è l'energia dell'atomo che rincula, mentre E_D è lo spostamento Doppler².

Consideriamo per un momento il caso in cui la velocità iniziale sia nulla: affinché vi sia fluorescenza di risonanza le distribuzioni di emissione e di assorbimento devono essere parzialmente sovrapposte, quindi deve essere soddisfatta la condizione

$$2E_R \lesssim \Gamma \quad (9.6)$$

²Se si fosse tenuto conto anche del fatto che la massa dello stato eccitato è diversa dalla massa del fondamentale ($\Delta m = E_0/c^2$) nel calcolo dell'energia cinetica si sarebbe ottenuto il contributo Doppler al secondo ordine $E_T = -\frac{1}{2}E_0v^2/c^2$, detto shift termico. Tuttavia questo contributo è identico in emissione ed assorbimento, quindi irrilevante ai fini della fluorescenza.

Per un caso tipico nucleare si ha $E_0 \approx 100\text{KeV}$ e $A \approx 100$, quindi $E_R \approx 10^{-1}\text{eV}$, quindi la condizione Eq. (9.6) non potrà mai essere soddisfatta. Un modo per ovviare a questo problema è quello di considerare una sorgente in moto (globale o termico), per bilanciare l'effetto di E_R con E_D , tuttavia è presente anche un secondo problema, non risolvibile in questo modo: a causa della agitazione termica si avrà una distribuzione di velocità di larghezza

$$\delta v \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (9.7)$$

quindi la larghezza della distribuzione di energia del fotone non è la larghezza naturale Γ , ma

$$\Gamma_D \approx \frac{E_0}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (9.8)$$

ricordando che $300\text{K} \approx 1/40\text{eV}$, si vede che ad una temperatura di 1K , per un atomo con $A = 100$, si ha $\delta v \approx c/10^8$ e quindi per un caso nucleare tipico $\Gamma_D \approx 10^{-3}\text{eV}$ rendendo assolutamente non vera la relazione Eq. (9.1)

Nell'esperimento originale di Mössbauer si usò un cristallo di iridio 191, il cui nucleo ha uno stato eccitato con $E_0 = 129\text{KeV}$, $\Gamma \approx 5 \times 10^{-6}\text{eV}$. Per questo processo si ha $\Gamma_D \approx 10^{-2}\text{eV}$ e $E_R \approx 0.05\text{eV}$, quindi la condizione Eq. (9.6) non è soddisfatta (neppure con la sostituzione $\Gamma \rightarrow \Gamma_D$). Cionostante una frazione apprezzabile dei fotoni ($\approx 1\%$) generava fluorescenza di risonanza. Due altri aspetti sorprendenti furono che

- la frazione di fotoni che generavano fluorescenza aumentava diminuendo la temperatura (ovvero diminuendo Γ_D)
- considerando una sorgente in moto con velocità v , il numero dei fotoni risonanti era massimo per $v = 0$ e aveva una larghezza δv corrispondente a una larghezza in energia 2Γ .

Usando il modellino cinetico precedente, tutti questi risultati sono spiegabili assumendo che per qualche motivo il nucleo non rinculi: $v_R = 0$, motivo per cui l'effetto Mössbauer viene talora indicato come "recoilless emission/absorption". La spiegazione di questo fatto risiede in un effetto collettivo del cristallo.

Una spiegazione intuitivamente semplice ma non accurata consiste nel considerare il cristallo come un corpo rigido in cui tutti i nuclei sono completamente fissati. In questo caso il calcolo precedente vale con la sostituzione $m \rightarrow M \approx 10^{23}m$, dove M è la massa del cristallo, quindi $v_R \approx 0$ in quanto viene soppresso dal fattore 10^{23} . Questo modello appare tuttavia completamente irrealistico nella descrizione di tutti i processi fisici dello stato solido, senza considerare che prevederebbe il 100% di probabilità di realizzare la fluorescenza di risonanza usando cristalli.

Un modello realistico consiste nell'approssimare il cristallo come un insieme di atomi ognuno soggetto ad una forza armonica di richiamo. Poichè l'emissione del fotone coinvolge un solo atomo, si può usare, per una descrizione intuitiva dell'effetto Mössbauer, una versione ultrasemplificata: un atomo di massa m collegato tramite un potenziale elastico ad una massa M che rappresenta il resto del cristallo. Se consideriamo il caso in cui entrambe le masse sono inizialmente ferme, Eq. (9.2) diventa

$$\begin{aligned} 0 &= Mv_1 + mv_2 + E_\gamma/c \\ E_e &= E_g + E_\gamma + \frac{M}{2}v_1^2 + \frac{m}{2}v_2^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - a)^2 \end{aligned} \quad (9.9)$$

Dividendo il moto del centro di massa dal moto relativo

$$\begin{aligned} x &= x_2 - x_1 & X &= (Mx_1 + mx_2)/(M + m) \\ M_t &= M + m & \mu &= mM/(m + M) \end{aligned} \quad (9.10)$$

queste equazioni si riscrivono come

$$\begin{aligned} 0 &= M_t V + E_\gamma/c \\ E_0 &= E_\gamma + \frac{M_t}{2}V^2 + \frac{\mu}{2}v^2 + \frac{k}{2}(x - a)^2 \end{aligned} \quad (9.11)$$

quindi si ha

$$E_0 = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2M_t c^2} + E_{int} \quad E_{int} = \frac{\mu}{2} v^2 + \frac{k}{2} (x - a)^2 \quad (9.12)$$

Il termine di rinculo è trascurabile a causa della presenza di M_t a denominatore, mentre E_{int} è l'energia di eccitazione interna del sistema. Se si fosse partiti da un sistema macroscopicamente ma non microscopicamente fermo, al posto della equazione precedente si sarebbe ottenuto

$$E_0 = E_\gamma - \frac{E_\gamma^2}{2M_t c^2} + \Delta E_{int} \quad (9.13)$$

da cui si vede che la caratteristica fondamentale dell'effetto Mössbauer non è la assenza di rinculo, ma il fatto di non cambiare l'energia interna del cristallo. Nel caso classico analizzato, appare chiaro che questo non potrà mai succedere: l'emissione del fotone cambia l'energia interna, in quanto subito dopo l'emissione di un fotone di energia E_γ si avrebbe $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = -E_\gamma/c$, quindi $v \neq 0$. Il caso quantistico è più interessante in quanto i livelli energetici dell'oscillatore armonico sono quantizzati e vi è una probabilità non nulla che in seguito ad una perturbazione il sistema rimanga nello stesso stato in cui era in precedenza, ovvero l'effetto Mössbauer.

Un calcolo quantistico della probabilità di un assorbimento senza cambiamento di energia interna conduce alla formula

$$f = \exp(-E_R/\hbar\omega) \quad (9.14)$$

nel caso del modello di Einstein, in cui tutti gli oscillatori armonici hanno la stessa frequenza ω , ed alla formula

$$f = \exp(-3E_R/2\hbar\omega_D) \quad (9.15)$$

nel caso del modello di Debye, dove ω_D è la frequenza di Debye. Questi risultati sono semplicemente interpretabili: $\hbar\omega$ (o $\hbar\omega_D$ nel caso di Debye) è l'energia caratteristica di una eccitazione elementare del cristallo e E_R è l'energia data dal rinculo dell'atomo. Se $E_R \gg \hbar\omega$ è molto probabile che eccitazioni vengano prodotte, mentre se $E_R \lesssim \hbar\omega$ la probabilità di lasciare inalterata l'energia interna diventa apprezzabile.

Per ottenere l'equazione Eq. (9.14), consideriamo un sistema legato, con funzioni d'onda dei vari livelli energetici $\psi_n(x)$ e supponiamo di applicare una forza impulsiva che trasferisce un impulso k . Il primo passo è vedere la forma delle funzioni d'onda dopo la perturbazione. È comodo passare in trasformata di Fourier, in quanto nello spazio degli impulsi e nella approssimazione impulsiva basterà sostituire $p \rightarrow p + k$. Quindi

$$\psi_n(x) \rightarrow \hat{\psi}_n(p) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ipx} \psi_n(x) dx \quad (9.16)$$

dopo l'urto $\hat{\psi}_n(p) \rightarrow \hat{\psi}_n(p + k)$ e quindi la funzione d'onda finale nello spazio diretto risulta essere

$$\psi_n^{(f)}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx} \hat{\psi}_n(p + k) dp = e^{ikx} \psi_n(x) \quad (9.17)$$

La probabilità di effetto Mössbauer corrisponde alla probabilità che dopo l'urto il sistema rimanga nello stesso stato, quindi

$$P_{n \rightarrow n} = |\langle \psi_n | \psi_n^{(f)} \rangle|^2 = \left| \int |\psi_n(x)|^2 e^{ikx} dx \right|^2 \quad (9.18)$$

Se si considerano funzioni d'onda tali che $|\psi(x)| = |\psi(-x)|$ allora per piccoli trasferimenti di impulso si può sviluppare l'esponenziale, ottenendo (l'integrale di $x|\psi_n(x)|^2$ si annulla)

$$\begin{aligned} P_{n \rightarrow n} &\simeq \left| \int |\psi_n(x)|^2 \left(1 - \frac{1}{2} k^2 x^2 \right) dx \right|^2 = \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \langle x^2 \rangle \right)^2 \\ &= 1 - k^2 \langle x^2 \rangle + o(k^2) \end{aligned} \quad (9.19)$$

Nel caso dello stato fondamentale di un potenziale armonico $|\psi_n(x)|^2$ è una gaussiana e Eq. (9.18) può essere calcolato esplicitamente. Un modo più veloce è ricordare che la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana, quindi $P_{n \rightarrow n}$ deve essere una gaussiana in k ed i coefficienti si fissano imponendo che per k piccoli sia soddisfatta Eq. (9.19):

$$P_{0 \rightarrow 0} = e^{-k^2 \langle x^2 \rangle} \quad (9.20)$$

Il teorema del viriale per un potenziale armonico dice che il valor medio del termine potenziale e quello dell'energia cinetica sono uguali e coincidono con la metà dell'energia totale, che per il fondamentale è $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$, quindi

$$\frac{1}{2} M \omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{1}{4} \hbar \omega \implies \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2M\omega} = \frac{\hbar^2}{2M(\hbar\omega)} \quad (9.21)$$

e quindi infine

$$k^2 \langle x^2 \rangle = \frac{k^2 \hbar^2}{2M(\hbar\omega)} = \frac{E_R}{\hbar\omega} \quad (9.22)$$

10 L'equazione BMT ed il fattore $g - 2$

Consideriamo l'interazione di una particella di spin 1/2 con un campo magnetico \mathbf{B} nel limite non relativistico: il momento di dipolo magnetico deve essere proporzionale allo spin (in quanto sono gli unici due vettori assiali) e nel caso di particelle elementari, dall'equazione di Dirac segue che

$$\hat{H} = -\mu \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{B} \quad (10.1)$$

dove $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ sono le matrici di Pauli e

$$\mu = g \frac{e\hbar}{4mc} \quad g \approx 2 \quad (10.2)$$

Il coefficiente g è noto come fattore giromagnetico. Vediamo ora quale è l'equazione del moto dello spin della particella, $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$: le equazioni di Heisenberg sono

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{s}}] \quad (10.3)$$

ed usando $[\hat{s}_i, \hat{s}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{s}_k$ si ottiene subito

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \frac{2\mu}{\hbar} \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{B} \quad (10.4)$$

Se prendiamo ora il valore di aspettazione sullo stato (che in rappresentazione di Heisenberg è indipendente dal tempo) ed introduciamo la notazione $\mathbf{s} = \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ per denotare il valor medio dello spin *nel sistema di riferimento in cui la particella è (istantaneamente) ferma*, allora \mathbf{s} soddisfa l'equazione

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{2\mu}{\hbar} \mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (10.5)$$

cioè \mathbf{s} precessa intorno a \mathbf{B} con velocità angolare $2\mu/\hbar$. Nel limite non relativistico l'equazione del moto di una particella in un campo magnetico è

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.6)$$

e dal confronto con Eq. (10.5) si vede quindi che se $2\mu/\hbar = e/mc$ (cioè $g = 2$), nel limite non relativistico l'angolo tra la velocità e lo spin della particella rimane costante. Un modo equivalente di dire ciò che risulterà utile nel seguito è che la proiezione (del valor medio) dello spin sulla direzione del moto è costante. Nel seguito si utilizzerà per semplicità la convenzione $c = 1$ e $\hbar = 1$.

Consideriamo ora il caso di una particella relativistica. Per effettuare questa generalizzazione appare naturale promuovere il vettore tridimensionale \mathbf{s} a quarivettore, che sarà indicato con ζ^μ e l'equazione cercata sarà quindi della forma $d\zeta^\mu/d\tau = \dots$. Notiamo subito che il quarivettore ζ^μ è in realtà soggetto ad un vincolo: nel riferimento di quiete \mathbf{s} è puramente spaziale, quindi si deve imporre che una trasformazione di Lorentz al sistema di quiete annulli la componente temporale di ζ , ovvero

$$0 = (\zeta')^0 = \gamma(\zeta^0 - \mathbf{v}\boldsymbol{\zeta}) = u_\mu \zeta^\mu \quad (10.7)$$

dove u_μ è la quadrivelocità. La forma dell'equazione del moto di ζ^μ è fortemente vincolata dalla covarianza relativistica e dal fatto che deve essere lineare nei campi elettromagnetici (quindi in $F^{\mu\nu}$) ed in ζ^μ , inoltre l'unico altro ingrediente che può comparire è la quadrivelocità (se comparisse il vettore posizione sarebbe rotta l'invarianza per traslazioni, se comparissero derivate superiore alla prima ci sarebbero problemi di causalità). Ricordando che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico e che $u_\mu u^\mu = -1$ si vede facilmente che l'unica forma permessa è

$$\frac{d\zeta^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu} \zeta_\nu + \beta u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu \zeta_\lambda \quad (10.8)$$

dove α e β sono due costanti.

L'equazione (10.8) si deve ridurre, nel limite non relativistico $\zeta \rightarrow (0, \mathbf{s})$, $u \rightarrow (1, 0)$, $\tau \rightarrow t$ a Eq. (10.5). È comodo a questo proposito ricordare che il campo magnetico è legato a $F^{\mu\nu}$ dalla relazione

$$B^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} \quad (10.9)$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} \times \mathbf{B})^\ell &= \epsilon^{\ell mn} s_m B_n = \epsilon^{\ell mn} s_m \frac{1}{2} \epsilon_{njk} F^{jk} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_j^\ell \delta_k^m - \delta_k^\ell \delta_j^m) s_m F^{jk} = \frac{1}{2} s_m F^{\ell m} - \frac{1}{2} F^{m\ell} s_m = F^{\ell m} s_m \end{aligned} \quad (10.10)$$

Usando questa relazione è immediato verificare che il limite non relativistico di Eq. (10.8) è

$$\dot{\mathbf{s}} = \alpha \mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (10.11)$$

e quindi si deve avere $\alpha = 2\mu$. Per determinare il valore di β si devono usare le equazioni del moto

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (10.12)$$

ed il fatto che $u_\mu \zeta^\mu = 0$ (Eq. (10.7)), per arrivare a

$$u_\mu \frac{d\zeta^\mu}{d\tau} = -\zeta_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} u_\mu \zeta_\nu \quad (10.13)$$

D'altra parte, moltiplicando per u_μ Eq. (10.8) ed usando $u_\mu u^\mu = -1$ si ottiene

$$u_\mu \frac{d\zeta^\mu}{d\tau} = \alpha F^{\mu\nu} u_\mu \zeta_\nu - \beta F^{\nu\lambda} u_\nu \zeta_\lambda \quad (10.14)$$

quindi si deve avere $e/m = \alpha - \beta$, ovvero

$$\beta = 2\mu - \frac{e}{m} \equiv -2\mu' \quad (10.15)$$

Notiamo che se $g = 2$ allora $\beta = 0$. L'equazione finale cui si giunge è quindi

$$\frac{d\zeta^\mu}{d\tau} = 2\mu F^{\mu\nu} \zeta_\nu - 2\mu' u^\mu F^{\nu\lambda} u_\nu \zeta_\lambda \quad (10.16)$$

che è nota come equazione di Bargmann-Michel-Telegdi [18]. Si vuole ora vedere la forma che l'equazione (10.16) assume quando scritta in termini di \mathbf{s} e dei campi elettrico e magnetico. Come primo passo serve mettere in relazione \mathbf{s} e ζ^μ . Per un quadrivettore generico V^μ le trasformazioni di Lorentz si scrivono nella forma

$$\begin{aligned}\mathbf{V}'_\perp &= \mathbf{V}_\perp \\ \mathbf{V}'_\parallel &= \gamma(\mathbf{V}_\parallel - \mathbf{v}V^0) \\ (V')^0 &= \gamma(V^0 - \mathbf{v}\mathbf{V}_\parallel)\end{aligned}\tag{10.17}$$

dove $\mathbf{V}_\parallel = \mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\mathbf{V}}{v^2}$ e $\mathbf{V}_\perp = \mathbf{V} - \mathbf{V}_\parallel$. Nel caso particolare del quadrivettore ζ^μ , il sistema primato corrisponde al sistema fermo, quindi $V' = s$ e $V = \zeta$. Ricordando che $s^0 = 0$ si ha (Eq. (10.7))

$$\zeta^0 = \mathbf{v}\zeta\tag{10.18}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{s} &= \zeta - \mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\zeta}{v^2} + \gamma\left(\mathbf{v}\frac{\mathbf{v}\zeta}{v^2} - \mathbf{v}(\mathbf{v}\zeta)\right) = \\ &= \zeta - \mathbf{v}(\mathbf{v}\zeta)\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{\gamma}{\beta^2} - \gamma\right)\end{aligned}\tag{10.19}$$

ed usando $\beta^2 = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$ si vede che

$$\mathbf{s} = \zeta - \frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{v}\zeta)\tag{10.20}$$

Per ricavare la formula inversa basta usare in Eq. (10.17) $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ e ricordare che $s^0 = 0$, quindi

$$\begin{aligned}\zeta &= \mathbf{s} - \mathbf{v}\frac{\mathbf{s}\mathbf{v}}{v^2} + \gamma\mathbf{v}\frac{\mathbf{s}\mathbf{v}}{v^2} = \\ &= \mathbf{s} + \frac{\gamma-1}{v^2}\mathbf{v}(\mathbf{s}\mathbf{v}) = \mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\mathbf{v}(\mathbf{s}\mathbf{v})\end{aligned}\tag{10.21}$$

Per ζ^0 si ha quindi (vedi Eq. (10.7))

$$\zeta^0 = \mathbf{v}\zeta = \mathbf{v}\mathbf{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}v^2\mathbf{v}\mathbf{s} = \mathbf{v}\mathbf{s}\left(1 + \frac{\gamma^2v^2}{1+\gamma}\right) = \gamma\mathbf{v}\mathbf{s}\tag{10.22}$$

dove si è usato

$$1 + \frac{\gamma^2v^2}{1+\gamma} = \frac{1}{\gamma+1}(1 + \gamma + \gamma^2\beta^2 - \gamma^2 + \gamma^2) = \frac{\gamma(\gamma+1)}{\gamma+1} = \gamma\tag{10.23}$$

La riscrittura del secondo membro di Eq. (10.16) in termini di \mathbf{E} e \mathbf{B} non presenta serie difficoltà: ricordando Eq. (10.10) e che $E^i = F_{0i} = F^{i0}$ si ha infatti (indici latini indicano le coordinate spaziali)

$$F^{j\nu}\zeta_\nu = F^{j0}\zeta_0 + F^{ji}\zeta_i = E^j\zeta_0 + (\zeta \times \mathbf{B})^j = (\zeta\mathbf{v})E^j + (\zeta \times \mathbf{B})^j\tag{10.24}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned}u_\nu F^{\nu\lambda}\zeta_\lambda &= u_0F^{0i}\zeta_i + u_iF^{i0}\zeta_0 + u_iF^{ij}\zeta_j = \\ &= -u_0E^i\zeta_i + u_i\zeta_0E^i + u_i(\zeta \times \mathbf{B})^i = \\ &= \gamma(\mathbf{E}\zeta) - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{E})(\mathbf{v}\zeta) - \gamma\mathbf{v} \cdot (\zeta \times \mathbf{B})\end{aligned}\tag{10.25}$$

e quindi

$$\dot{\zeta} = \frac{2\mu}{\gamma}(\zeta \times \mathbf{B}) + \frac{2\mu}{\gamma}(\zeta\mathbf{v})\mathbf{E} - 2\mu'\gamma\mathbf{v}(\zeta\mathbf{E}) + 2\mu'\gamma\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot (\zeta \times \mathbf{B})) + 2\mu'\gamma\mathbf{v}(\zeta\mathbf{v})(\mathbf{v}\mathbf{E})\tag{10.26}$$

Per ottenere le equazioni scritte in termini di \mathbf{s} si deve scrivere $\dot{\mathbf{s}}$ usando Eq. (10.20), sostituire per la derivata di ζ il risultato Eq. (10.26) ed altrove le espressioni Eq. (10.21), in cui le derivate della velocità vengono scritte usando le equazioni del moto

$$m \frac{d}{dt}(\gamma \mathbf{v}) = e \mathbf{E} + e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{e}{m} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (10.27)$$

Il risultato finale che si ottiene è (vedi ad es. [10])

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{e}{mc} \mathbf{s} \times \left[\left(\frac{g}{2} - 1 + \frac{1}{\gamma} \right) \mathbf{B} - \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} - \left(\frac{g}{2} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \right) \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right] \quad (10.28)$$

Particolarmente interessante è l'equazione che si ottiene per la componente dello spin parallela alla velocità nel caso in cui $\mathbf{E} = 0$, che può essere dedotta facilmente: scomponiamo lo spin in una componente parallela ed una ortogonale alla velocità

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} s_{\parallel} + \mathbf{s}_{\perp} \quad \mathbf{n} = \mathbf{v}/v \quad (10.29)$$

Ricordiamo che $\zeta^0 = \gamma \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = \gamma v s_{\parallel}$ inoltre se $\mathbf{E} = 0$ sia v che γ sono costanti, quindi

$$\frac{d\zeta^0}{d\tau} = \gamma v \frac{ds_{\parallel}}{d\tau} = v \gamma^2 \frac{ds_{\parallel}}{dt} \quad (10.30)$$

D'altra parte sviluppando l'equazione Eq. (10.16) in termini dei campi elettrico e magnetico usando Eq. (10.24)-(10.25) si arriva subito a

$$\frac{d\zeta^0}{d\tau} = 2\mu' \gamma^2 \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{B}) \quad (10.31)$$

e quindi (usando anche Eq. (10.21))

$$\begin{aligned} \dot{s}_{\parallel} &= 2\mu' \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{B}) = 2\mu' \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\zeta}) = 2\mu' \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}) = \\ &= 2\mu' \mathbf{B} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{s}_{\perp}) = 2\mu' \mathbf{s}_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (10.32)$$

L'equazione finale per la componente longitudinale è quindi (ripristinando le unità fisiche)

$$\dot{s}_{\parallel} = 2 \frac{e\hbar}{2mc} \frac{2-g}{2} \mathbf{s}_{\perp} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{n}) \quad (10.33)$$

quindi se $g = 2$ la componente longitudinale dello spin è costante (analogamente al caso non relativistico) mentre se $g \approx 2$ è lentamente variabile. Utilizzando questo fatto si può misurare sperimentalmente il fattore g del muone: il muone è una particella instabile e la direzione dei prodotti di decadimento dipende fortemente dalla direzione dello spin nel sistema di riposo della particella. Facendo girare dei muoni in un anello di accumulazione e vedendo lo sfasamento tra la frequenza di rotazione dei muoni e la frequenza di "precessione" dei prodotti di decadimento si può risalire a g .

Dal punto di vista sperimentale il valore meglio misurato è quello dell'elettrone. La prima misura in cui si osservò uno scostamento significativo dal valore 2 è una misura di precisione dell'effetto Zeeman del 1947 che dava

$$\left(\frac{g-2}{2} \right)_{\text{exp 1947}}^e = 0.00115(4) \quad (10.34)$$

valore ben riprodotto dalla teoria: un calcolo perturbativo ad un loop in QED predice (risultato dovuto a Schwinger)

$$\left(\frac{g-2}{2} \right)_{1\text{-loop}}^e = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \approx 0.0011614 \quad (10.35)$$

Il valore attuale è

$$\left(\frac{g-2}{2} \right)_{\text{exp}}^e = 0.00115965218076(27) \quad (10.36)$$

che è ancora in buon accordo con le previsioni teoriche (è necessario un calcolo al decimo ordine in teoria delle perturbazioni).

11 Il cut-off GZK dei raggi cosmici

Nell'universo è presente un fondo di radiazione cosmica (CMB, cosmic microwave background) in equilibrio alla temperatura di approssimativamente 3 K. La presenza di questo fondo comporta una limitazione dell'energia massima dei raggi cosmici intergalattici (protoni), limitazione nota come limite o cut-off GZK, dai nomi degli scopritori del fenomeno [19, 20].

Se si considera il moto di un protone di alta energia in un ambiente in cui siano presenti fotoni, diversi meccanismi di perdita di energia sono possibili, ad esempio

$$\begin{aligned}
 p + \gamma &\rightarrow p + \gamma \\
 p + \gamma &\rightarrow p + e^+ + e^- \\
 p + \gamma &\rightarrow p + \pi^0 \\
 p + \gamma &\rightarrow n + \pi^+ \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e + \pi^+
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

(anche π^0 e π^\pm sono instabili ma una conoscenza precisa dei loro decadimenti non sarà necessaria nel seguito). Il principale vincolo da imporre alla perdita di energia del protone è la conservazione del numero barionico, quindi nello stato finale della reazione $p + \gamma \rightarrow X$ devono necessariamente essere presenti un neutrone o un protone (escludendo i barioni più pesanti, che entrano in gioco ad energie ancora più alte), inoltre il neutrone è instabile e decadendo ricrea il protone. Si studierà ora in dettaglio il caso della reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$, si argomenterà poi che il caso della reazione con il neutrone è analogo mentre il contributo delle prime due reazioni alla perdita di energia è in prima approssimazione trascurabile.

Calcoliamo innanzitutto la soglia della reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$, supponendo un fotone tipico per una temperatura di 3 K. La condizione di soglia è $s \geq (m_p + m_\pi)^2$, quindi

$$m_p^2 + 2E_p E_\gamma - 2p_p E_\gamma \cos \theta \geq m_p^2 + 2m_p m_\pi + m_\pi^2 \tag{11.2}$$

Per un protone di altissima energia si può approssimare $E_p \approx p_p$, quindi la condizione di soglia è

$$E_p \geq \frac{2m_p m_\pi + m_\pi^2}{2E_\gamma(1 - \cos \theta)} \tag{11.3}$$

Considerando per semplicità il caso $\cos \theta = -1$, in cui la soglia è minima, si trova ($m_\pi \approx 135$ MeV, $m_p \approx 938$ MeV, $300\text{K} \approx \frac{1}{40}$ eV)

$$E_p \gtrsim \frac{2m_p m_\pi + m_\pi^2}{4E_\gamma} \approx \frac{m_p m_\pi}{2E_\gamma} \approx \frac{135 \text{ MeV} \times 938 \text{ MeV}}{2 \times 10^{-2}/40 \text{ eV}} \approx 2.5 \times 10^{11} \text{ GeV} \tag{11.4}$$

Per ottenere il cammino libero medio si deve usare l'equazione

$$E(x + dx) = E(x) - (n\sigma dx)\eta E(x) \tag{11.5}$$

dove $E(x)$ è l'energia della particella nella posizione x , $E(x + dx)$ è l'energia nella posizione $x + dx$, σ è la sezione d'urto, n la densità numerica dei bersagli e ηE è l'energia persa in ogni impatto ($0 \leq \eta \leq 1$ è spesso chiamato inelasticità). Dall'equazione precedente si ottiene

$$\lambda = \frac{1}{\eta n \sigma} \quad E(x) \propto e^{-x/\lambda} \tag{11.6}$$

Alla soglia, la sezione d'urto della reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ è approssimativamente $\sigma \approx 200 \mu\text{b}$ e non è difficile calcolare η : dalla conservazione dell'energia, in soglia si ha $E_{in} = (m_p + m_\pi)\gamma_{CM}$, inoltre E_{in} è con ottima approssimazione l'energia del protone incidente, quindi si ha

$$\eta = \frac{\Delta E}{E} \approx \frac{E_{in} - m_p \gamma_{CM}}{E_{in}} = \frac{m_\pi}{m_p + m_\pi} \approx 0.13 \tag{11.7}$$

Il numero medio di fotoni per unità di volume nello spazio delle fasi si ottiene dalla formula di Planck (il 2 è un termine di degenerazione dovuto alle due polarizzazioni del fotone):

$$dN = \frac{2}{e^{E/(kT)} - 1} \frac{d^3p d^3x}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2}{e^{E/(kT)} - 1} \frac{4\pi p^2 dp d^3x}{(2\pi\hbar)^3} \quad (11.8)$$

Usando $E = pc$ si ottiene quindi per la densità numerica di fotoni in equilibrio a temperatura T

$$\begin{aligned} n = \frac{dN}{dV} &= \frac{1}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{E^2 dE}{e^{E/(kT)} - 1} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y - 1} = \\ &= \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \quad (\approx 5 \times 10^8 / \text{m}^3 \text{ se } T = 3 \text{ K}) \end{aligned} \quad (11.9)$$

dove $\zeta(3) \approx 1.202056$.

Il calcolo dell'integrale si effettua come segue:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} &= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^\infty x^2 e^{-x} \left(\sum_{k=0}^\infty e^{-kx} \right) dx = \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-kx} dx = \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3} \equiv 2\zeta(3) \end{aligned} \quad (11.10)$$

La formula generale è

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(x)\Gamma(x) \quad (11.11)$$

Si ottiene quindi, usando i valori di soglia, il cammino libero medio

$$\lambda \approx \frac{1}{0.13 \times 2.0 \times 10^{-2} \text{ fm}^2 \times 5 \times 10^8 / \text{m}^3} = 7 \times 10^{23} \text{ m} \quad (11.12)$$

L'unità di distanza tipica utilizzata in astrofisica è il parsec, con $1 \text{ pc} \approx 3 \times 10^{16} \text{ m}$, quindi si ottiene $\lambda \approx 23 \text{ Mpc}$. Per avere una idea delle scale di lunghezza, la via lattea ha un diametro approssimativo di 34 Kpc , la galassia di Andromeda, la più vicina alla via lattea, dista approssimativamente 0.78 Mpc , le galassie "vicine" sono approssimativamente a $O(10) \text{ Mpc}$ e l'orizzonte dell'universo è a circa 14 Gpc . Si vede quindi che su scale cosmiche λ è piccolo, da cui l'effetto di cut-off.

Il calcolo è stato chiaramente effettuato in modo approssimato: ad esempio si è usato un valore indipendente dall'angolo di incidenza per la soglia e si è supposto che tutti i fotoni avessero una energia di 3 K . Il modo "esatto" di procedere sarebbe considerare per ogni angolo di incidenza la soglia e mediare i $\lambda(\theta, E_\gamma)$ così ottenuti con la distribuzione di Planck, tuttavia questo calcolo non è fattibile in forma analitica e comunque il risultato cambia poco.

Passiamo ora all'analisi delle altre reazioni: la reazione $p + \gamma \rightarrow n + \pi^+$ ha una sezione d'urto analoga a quella della reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$, la soglia è simile in quanto $m_{\pi^+} - m_{\pi^0} \approx 4 \text{ MeV}$ e l'inelasticità (considerando il protone finale del decadimento del neutrone) è analoga, quindi considerando anche questa reazione si dimezza approssimativamente il cammino libero medio del protone calcolato precedentemente.

La reazione $p + \gamma \rightarrow p + e^+ + e^-$ ha una soglia più bassa di quella della reazione $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$, data approssimativamente da

$$E_p \geq \frac{m_p m_e}{E_\gamma} \approx \frac{938 \text{ MeV} \times 0.5 \text{ MeV}}{0.25 \times 10^{-3} \text{ eV}} \approx 1.8 \times 10^9 \text{ GeV} \quad (11.13)$$

tuttavia la sezione d'urto di questo processo è approssimativamente 2 mb e l'inelasticità in soglia è $\eta \approx 2m_e/m_p \approx 10^{-3}$, quindi il cammino libero corrispondente è più grande di quello del processo $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ di un fattore $200 \mu\text{b} \times 0.13 / (0.2 \text{ mb} \times 10^{-3}) \approx 13$, quindi l'effetto di cut-off generato dalla produzione di coppie è meno rilevante.

La reazione $p + \gamma \rightarrow p + \gamma$ non ha soglia, tuttavia la sezione d'urto è più piccola di quella tipica di $p + \gamma \rightarrow p + \pi^0$ e in un evento tipico $\eta \ll 1$, quindi anche questa reazione non genera un limite all'energia dei raggi cosmici.

Riferimenti bibliografici

- [1] B. Rossi, D. B. Hall “Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum” *Physical Review* **59**, 223 (1941).
- [2] J. C. Hafele, R. E. Keating “Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains” *Science* **177** 166 (4044).
- [3] J. C. Hafele, R. E. Keating “Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains” *Science* **177** 168 (4044).
- [4] J. Bailey et al. “Measurements of relativistic time dilatation for positive and negative muons in a circular orbit” *Nature* **268**, 301 (1977).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Meccanica quantistica, teoria non relativistica” Editori Riuniti (2003).
- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshits, L. P. Pitaevskii “Electrodynamics of Continuous Media” Butterworth-Heinemann (2004).
- [7] E. Fermi, E. Teller “The Capture of Negative Mesotrons in Matter” *Phys. Rev.* **72**, 399 (1947).
- [8] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin “Solid state physics” Harcourt College Publisher (1976).
- [9] G. Grosso, G. Pastori Parravicini “Solid state physics” Academic Press (2000).
- [10] J. D. Jackson “Classical Electrodynamics” John Wiley & Sons (1999).
- [11] D. R. Tompkins “Total Energy Loss and Cerenkov Emission from Monopoles” *Phys. Rev.* **138**, 248 (1965).
- [12] E. Bauer “The energy loss of free magnetic poles in passing through matter”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47**, 777 (1951).
- [13] S. P. Ahlen, K. Kinoshita “Calculation of the stopping power of very-low-velocity magnetic monopoles” *Phys. Rev. D* **26**, 2347 (1982).
- [14] J. J. Sakurai “Modern quantum mechanics” Addison-Wesley (1994).
- [15] Y. Shnir “Magnetic monopoles” Springer-Verlag (2005).
- [16] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Teoria dei campi” Editori Riuniti (2003).
- [17] E. Fermi “Nuclear Physics” The University of Chicago Press (1953).
- [18] V. Bargmann, L. Michel, V. L. Telegdi “Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field”, *Phys. Rev. Lett.* **435**, **2** (1959).
- [19] K. Greisen “End to the cosmic-ray spectrum” *Phys. Rev. Lett.* **16**, 748 (1966).
- [20] G. T. Zatsepin, V.A.Kuz'min “Upper limit of the spectrum of cosmic rays” *JETP Letters* **4**, 78 (1966).