

Modello a quark costituenti

Claudio Bonati

2 dicembre 2014

1 Isospin

L'idea di invarianza di isospin nell'interazione forte fu introdotta da Heiseberg subito dopo la scoperta del neutrone ed era inizialmente chiamata anche "indipendenza dalla carica" dell'interazione forte. L'idea di base è molto semplice: si assume che l'interazione forte non sia in grado di distinguere tra un neutrone ed un protone. Questa idea potrebbe essere utilizzata nella forma che l'interazione forte sia invariante *per sostituzione* di un neutrone con un protone ed in questo modo l'isospin sarebbe una simmetria discreta, però il modo in cui si usa è più sottile: l'interazione forte è invariante *per rotazione* di un neutrone in un protone. La motivazione principale per l'introduzione di questa simmetria dell'interazione forte fu l'esistenza dei nuclei isobari, ovvero con numeri diversi di neutroni e protoni ma con approssimativamente la stessa massa.

Se si pensa all'isospin come simmetria continua che trasforma tra loro protoni e neutroni il caso più semplice è assumere che l'isospin corrisponda ad una simmetria $SU(2)$ e che neutrone e protone formino un doppietto (ovvero una rappresentazione $\frac{1}{2}$ di $SU(2)$). In questo modo i nuclei isobari possono essere pensati come elementi di uno stesso multipletto ottenuto componendo i doppietti di neutroni e protoni: ad esempio il deutone, unico stato legato a due nucleoni, è interpretato come un singoletto di isospin, ${}^3\text{He}$ e ${}^3\text{H}$ formano un doppietto, ${}^4\text{He}$ è nuovamente un singoletto e così via. L'isospin è tipicamente indicato con T , quindi i nucleoni formano un doppietto con $T = \frac{1}{2}$ e si attribuisce convenzionalmente al protone $T_z = +\frac{1}{2}$ mentre al neutrone $T_z = -\frac{1}{2}$. L'invarianza di isospin stabilisce quindi che l'interazione forte può dipendere da T ma non da T_z (analogamente a come l'invarianza per rotazioni impone che le energie dipendano da j ma non da j_z).

Chiaramente l'isospin non è una simmetria delle interazioni elettromagnetiche (protoni e neutroni hanno cariche diverse) e non è una simmetria delle interazioni deboli ($n \rightarrow pe\bar{\nu}_e$). L'esistenza di queste violazioni di isospin (insieme anche ad una debole violazione forte di isospin) producono la piccola differenza di massa esistente tra neutrone e protone, che dovrebbero essere esattamente degeneri nel caso in cui la simmetria fosse esatta. La simmetria approssimata di isospin risulta comunque essere molto utile in quanto le violazioni sono tipicamente dell'ordine dello $0.1 \div 1\%$.

Consideriamo il sistema neutrone-protone: in termini di isospin si ha¹

$$|pp\rangle = |1, 1\rangle \quad |nn\rangle = |1, -1\rangle \quad |pn\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \quad (1.1)$$

quindi se indichiamo con H la hamiltoniana di interazione forte, l'invarianza per isospin implica che esistono due elementi di matrice indipendenti

$$M_0 = \langle 0, 0|H|0, 0\rangle \quad M_1 = \langle 1, T_3|H|1, T_3\rangle \quad (1.2)$$

Poichè le sezioni d'urto sono proporzionali al quadrato della somma degli elementi di matrice che possono apparire in un dato processo (il coefficiente è lo spazio delle fasi, che nel limite di simmetria

¹Ovviamente in questo formalismo gli stati della coppia neutrone-protone sono due (corrispondenti a $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$ nel caso della somma di due spin $1/2$). Segliamo convenzionalmente di usare $|\uparrow\downarrow\rangle$, una scelta diversa potrebbe semplicemente ad avere fasi diverse per gli elementi di matrice M_0 e M_1 , vedi dopo.

di isospin esatta, cioè $m_n = m_p$, è uguale in tutti i casi) si ha

$$\sigma_{pp \rightarrow pp} = \sigma_{nn \rightarrow nn} \sim |M_1|^2 \quad \sigma_{pn \rightarrow pn} \sim \frac{1}{2}(|M_1 + M_0|^2) \quad (1.3)$$

La simmetria di isospin non impone $M_0 = M_1$, quindi senza ipotesi supplementari non permette di mettere in relazione $\sigma_{pp \rightarrow pp}$ con $\sigma_{pn \rightarrow pn}$.

Utilizzando la simmetria di isospin si può ottenere una estensione della statistica di Fermi: se protone e neutrone sono a tutti gli effetti interpretati come due stati della stessa particella la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica per scambio. Chiaramente in questo ragionamento deve essere inserita anche la funzione d'onda di isospin: $\psi = \psi_{orbitale} \psi_{spin} \psi_{isospin}$. Nel caso di due nucleoni sotto scambio si ha $\psi_{orbitale} \rightarrow \psi_{orbitale}(-1)^\ell$, $\psi_{spin} \rightarrow \psi_{spin}(-1)^{s+1}$ e $\psi_{isospin} \rightarrow \psi_{isospin}(-1)^{T+1}$, quindi si deve avere $(-1) = (-1)^{\ell+s+T}$. Gli stati permessi nel sistema a due nucleoni sono quindi (in notazione spettroscopica $2S+1L_J$)

$$\begin{array}{lllll} T = 1 & {}^1S_0 & {}^3P_{0,1,2} & {}^1D_2 & \cdots \\ T = 0 & {}^3S_1 & {}^1P_1 & {}^3D_{1,2,3} & \cdots \end{array} \quad (1.4)$$

ed il deutone corrisponde agli stati con $J = 1$ e parità positiva 3S_1 e 3D_1 , quindi $T = 0$.

In natura esistono tre pioni (π^+ , π^0 e π^-) che sono quindi interpretabili in modo naturale come un tripletto di isospin, tuttavia non è a priori chiaro quale sia il corretto assegnamento di T_z , che risulta essere

$$\begin{array}{ll} \pi^+ & = |1, 1\rangle \\ \pi^0 & = |1, 0\rangle \\ \pi^- & = |1, -1\rangle \end{array} \quad (1.5)$$

Una verifica che questo è il corretto assegnamento si ottiene studiando i processi

$$p + n \rightarrow d + \pi^0 \quad p + p \rightarrow d + \pi^+ \quad (1.6)$$

dove con d si è indicato un deutone, che si è visto corrispondere a $|0, 0\rangle$ dal punto di vista dell'isospin. Si ha allora

$$|d\pi^0\rangle = |1, 0\rangle \quad |d\pi^+\rangle = |1, 1\rangle \quad (1.7)$$

quindi

$$\sigma_{pn \rightarrow d\pi^0} \sim \frac{1}{2} |\langle 1, 0 | H | 1, 0 \rangle|^2 = \frac{1}{2} M_1^2 \quad \sigma_{pp \rightarrow d\pi^+} \sim |\langle 1, 1 | H | 1, 1 \rangle|^2 = M_1^2 \quad (1.8)$$

ed infine

$$\frac{\sigma_{pn \rightarrow d\pi^0}}{\sigma_{pp \rightarrow d\pi^+}} = \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

Una altra applicazione classica del formalismo dell'isospin è lo scattering $\pi N \rightarrow \pi N$, dove N indica un nucleone: in questo caso gli elementi di matrice indipendenti sono $M_{3/2} = \langle \frac{3}{2}, T_z | H | \frac{3}{2}, T_z \rangle$ e $M_{1/2} = \langle \frac{1}{2}, T_z | H | \frac{1}{2}, T_z \rangle$ quindi tutti i possibili processi che possono avvenire conservando la carica (10 processi) devono poter essere descritti tramite due soli parametri. Consideriamo le reazioni

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \quad (1.10)$$

Tramite le tabelle dei coefficienti di Clebsh-Gordon si ottengono le seguenti identificazioni

$$\begin{aligned} |\pi^+ p\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \\ |\pi^- p\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (1.11)$$

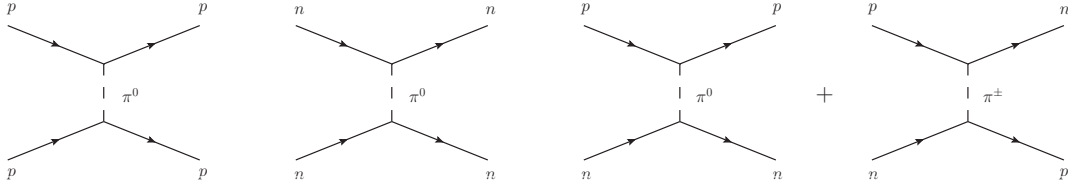


Figura 1: Diagrammi OPE per lo scattering elastico NN : il primo a sinistra per $pp \rightarrow pp$, il secondo per $nn \rightarrow nn$, i restanti per $np \rightarrow np$. Per disegnare i diagrammi è stato usato Jaxodraw.

e quindi

$$\begin{aligned}
\sigma_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p} &\sim |M_{3/2}|^2 \\
\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} &\sim \left| \frac{1}{3}M_{3/2} + \frac{2}{3}M_{1/2} \right|^2 \\
\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} &\sim \left| \frac{\sqrt{2}}{3}M_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}M_{1/2} \right|^2
\end{aligned} \tag{1.12}$$

In particolare sono possibili i due casi limite:

$$\begin{aligned}
M_{3/2} \gg M_{1/2} & \quad \sigma_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} = 9 : 1 : 2 \\
M_{3/2} \ll M_{1/2} & \quad \sigma_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} = 0 : 2 : 1
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Il caso $M_{3/2} \gg M_{1/2}$ si verifica ad esempio per masse invarianti approssimativamente 1236MeV e corrisponde al quadrupletto di risonanze Δ .

Consideriamo ora lo scattering elastico NN nel caso più semplice del modello a scambio di mesoni: lo scambio di un pione (one pion exchange, OPE). I diagrammi rilevanti all'ordine più basso sono quelli in Fig. (1), in cui nei vertici compare un accoppiamento $C_{\pi NN}$. L'invarianza di isospin impone che l'accoppiamento presente al vertice possa dipendere da T ma non da T_z ed i vertici corrispondono alle seguenti transizioni:

$$\begin{aligned}
C_{\pi^0pp} & \quad p \leftrightarrow p\pi^0 & |1/2, 1/2\rangle & \leftrightarrow \sqrt{2/3}|3/2, 1/2\rangle - \sqrt{1/3}|1/2, 1/2\rangle \\
C_{\pi^0nn} & \quad n \leftrightarrow n\pi^0 & |1/2, -1/2\rangle & \leftrightarrow \sqrt{2/3}|3/2, -1/2\rangle + \sqrt{1/3}|1/2, -1/2\rangle \\
C_{\pi^+pn} & \quad p \leftrightarrow n\pi^+ & |1/2, 1/2\rangle & \leftrightarrow \sqrt{1/3}|3/2, 1/2\rangle + \sqrt{2/3}|1/2, 1/2\rangle
\end{aligned} \tag{1.14}$$

quindi solo i secondi termini a destra possono contribuire e si ottengono le relazioni²

$$C_{\pi^0pp} \sim -C \quad C_{\pi^0nn} \sim +C \quad C_{\pi^+pn} \sim \sqrt{2}C \quad C = \sqrt{\frac{1}{3}}M_{1/2} \tag{1.15}$$

ed infine

$$\begin{aligned}
\sigma_{pp \rightarrow pp} &\sim |C_{\pi^0pp}C_{\pi^0pp}|^2 = C^4 \\
\sigma_{nn \rightarrow nn} &\sim |C_{\pi^0nn}C_{\pi^0nn}|^2 = C^4 \\
\sigma_{pn \rightarrow pn} &\sim |C_{\pi^0pp}C_{\pi^0nn} + C_{\pi^+pn}C_{\pi^+pn}|^2 = C^4
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Si è visto prima che la sola simmetria di isospin implica $\sigma_{nn \rightarrow nn} = \sigma_{pp \rightarrow pp}$. Ora si è mostrato che OPE+isospin porta alla conclusione $\sigma_{nn \rightarrow nn} = \sigma_{pp \rightarrow pp} = \sigma_{np \rightarrow np}$, che è ben soddisfatta ad alta energia (dove il modello OPE è applicabile).

Vediamo ora come scrivere il doppietto coniugato di carica di neutrone e protone, ovvero antineutrone ed antiprotone. Si vuole che $T_z(\bar{n}) = -T_z(n) = \frac{1}{2}$ che $T_z(\bar{p}) = -T_z(p) = -\frac{1}{2}$ e che

²Queste stesse relazioni tra i vertici potrebbero ottenersi partendo dalla lagrangiana di isospin $\mathcal{L} \propto \bar{N}(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})N = (\bar{p}p - \bar{n}n)\pi^0 + \sqrt{2}(\bar{p}n\pi^+ + \bar{n}p\pi^-)$.

antineutrone ed antiprotone formino un doppietto di isospin. Per capire come fare ciò partiamo da una rotazione lungo T_2 del doppietto protone neutrone: la rotazione di un angolo θ è data da $e^{i\theta\sigma_2/2}$ e quindi

$$\begin{aligned} |p'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|p\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|n\rangle \\ |n'\rangle &= -\sin\frac{\theta}{2}|p\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|n\rangle \end{aligned} \quad (1.17)$$

Applicando la coniugazione di carica si ottiene

$$\begin{aligned} |\bar{p}'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|\bar{p}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|\bar{n}\rangle \\ |\bar{n}'\rangle &= -\sin\frac{\theta}{2}|\bar{p}\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|\bar{n}\rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

e si vuole che il doppietto \bar{n}, \bar{p} trasformi in modo analogo al doppietto p, n . Riscrivendo le equazioni precedenti nella forma

$$\begin{aligned} |\bar{n}'\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|\bar{n}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}(-|\bar{p}\rangle) \\ (-|\bar{p}'\rangle) &= -\sin\frac{\theta}{2}|\bar{n}\rangle + \cos\frac{\theta}{2}(-|\bar{p}\rangle) \end{aligned} \quad (1.19)$$

si vede che dal punto di vista della trasformazione sotto isospin il doppietto antineutrone-antiprotone è $\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}$ e non $\begin{pmatrix} \bar{n} \\ \bar{p} \end{pmatrix}$ come ci si sarebbe potuti aspettare (chiaramente assegnare il segno meno a \bar{p} o \bar{n} è una convenzione).

Le interazioni forti sono invarianti sia sotto trasformazioni di isospin (\hat{T}) che per coniugazione di carica (\hat{C}), tuttavia $[\hat{C}, \hat{T}] \neq 0$: \hat{C} cambia il segno dell'autovalore di \hat{T}_3 , quindi una operazione che commuti sia con \hat{C} che con \hat{T} può essere costruita componendo la coniugazione di carica con una rotazione di π intorno all'asse T_2 . Questa trasformazione è nota con il nome di G -parità³:

$$\hat{G} = e^{i\pi\hat{T}_2}\hat{C} \quad (1.20)$$

Consideriamo innanzitutto il caso dei pioni: π^0 è un'autostato di \hat{C} con autovalore +1 (poichè $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) inoltre sotto una rotazione di π lungo T_2 cambia segno in quanto $T = 1$ (analogamente a $(-1)^\ell$ sotto parità per una funzione d'onda orbitale), quindi $\hat{G}\pi^0 = -\pi^0$. Poichè \hat{G} commuta con l'isospin, tutti i componenti di uno stesso multipletto devono trasformare nello stesso modo sotto \hat{G} , quindi

$$\hat{G}|\pi\rangle = -|\pi\rangle \quad (1.21)$$

Poichè \hat{G} è un numero quantico moltiplicativo si ha

$$\hat{G}|m\pi\rangle = (-1)^m|m\pi\rangle \quad (1.22)$$

In particolare si ottiene un analogo del teorema di Furry in QED per i pioni: un numero pari di pioni non può trasformarsi tramite l'interazione forte in un numero dispari di pioni.

Il caso dei nucleoni è più complicato in quanto nessuno dei due nucleoni è autostato della coniugazione di carica: utilizzando le formule precedenti per le rotazioni si ottiene

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \xrightarrow{\hat{C}} \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix} \xrightarrow{e^{i\pi\sigma_2/2}} \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

quindi

$$\hat{G}\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

ed analogamente si vede che

$$\hat{G}\begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Consideriamo ora il caso di una coppia nucleone-antinucleone: prestando attenzione al segno meno del doppietto di antinucleoni si ottengono i multipletti di isospin

$$|1, 1\rangle = |p\bar{n}\rangle \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle) \quad |1, -1\rangle = -|n\bar{p}\rangle \quad |0, 0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|p\bar{p}\rangle + |n\bar{n}\rangle) \quad (1.26)$$

³T. D. Lee, C. N. Yang "Charge Conjugation, a New Quantum Number G , and Selection Rules Concerning a Nucleon-Antinucleon System" Nuovo Cim. **3**, 749-753 (1956).

e si vede esplicitamente che sotto \hat{G} le funzioni d'onda di isospin acquistano un $(-1)^T$. D'altra parte per un sistema fermione-antifermione si ha $C = (-1)^{\ell+s}$, quindi

$$G(N\bar{N}) = (-1)^{\ell+s+T} \quad (1.27)$$

da cui si possono ricavare diverse regole di selezione per il processo $N\bar{N} \rightarrow$ pioni.

Consideriamo infine le violazioni di isospin nelle interazioni elettromagnetiche e deboli. Nel caso delle interazioni elettromagnetiche l'isospin può cambiare di una unità ($\Delta T = 0, 1$): sono ad esempio osservati i decadimenti

$$\begin{aligned} \Delta T = 1 & \quad \rho^0 \rightarrow \eta\gamma \quad \omega \rightarrow \pi^0\gamma \quad \eta' \rightarrow \rho^0\gamma \quad \Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0\gamma \\ \Delta T = 0 & \quad \rho \rightarrow \pi\gamma \quad \omega \rightarrow \eta\gamma \quad \eta' \rightarrow \omega\gamma \end{aligned} \quad (1.28)$$

Questa regola di selezione può essere rfrasata dicendo che l'accoppiamento elettromagnetico è la somma di due componenti, una isoscalare ($T = 0$) ed una isovettoriale ($T = 1$), come si intuisce dalla relazione di Gell-Mann-Nishijima (vedi sezioni successive). Oltre alle conferme nei decadimenti questa regola è verificata anche nei processi $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow$ mesoni vettori, in cui si osservano sia stati finali con $T = 0$ che con $T = 1$. Possibili violazioni di questa regola sembrerebbero a prima vista essere i decadimenti

$$\Sigma^+ \rightarrow p\gamma \quad \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0\gamma \quad (1.29)$$

per i quali $\Delta T = 1/2$. Tuttavia questi decadimenti sono più rari dei decadimenti deboli, quindi è ragionevole interpretarli come decadimenti deboli con correzioni elettromagnetiche.

Nel caso dei decadimenti deboli non esistono regole teoricamente precise, tuttavia una regola empirica che tipicamente funziona molto bene è la cosiddetta regola $\Delta T = 1/2$: sono permessi i decadimenti con $\Delta T = 0$ (e ΔT_3 generico) e quelli con $\Delta T = \pm 1/2$ e $\Delta T_3 = \pm 1/2$. Esempi di decadimenti "permessi" sono ad esempio

$$\begin{aligned} K^0 & \rightarrow \pi^+\pi^- & \Delta T = 1/2 & \quad \Delta T_3 = \pm 1/2 \\ n & \rightarrow p\bar{\nu}_e & \Delta T = 0 & \quad \Delta T_3 = 1 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Consideriamo ad esempio i decadimenti

$$\Lambda^0 \rightarrow p\pi^- \quad \Lambda^0 \rightarrow n\pi^0 \quad (1.31)$$

Lo stato iniziale è uno scalare di isospin ($|0,0\rangle$) mentre negli stati finali si ha $T_3 = -1/2$ e $T = 1/2, 3/2$. Secondo la regola $\Delta T \leq 1/2$ solo lo stato $1/2$ contribuisce significativamente al decadimento e si ha

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |n\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |p\pi^-\rangle \quad (1.32)$$

e pochè il rate è proporzionale al quadrato dell'elemento di matrice si ha

$$\frac{\Gamma_{\Lambda \rightarrow p\pi^-}}{\Gamma_{\Lambda \rightarrow n\pi^0}} = 2 \quad \left(\text{exp} = \frac{63.9\%}{35.8\%} \right) \quad (1.33)$$

Un esempio del fatto che la regola $\Delta T = 1/2$ non è esatta è il decadimento $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$: i due pioni hanno $T_3 = 1$ ma non possono avere $T = 1$ a causa della simmetria di Bose, infatti $\ell = 0$ per conservazione del momento angolare, quindi la funzione d'onda di isospin deve essere simmetrica, quindi solo $T = 2$ e $T = 0$ sono permessi, però $T_3 = 1$, quindi si deve avere $T = 2$ e $\Delta T = 3/2$. Il decadimento è osservato, tuttavia è soppresso:

$$\frac{\Gamma_{K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0}}{\Gamma_{K^0 \rightarrow \pi\pi}} \approx \frac{20.5}{1.24 \times 10^{-8} s} \frac{0.896 \times 10^{-10} s}{100} \approx 1.5 \times 10^{-3} \quad (1.34)$$

2 Zoologia di mesoni e barioni leggeri

Per classificare i mesoni ed i barioni leggeri è utile introdurre il numero quantico di ipercarica Y , definito da

$$Y = B + S \quad (2.1)$$

dove B è il numero barionico ed S è la stranezza. In questo modo i mesoni/barioni possono essere disposti come nelle figure Fig. (2)-(5) in grafici in funzione della terza componente dell'isospin (T_3) e dell'ipercarica Y .

Nelle righe orizzontali delle figure Fig. (2)-(5) si possono distinguere dei multipletti di isospin: ad esempio nell'ottetto barionico la riga $S = 0$ (cioè $Y = 1$) corrisponde al doppietto di isospin formato da neutrone e protone; analogamente ad esempio tra i mesoni pseudoscalari si distingue il tripletto dei pioni.

Dall'analisi dei grafici si può vedere come risulta soddisfatta la seguente relazione

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.2)$$

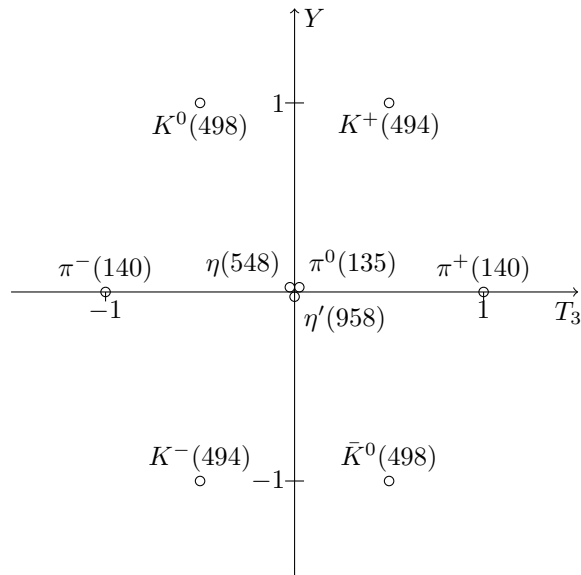


Figura 2: I nove mesoni pseudoscalari ($J^{PC} = 0^{-+}$), masse in MeV.

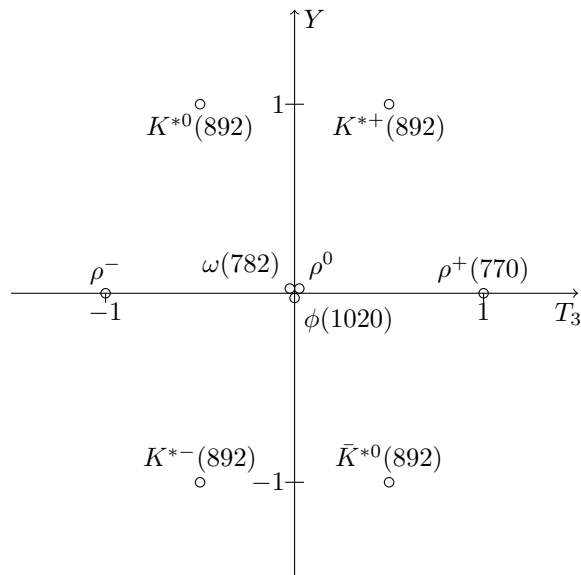


Figura 3: I nove mesoni pseudovettoriali ($J^{PC} = 1^{-+}$), masse in MeV.

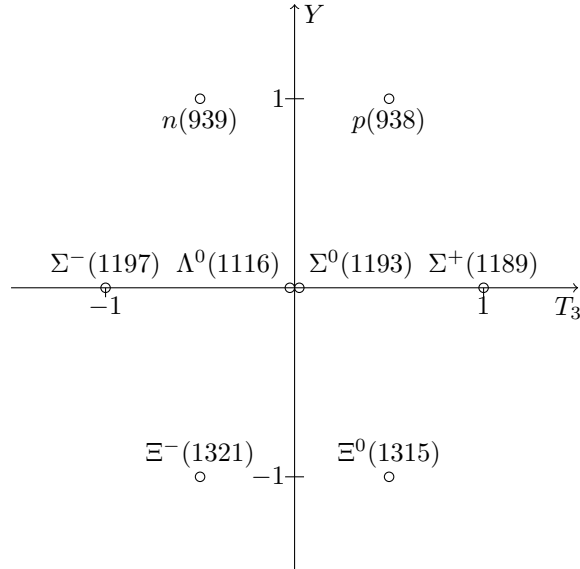


Figura 4: L'ottetto barionico ($J^P = \frac{1}{2}^+$), masse in MeV.

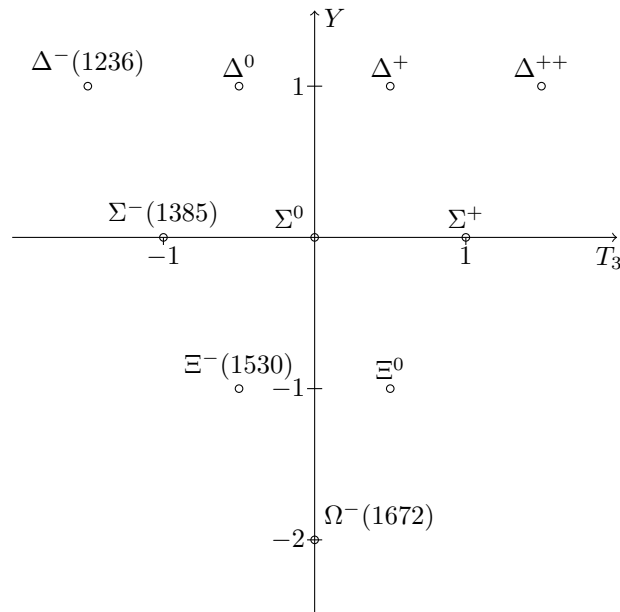


Figura 5: Il decupletto barionico ($J^P = \frac{3}{2}^+$), masse in MeV.

tra la terza componente dell'isospin, l'ipercarica e la carica elettrica $Q|e|$. Questa relazione è nota come relazione di Gell-Mann-Nishijima.

All'interno di uno stesso multipletto di isospin le differenze di massa siano tipicamente dell'ordine del 1% o inferiori: ad esempio

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \approx 0.7 \times 10^{-3} \quad \frac{m_{\pi^+} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^+} + m_{\pi^0}} \approx 1.7 \times 10^{-2} \quad (2.3)$$

quindi ci si aspetta che l'isospin sia una simmetria entro una precisione di circa l'1%.

L'idea di base del modello a quark costituenti è che i vari gruppi di mesoni e barioni con masse simili corrispondano a multipletti di una qualche simmetria approssimata⁴ che estende la simmetria di isospin. È immediato vedere che questa simmetria risulta molto meno accurata della simmetria di isospin:

$$\frac{m_\Sigma - m_N}{m_\Sigma + m_N} \approx 0.12 \quad (2.4)$$

dove N e Σ sono un elemento qualsiasi dei multipletti di isospin rispettivamente di n e Σ^0 . Quindi questa ipotetica nuova simmetria risulta essere accurata con una precisione di circa il 10% (il caso dei pioni, che risultano notevolmente più leggeri di quanto ci si aspetterebbe, è un caso un po' particolare che risulta però ben spiegato nell'ambito dell'ambito della cromodinamica).

Nella ricerca tra i vari gruppi possibili è stato mostrato come i mesoni e barioni possano essere messi in corrispondenza con alcune delle rappresentazioni del gruppo $SU(3)$, che raggiunge quindi lo scopo di classificare gli adroni leggeri estendendo la simmetria $SU(2)$ di isospin. Questa simmetria è nota come simmetria $SU(3)$ di sapore.

È infine possibile raggruppare diverse rappresentazioni di $SU(3)$ all'interno di super-multipletti di $SU(4)$ tuttavia questa ulteriore simmetria risulta così poco soddisfatta dalle masse da risultare in pratica di scarsa utilità.

Vista dal punto di vista della cromodinamica questa gerarchia di simmetrie e loro violazioni può essere spiegata nel seguente modo: la cromodinamica quantistica ha una propria scala tipica di energia, Λ_{QCD} , dell'ordine del GeV e le masse dei quark (non quark costituenti) risultano soddisfare le relazioni

$$m_u \approx m_d \approx 10^{-3} \Lambda_{QCD} \quad m_s \approx 10^{-1} \Lambda_{QCD} \quad m_c \approx \Lambda_{QCD} \quad (2.5)$$

e le varie simmetrie corrispondono alle ipotesi

$$\begin{aligned} SU(2) \quad m_u &= m_d \\ SU(3) \quad m_u &= m_d = m_s \\ SU(4) \quad m_u &= m_d = m_s = m_c \end{aligned} \quad (2.6)$$

che sono a mano a mano sempre più malamente soddisfatte.

3 Cenni sulle rappresentazioni di $SU(3)$

L'insieme di elementi $T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n}$ è un tensore di rango (n, m) se sotto $SU(3)$ trasforma come

$$T_{a_1 \dots a_m}^{i_1 \dots i_n} \rightarrow U_{j_1}^{i_1} \dots U_{j_n}^{i_n} (U^\dagger)_{a_1}^{b_1} \dots (U^\dagger)_{a_m}^{b_m} T_{b_1 \dots b_m}^{j_1 \dots j_n} \quad (3.1)$$

dove U è la matrice di trasformazione di $SU(3)$ e tutti gli indici possono assumere valori in 1, 2, 3. Sono tensori invarianti i tre tensori

$$\delta_j^i \quad \epsilon^{ijk} \quad \epsilon_{ijk} \quad (3.2)$$

Contraendo un tensore di tipo (n, m) con i tensori invarianti si ottengono tensori di tipo $(n-1, m-1)$, $(n-2, m+1)$ e $(n+1, m-2)$ dati da

$$T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \delta_{i_a}^{j_b} \quad T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \epsilon_{j_{m+1} i_a i_{a'}} \quad T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n} \epsilon^{i_{n+1} j_b j_{b'}} \quad (3.3)$$

⁴La possibilità di una simmetria esatta che mescoli gradi di libertà interni (tipo isospin) e gradi di libertà di Lorentz, in modo da non necessitare multipletti con masse identiche, è esclusa dal teorema di Coleman-Mandula (vedi S. Weinberg "The quantum theory of fields, 3").

tensore irriducibile	rango	rappresentazione
1	(0, 0)	1
T^i	(1, 0)	3
T_i	(0, 1)	3*
T_j^i (a traccia nulla)	(1, 1)	8
T^{ij} (simmetrico)	(2, 0)	6
T_{ij} (simmetrico)	(0, 2)	6*
T^{ijk} (completamente simmetrico)	(3, 0)	10
T_{ijk} (completamente simmetrico)	(3, 0)	10*

Tabella 1: Elenco dei tensori irriducibili di rango più basso e delle corrispondenti rappresentazioni.

dove $1 \leq a, a' \leq n$ e $1 \leq b, b' \leq m$.

Un tensore (n, m) si dice irriducibile se non è possibile costruire effettuando contrazioni con i tensori invarianti un tensore di tipo (n', m') con $n' + m' < n + m$. In particolare un tensore irriducibile deve avere tutte le tracce (effettuate contraendo un indice superiore con un inferiore) nulle e deve essere simmetrico rispetto a tutte le coppie $(i_a, i_{a'})$, $(j_b, j_{b'})$ di indici.

Teorema: le rappresentazioni irriducibili di $SU(3)$ sono associate ai suoi tensori irriducibili

Le rappresentazioni sono tipicamente indicate con la dimensione della rappresentazione, ad es. **3**, **6**. Le rappresentazioni coniugate sono quelle in cui si scambiano gli indici superiore ed inferiore e sono indicate da un apice *. Le rappresentazioni in cui gli indici inferiori e superiori compaiono in egual numero sono dette reali e coincidono con le loro coniugate (motivo per cui non esiste la **8***). La rappresentazione **3** è anche detta rappresentazione fondamentale (o definente) mentre la **8** è detta rappresentazione aggiunta.

Utilizzando il metodo tensoriale è anche possibile scomporre un prodotto di due rappresentazioni nella somma di rappresentazioni irriducibili analogamente a quanto succede con le somme dei momenti agolari. Vediamo qualche esempio.

3 \times **3**: indichiamo con A^i e B^j i due tensori delle rappresentazioni, quindi si deve scomporre in rappresentazioni irriducibili $T^{ij} = A^i B^j$. Se introduciamo

$$S^{ij} = \frac{T^{ij} + T^{ji}}{2} \quad A^{ij} = \frac{T^{ij} - T^{ji}}{2} \quad (3.4)$$

allora $T^{ij} = A^{ij} + S^{ij}$ e S corrisponde alla rappresentazione irriducibile **6**. Il termine A^{ij} non è irriducibile, in quanto contraendolo diventa

$$V_k = A^{ij} \epsilon_{ijk} \quad (3.5)$$

e V_k corrisponde alla **3***, quindi

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{3}^* + \mathbf{6} \quad (3.6)$$

3* \times **3**: in questo caso si deve ridurre $T_j^i = A_i B^j$ e questo si ottiene procedendo come segue: si considerano

$$C_j^i = T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i T_k^k \quad D = T_k^k \quad (3.7)$$

entrambi questi tensori costruiti con T sono irriducibili e corrispondono alle rappresentazioni **8** e **1**, quindi

$$\mathbf{3}^* \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{8} \quad (3.8)$$

3 \times **3** \times **3**: si deve ridurre il generico tensore a tre indici superiori T^{ijk} . Si possono costruire immediatamente i due tensori

$$A = \epsilon_{ijk} T^{ijk} \quad D^{ijk} = T^{ijk} + \text{permutazioni simmetriche} \quad (3.9)$$

che corrispondono rispettivamente allo stato di singoletto e decupletto. Si possono poi costruire 3 tensori considerando le permutazioni antisimmetrizzate di una coppia di indici. Di questi solo 2 sono indipendenti⁵, ad esempio

$$M_1^{ijk} = T^{ijk} - T^{ikj} \quad M_2^{ijk} = T^{ijk} - T^{jik} \quad (3.10)$$

e contraendo si ottengono i tensori

$$O_{1n}^i = M_1^{ijk} \epsilon_{jkn} \quad O_{2n}^k = M_2^{ijk} \epsilon_{ijn} \quad (3.11)$$

che corrispondono a due **8**, quindi

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{8} + \mathbf{8} + \mathbf{10} \quad (3.12)$$

Maggiori dettagli sul metodo tensoriale per le rappresentazioni dei gruppi possono essere trovate in T. D. Lee “Particle physics and introduction to field theory” mentre una procedura grafica è esposta in T.-P. Cheng, L.-F. Li “Gauge theory of elementary particle physics”.

Chiaramente il metodo esposto per scomporre i prodotti di rappresentazioni in rappr. irriducibili diventa poco agevole col crescere del numero di fattori. Un metodo industriale di procedere è quello che usa i tableaux di Young esposto ad esempio in T.-P. Cheng, L.-F. Li “Gauge theory of elementary particle physics”. Una referenza di carattere generale, che copre circa ogni aspetto delle rappresentazioni e delle applicazioni di $SU(3)$ è H. Georgi “Lie algebras in particle physics”.

4 L'introduzione dei quark

L'isospin viene inserito all'interno della simmetria $SU(3)$ di sapore con la seguente inclusione:

$$U \in SU(2) \rightarrow \begin{pmatrix} U & \vec{0} \\ \vec{0}^T & 1 \end{pmatrix} \in SU(3) \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

e ogni rappresentazione di $SU(3)$ può essere decomposta in rappresentazioni dell'isospin. Il modo preciso in cui ciò può essere effettuato è esposto in T.-P. Cheng, L.-F. Li “Gauge theory of elementary particle physics”.

Consideriamo i mesoni pseudoscalari: il loro numero è 9, inoltre l' η' è notevolmente più pesante di tutti gli altri mesoni e corrisponde a $T_3 = 0$ e $Y = 0$, quindi è ragionevole supporre che il mesone η' sia un singoletto di sapore e che i restanti mesoni pseudoscalari siano i componenti di una rappresentazione **8** del gruppo di sapore (un ottetto). Analogamente anche i nove mesoni pseudovettoriali corrispondono ad un singoletto (ϕ) ed un ottetto. Per quanto riguarda i barioni in Fig. (4)-(5) essi costituiscono rispettivamente un ottetto ed un decupletto di sapore.

L'interpretazione naturale della simmetria di isospin e della sua generalizzazione di sapore è che gli adroni siano costituiti da tre oggetti elementari, quark, che corrispondono alla rappresentazione **3** di $SU(3)$. Di questi due sono associati al numero quantico di isospin, mentre appare naturale associare il terzo alla ipercarica o alla stranezza. I due quark di isospin sono l'up (u) e il down (d) mentre il terzo è il quark strano (s). Si suppone inoltre che la rappresentazione **3*** corrisponda agli antiquark. Per riprodurre le proprietà di spin degli adroni l'ipotesi più semplice è che i quark abbiano spin $\frac{1}{2}$ e che i mesoni siano composti da una coppia quark-antiquark ed i barioni da tre quark.

Se indichiamo con q^j il tripletto dei quark, un tensore irriducibile che trasforma come un ottetto è dato da

$$O_j^i = q^i q_j - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q_k \quad (4.2)$$

⁵Questo si vede così: il tensore completamente antisimmetrico A^{ijk} (che è equivalente al singoletto A), si scrive come $A^{ijk} = (T^{ijk} - T^{ikj}) + (T^{jki} - T^{jik}) + (T^{kij} - T^{kji})$ ed i termini tra parentesi sono antisimmetrici per $j \leftrightarrow k$, $i \leftrightarrow k$, $i \leftrightarrow j$, quindi i 3 tensori antisimmetrizzati rispetto a 2 indici non sono indipendenti, il terzo si riscrive in termini dei primi due e di A .

L'isospin può essere ottenuto con le associazioni

$$u = |\uparrow\rangle \quad d = |\downarrow\rangle \quad (4.3)$$

e per le antiparticelle si ha

$$\bar{u} = -|\downarrow\rangle \quad \bar{d} = |\uparrow\rangle \quad (4.4)$$

Per il segno meno vedi Sez. (1).

Le funzioni d'onda dei mesoni pseudoscalari si possono ottenere imponendo che trasformino come un ottetto della simmetria $SU(3)$ di sapore e riproducano i valori noti dell'isospin. Il risultato che si trova è

$$\begin{aligned} \pi^+ &\sim u\bar{d} & \pi^- &\sim d\bar{u} \\ \pi^0 &\sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) \\ K^+ &\sim u\bar{s} & K^- &\sim s\bar{u} \\ K^0 &\sim d\bar{s} & \bar{K}^0 &\sim s\bar{d} \\ \eta^0 &\sim \frac{1}{\sqrt{6}}(2s\bar{s} - u\bar{u} - d\bar{d}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove il simbolo \sim significa che entrambi i membri trasformano nello stesso modo sotto il sapore. Utilizzando le Eq. (4.3)-(4.4) si vede ad esempio che per quanto riguarda l'isospin le funzioni d'onda dei pioni trasformano come

$$\pi^+ \sim |\uparrow\uparrow\rangle \quad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad \pi^- \sim |\downarrow\downarrow\rangle \quad (4.6)$$

cioè formano un tripletto di isospin, mentre per l' η^0 si ha

$$\eta^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (4.7)$$

cioè è un singoletto di isospin (per ipotesi il quark s non contribuisce all'isospin).

L'ottetto dei mesoni pseudoscalari può quindi essere scritto nella forma Eq. (4.2) in termini dei campi delle particelle:

$$O(0^-) = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} - \frac{\eta^0}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & \frac{2\eta^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

e l'ottetto dei mesoni pseudovettoriali può essere ottenuto in modo praticamente identico:

$$O(1^-) = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} - \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} - \frac{\omega^0}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & \frac{2\omega^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Utilizzando le funzioni d'onda dell'ottetto mesonico è a questo punto semplice ottenere le proprietà dei quark, che risultano rappresentate graficamente in Fig. (6). Le cariche elettriche sono $q_u = \frac{2}{3}|e|$, $q_d = -\frac{1}{3}|e|$ e $q_s = -\frac{1}{3}|e|$.

Per quanto riguarda i barioni si può procedere in modo analogo, anche se chiaramente le espressioni esplicite risultano leggermente più complicate. Le espressioni equivalenti alla Eq. (4.2) per l'ottetto ed il decupletto barionico sono

$$\begin{aligned} B_j^i &= q^i q^a q^b \epsilon_{abj} - \frac{1}{3} \delta_j^i q^k q^a q^b \epsilon_{abk} \\ D^{ijk} &= q^i q^j q^k + \text{permutazioni simmetriche} \end{aligned} \quad (4.10)$$

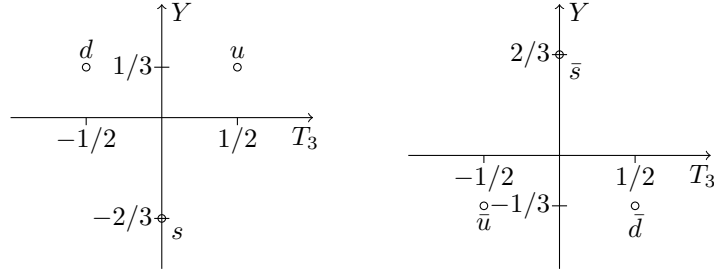


Figura 6: I tripletti $\mathbf{3}$ e $\mathbf{3}^*$ di quark e antiquark.

Per quanto riguarda l'ottetto barionico si trova

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & \frac{2\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

tuttavia per la determinazione delle funzioni d'onda c'è una piccola complicazione che sarà analizzata in seguito. Per quanto riguarda il decupletto si ha invece semplicemente

$$\begin{aligned} \Omega^- &\sim sss \\ \Xi^{*0} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu) \\ \Xi^{*-} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd) \\ \Sigma^{*+} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(suu + usu + suu) \\ \Sigma^{*0} &\sim \frac{1}{\sqrt{6}}(sud + sdu + usd + dsu + uds + dus) \\ \Sigma^{*-} &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(sdd + dsd + sdd) \\ \Delta^{++} &\sim uuu \\ \Delta^+ &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(duu + udu + uud) \\ \Delta^0 &\sim \frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu) \\ \Delta^- &\sim ddd \end{aligned} \quad (4.12)$$

Con questo semplice modellino si riescono a riprodurre molti aspetti della fisica di mesoni e barioni, tuttavia esso presenta due problemi di non poco conto che saranno ora analizzati:

1. a questo livello è incompatibile con il principio di Pauli
2. perchè non si osservano sperimentalmente i quark e le rappresentazioni $\mathbf{6}$ di sapore?

5 Problemi del modello e loro soluzione

In teoria quantistica dei campi il teorema di spin-statistica afferma che la funzione d'onda di un sistema di particelle identiche con spin intero deve essere completamente simmetrica rispetto allo

scambio di due qualunque particelle mentre la funzione d'onda di un sistema di particelle identiche con spin semi-intero deve essere completamente antisimmetrica.

Nel modello a quark con invarianza $SU(3)$ di sapore, i quark u , d ed s sono visti come diversi stati di una stessa particella, quindi sono da considerarsi come particelle identiche.

Si è visto nella sezione precedente che per riprodurre le proprietà dei barioni leggeri i quark devono avere spin $\frac{1}{2}$, inoltre è un risultato generale in meccanica quantistica che lo stato fondamentale di un sistema di particelle interagenti tramite un potenziale centrale deve essere uno stato a momento angolare orbitale nullo. Appare quindi naturale supporre, ad esempio, che i quark che compongono i barioni del decupletto corrispondano a stati di momento orbitale nullo, mentre ai barioni più pesanti corrispondano momenti più elevati.

A questo punto si ottiene però il problema con la statistica: le funzioni d'onda di sapore dei barioni del decupletto sono simmetriche per scambio di due particelle, inoltre i barioni del decupletto hanno spin $\frac{3}{2}$ e la rappresentazione $\frac{3}{2}$ dello spin è completamente simmetrica ($|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$ etc.). Infine, se si suppone che i quark siano in uno stato di momento angolare orbitale nullo, anche la componente orbitale della funzione d'onda risulta essere completamente simmetrica. Se ne otterrebbe che la funzione d'onda dei quark che compongono i barioni del decupletto è simmetrica invece che antisimmetrica per scambio di due quark, cosa che è vietata dal teorema di spin-statistica.

Un possibile modo di evadere questa conclusione è supporre che i quark possiedano un grado di libertà aggiuntivo (colore) e che quindi nella funzione d'onda debba essere presente anche il termine di colore, che se totalmente antisimmetrico risolverebbe il problema della simmetria della funzione d'onda del decupletto barionico. Una possibile simmetria di colore che risolve i problemi del modello a quark costituenti è la $SU(3)$. Si vedranno in seguito alcuni risultati di QCD che, quando confrontati con gli esperimenti, confermano che il numero di colori debba essere 3. Notiamo esplicitamente che, nonostante siano entrambe simmetrie $SU(3)$, la simmetria di sapore e quella di colore non hanno nulla in comune l'una con l'altra, inoltre mentre il sapore è una simmetria approssimata, quella di colore risulta essere una simmetria esatta della teoria.

Supponiamo quindi che i quark, oltre a trasformare come la rappresentazione $\mathbf{3}$ del sapore, trasformino anche come la rappresentazione $\mathbf{3}$ del colore. Vediamo come questo possa risolvere il problema della simmetria della funzione d'onda dei barioni del decupletto: se indichiamo con lettere greche gli indici di colore e con lettere latine quelli di sapore, un quark corrisponde a $q^{i\alpha}$, e se supponiamo che i barioni del decupletto siano un singoletto di colore otteniamo per la loro funzione d'onda di colore e sapore l'espressione

$$D^{ijk} \sim q^{i\alpha} q^{j\beta} q^{k\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} + \text{permutazioni simmetriche di } ijk \quad (5.1)$$

e la funzione d'onda complessiva di colore/sapore risulta antisimmetrica per scambio di due particelle. Poiché si è appena visto che la funzione d'onda di spin è simmetrica, come quella orbitale, la funzione d'onda totale è antisimmetrica e soddisfa quindi il teorema di spin-statistica.

Nel caso dei mesoni il problema con la statistica non si pone, in quanto un quark ed un anti-quark sono particelle diverse e la funzione d'onda non deve quindi soddisfare particolari richieste di statistica. L'analisi del caso mesonico aiuta però a capire quali rappresentazioni di colore sono permesse: consideriamo ad esempio il pione π^+ , che si è visto essere descritto a livello del sapore da una funzione d'onda del tipo $u\bar{d}$. Con l'introduzione del colore la funzione d'onda di sapore/colore diventa in generale $u(\alpha)\bar{d}(\beta)$, dove α e β sono due valori generici del colore e questo, senza altri vincoli, porterebbe all'esistenza di 3^2 stati degeneri con le proprietà del pione positivo, che chiaramente non sono osservati. Un modo per eliminare questa degenerazione è supporre che per qualche motivo gli stati fisici devono essere singoletti di colore. In questo modo la funzione d'onda del pione positivo diventa

$$\pi^+ \sim q^{u\alpha} q_{d\beta} \delta_{\alpha}^{\beta} \quad (5.2)$$

e sommando sui colori si elimina la degenerazione.

Nel caso dei barioni dell'ottetto il problema della simmetria è leggermente più intricato: mentre la funzione d'onda di sapore del decupletto è completamente simmetrica (ed analogamente la funzione d'onda di spin $\frac{3}{2}$), nel caso dell'ottetto sono presenti simmetrie miste. Si è visto in

precedenza, quando si è effettuata la riduzione del prodotto $\mathbf{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$, che per identificare le rappresentazioni $\mathbf{8}$ all'interno di questo prodotto è necessario antisimmetrizzare rispetto a *due* indici e questo può essere effettuato in soli due modi indipendenti (indichiamo con ψ_{12} , ψ_{13} e ψ_{23} le funzioni d'onda di sapore ottenute antisimmetrizzando rispetto al primo e secondo indice, primo e terzo o secondo e terzo). D'altra parte, anche le funzioni d'onda di spin di tre particelle di spin $\frac{1}{2}$ in uno stato con spin totale $\frac{1}{2}$ non sono completamente antisimmetriche o simmetriche, bensì antisimmetriche solo rispetto allo scambio di due indici (ad es. $|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$). Se indichiamo con S_{12} , S_{13} e S_{23} le funzioni d'onda di spin antisimmetriche rispetto allo scambio delle particelle indicate dai pedici, si può procedere nel seguente modo: se supponiamo che lo stato di colore debba essere un singoletto la funzione d'onda di colore è completamente antisimmetrica, supponendo ancora che la funzione orbitale corrisponda a momento angolare totale nullo, quindi completamente simmetrica, il teorema di spin-statistica impone che la funzione d'onda di sapore/spin debba essere completamente simmetrica e questa può quindi essere costruita come

$$\Psi(\text{ottetto barionico}) \propto \psi_{12}S_{12} + \psi_{13}S_{13} + \psi_{23}S_{23} \quad (5.3)$$

Nell'utilizzo pratico di questa espressione possono comparire alcune ambiguità nei segni relativi dei vari termini ed il modo più semplice di procedere è riscriverla come

$$\Psi(\text{ottetto barionico}) \propto \psi_{12}S_{12} + \text{permutazioni simmetriche} \quad (5.4)$$

in modo che tutti i segni risultino scelti in modo consistente.

Consideriamo ad esempio il caso di un protone con spin allineato lungo l'asse z ($S_z = \frac{1}{2}$): la sua funzione d'onda di sapore e di spin è proporzionale a

$$\begin{aligned} \Psi\left(p, S_z = \frac{1}{2}\right) &\propto (udu - duu)(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + (udu - uud)(|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) + \\ &\quad + (uud - duu)(|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) = \\ &= uud(2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) + udu(2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) + \\ &\quad + duu(2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (5.5)$$

È semplice vedere che la costante di normalizzazione deve essere $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, quindi

$$\begin{aligned} \Psi\left(p, S_z = \frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3\sqrt{2}}u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) - \frac{1}{3\sqrt{2}}u(\uparrow)u(\downarrow)d(\uparrow) - \frac{1}{3\sqrt{2}}u(\downarrow)u(\uparrow)d(\uparrow) + \\ &\quad + \text{permutazioni simmetriche} \end{aligned} \quad (5.6)$$

L'ipotesi che gli stati fisici debbano essere singoletti di colore risolve chiaramente anche il problema della non osservazione dei quark e di stati composti da due quark, in quanto per questi stati la funzioni d'onda di colore non può essere un singoletto.

Chiaramente questa ipotesi appare a questo punto come una ipotesi *ad hoc* introdotta per eliminare un problema del modello, ed in effetti questo è stato il modo in cui è stata introdotta. Una analisi più accurata di questo punto necessita dell'introduzione della cromodinamica quantistica (QCD) ovvero di una teoria di gauge basata sulla simmetria $SU(3)$ di colore. C'è da dire che anche dal punto di vista della QCD una dimostrazione analitica del confinamento dei quark al momento non esiste (ed è parte del problema da un milione di dollari riguardante le teorie di gauge non abeliane del Clay Mathematics Institute) tuttavia esistono oramai una quantità impressionante di dati provenienti da simulazioni di QCD su reticolo (lattice QCD o LQCD) a conferma del fatto che la QCD predice il confinamento del colore.

In particolare nelle simulazioni è possibile studiare l'andamento della forza esercitata tra due sorgenti di colore *statiche* predetto dalla QCD. A piccola distanza ($\ll 1fm$), poichè la QCD è asintoticamente libera, teoria delle perturbazioni è applicabile e si ottiene un potenziale di tipo coulombiano, $V(r) \sim \frac{e}{r}$. Più interessante è quello che succede per $r \sim 1fm$: il potenziale tra un quark ed un anti-quark statici cresce linearmente con la distanza $V(r) \sim \sigma r$ ed è questo effetto

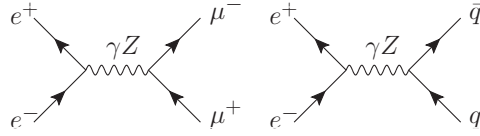


Figura 7: (sinistra) diagramma corrispondente all'ordine perturbativo più basso per la sezione d'urto $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ (destra) la stessa cosa per $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})$.

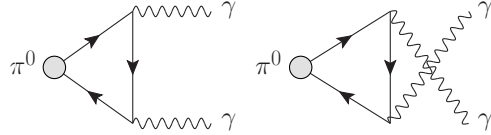


Figura 8: I due diagrammi che contribuiscono all'ordine perturbativo più basso al decadimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Il blob rappresenta l'inserzione del pione.

che è responsabile del confinamento dei quark. La costante σ è nota in LQCD come tensione di stringa, in quanto l'immagine intuitiva che si ottiene è che una coppia quark-antiquark sia legata da una stringa avente densità di energia per unità di lunghezza costante ed uguale a σ . Quando r cresce, l'energia immagazzinata dalla stringa cresce linearmente con la distanza e ad un certo punto supererà la massa di due mesoni, quindi diventa energeticamente favorita la creazione di una coppia quark-antiquark dal vuoto che si legano alle due cariche di colore statiche producendo due mesoni. Questo fenomeno è noto come rottura di stringa.

Dalle simulazioni segue quindi che il potenziale tra una coppia statica di cariche di colore è, per distanze inferiori alla distanza di rottura di stringa, ben descritto da

$$V(r) \approx \frac{c}{r} + \sigma r \quad (5.7)$$

Questo potenziale può quindi essere utilizzato per descrivere gli stati legati dei quark pesanti (il quarkonio) e risulta effettivamente descriverne in modo corretto lo spettro. La tensione di stringa risulta sperimentalmente essere dell'ordine di $\sigma \approx 1 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$.

Dal punto di vista sperimentale l'esistenza di tre diversi stati di colore può essere vista in esperimenti di scattering inclusivi, ad esempio

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma, Z^0 \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.8)$$

che all'ordine più basso in QCD risulta essere uguale a

$$R \approx N_c \sum_{u,d,s,\dots} Q_i^2 \quad (5.9)$$

dove N_c è il numero di colori, $Q_i|e|$ la carica elettrica del quark i -esimo e la somma è estesa a tutti i canali aperti alla data energia del centro di massa (in questo modo si può anche determinare, al variare dell'energia del centro di massa, il numero dei quark)⁶.

Una altra verifica classica del fatto che esistono 3 stati di colore è il decadimento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, che è legato alla anomalia chirale abeliana. La larghezza di decadimento può essere mostrata essere (vedi ad es. S. Weinberg "The quantum theory of fields, 2")

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) = [N_c(Q_u^2 - Q_d^2)]^2 \left(\frac{\alpha^2}{64\pi^3} \right) \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2} \quad (5.10)$$

⁶Per vari grafici di R vedi ad esempio <http://pdg.lbl.gov/2012/reviews/rpp2012-rev-cross-section-plots.pdf>

dove $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ è la costante di struttura fine e $f_\pi \approx 92.4\text{MeV}$ è la costante di decadimento del processo debole $\pi^- \rightarrow \mu\bar{\nu}_\mu$. Inserendo i valori numerici si ottiene

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) \approx \left(\frac{N_c}{3}\right)^2 \times 7.7\text{eV} \quad (5.11)$$

e il risultato sperimentale è $7.83 \pm 0.37\text{eV}$, in ottimo accordo solo con $N_c = 3$.

Infine $N_c = 3$ è anche imposto da un argomento teorico non banale ma molto stringente: se si considera una teoria di gauge non abeliana come il modello standard, corrispondente ad un gruppo $SU(N_c) \times SU(2) \times U(1)$, la condizione di cancellazione delle anomalie chirali impone $N_c = 3$ affinché il modello sia consistente (vedi ad es. S. Weinberg “The quantum theory of fields, 2”).

6 Gell-Mann-Okubo, mixing e OZI

Si è fino ad ora supposto che le interazioni forti siano invarianti rispetto alla simmetria $SU(3)$ di sapore e si è visto che in questo modo si commette un errore dell'ordine del 10%. Il passo successivo consiste nel supporre che anche nell'interazione forte sia presente una componente di violazione del sapore:

$$H_{strong} = H_{sym} + H_{asym} \quad (6.1)$$

e se si suppone che $H_{asym} \ll H_{sym}$ si può usare teoria delle perturbazioni. La componente della hamiltoniana H_{sym} trasforma sotto la simmetria $SU(3)$ di sapore come un singoletto (che è un modo difficile di dire che è invariante), l'ipotesi di Gell-Mann è stata supporre che la componente H_{asym} trasformi come un ottetto, cioè possa essere scritta in termini dei quark nella forma $q_i q^j$. Se si impone che H_{asym} conservi l'isospin e la carica elettrica, si vede che l'unica componente dell'ottetto che può contribuire è la $i = 3, j = 3$. Utilizzando questa forma per H_{asym} si possono ottenere delle relazioni tra le masse valide al primo ordine di teoria delle perturbazioni, note come formule di massa di Gell-Mann-Okubo. Per gli ottetti mesonici e barionici queste relazioni sono

$$\begin{aligned} 4m_K^2 &= m_\pi^2 + 3m_\eta^2 \\ \frac{m_\Sigma + 3m_\Lambda}{2} &= m_N + m_\Xi \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sperimentalmente queste relazioni diventano

$$\begin{aligned} 0.98\text{GeV}^2 &= 0.92\text{GeV}^2 \\ 2.23\text{GeV} &= 2.25\text{GeV} \end{aligned} \quad (6.3)$$

e sono quindi piuttosto ben soddisfatte. Per il decupletto barionico si ottiene invece

$$m_\Omega - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_\Delta \quad (6.4)$$

che sperimentalmente diventa

$$142\text{GeV} = 145\text{GeV} = 149\text{GeV} \quad (6.5)$$

Tramite questa relazioni Gell-Mann predisse l'esistenza di un barione con stranezza -3 e massa corrispondente all' Ω^- , che all'epoca non era ancora stato scoperto. Per le dimostrazioni delle formule di massa si rimanda a T. D. Lee “Particle physics and introduction to field theory”. Tutte queste formule di massa sono poi state riottenute ed estese in QCD tramite teoria delle perturbazioni chirali (vedi ad es. S. Weinberg “The quantum theory of fields, 2”).

La formula di massa per l'ottetto mesonico è stata mostrata funzionare abbastanza bene per i mesoni pseudoscalari. Ci si aspetterebbe che la sua immediata estensione al caso dei mesoni pseudovettoriali

$$3m_\omega^2 = 4m_{K^*}^2 - m_\rho^2 \quad (6.6)$$

funzionasse altrettanto bene, tuttavia usando $m_{K^*} \approx 890 \text{ MeV}$ e $m_\rho \approx 770 \text{ MeV}$ in questa equazione si otterrebbe $m_\omega \approx 926 \text{ MeV}$ molto distante dal valore sperimentale $m_\omega = 782 \text{ MeV}$.

Una possibile soluzione di questo problema è stata proposta da Picasso, Radicati, Sakurai e Zanello: come si vede dalla figura Fig. (3) esistono due mesoni pseudovettoriali che sono singoletti di isospin e di ipercarica, quindi è possibile che esista un mixing tra questi due stati, ovvero un mixing tra il singoletto di $SU(3)$ di sapore e le componenti dell'ottetto aventi gli stessi numeri quantici:

$$\begin{aligned}\omega &= V_8 \cos \theta - V_1 \sin \theta \\ \phi &= V_8 \sin \theta + V_1 \cos \theta\end{aligned}\tag{6.7}$$

dove V_8 e V_1 sono gli stati di puro ottetto e puro singoletto:

$$\begin{aligned}V_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\ V_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})\end{aligned}\tag{6.8}$$

La matrice di massa nella base di $SU(3)$ di sapore vale

$$M = \begin{pmatrix} m_{88}^2 & m_{81}^2 \\ m_{18}^2 & m_{11}^2 \end{pmatrix} \quad M = R \begin{pmatrix} m_\omega^2 & 0 \\ 0 & m_\phi^2 \end{pmatrix} R^T \quad R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}\tag{6.9}$$

da cui si deduce

$$\sin \theta = \sqrt{(m_{88}^2 - m_\omega^2)/(m_\phi^2 - m_\omega^2)}\tag{6.10}$$

Utilizzando Eq. (6.6) per determinare m_{88} si ottiene $m_{88} \approx 926 \text{ MeV}$ e quindi

$$\sin \theta \approx 0.76\tag{6.11}$$

È importante notare che questo valore è piuttosto vicino al valore di mixing ideale $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81$ per il quale si avrebbe

$$\begin{aligned}\omega^{(id)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\ \phi^{(id)} &= s\bar{s}\end{aligned}\tag{6.12}$$

quindi l' ω risulta composto in modo dominante dai soli quark u e d mentre il mesone ϕ è composto quasi esclusivamente da quark s .

Una altra peculiarità dei mesoni ω e ϕ sono i decadimenti: avendo gli stessi numeri quantici di isospin e di ipercarica sembrerebbe ragionevole supporre che (masse permettendo) i canali di decadimento di questi due mesoni fossero simili. Tuttavia mentre per l' ω il canale favorito ($\approx 90\%$) è il decadimento in tre pioni, per il ϕ il canale principale ($\approx 83\%$) è quello in $K\bar{K}$, nonostante questo canale sia quasi al limite dello spazio delle fasi ($2m_K = 989 \text{ MeV}$, $m_\phi = 1020 \text{ MeV}$).

Poichè si è appena visto che il mesone ϕ può essere ben approssimato da uno stato legato $s\bar{s}$, questi due decadimenti in pioni ed in kaoni possono essere graficamente descritti come in Fig. (9). Fu proposto indipendentemente da Okubo, Zweig e Iizuka (~ 1965) che i processi in cui gli stati finali possono essere raggiunti solo attraverso una annichilazione di una coppia $q\bar{q}$ siano soppressi rispetto agli altri (regola OZI). Questa regola empirica è stata giustificata solo una quindicina di anni dopo tramite lo sviluppo in $\frac{1}{N_c}$ in QCD (vedi ad es. L. Smilga "Lectures on quantum chromodynamics" o S. Coleman "Aspects of symmetries") tramite il quale si vede che le larghezze dei processi che violano la regola di OZI sono soppressi di un fattore $\frac{1}{N_c^2} \sim \frac{1}{10}$ rispetto alle altre. La giustificazione perturbativa della soppressione comincia ad essere corretta per i decadimenti del mesone J/Ψ ($\alpha_{strong}(E_{J/\Psi}) \approx 0.2$) ma è quantomeno discutibile per il caso del mesone ϕ , alla cui scala di energia la costante di accoppiamento forte risulta $\alpha_{strong}(E_\phi) = O(1)$.

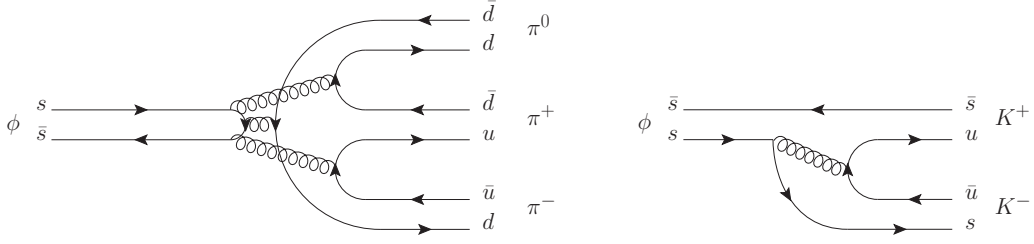


Figura 9: (sinistra) decadimento OZI non permesso, (destra) decadimento OZI permesso.

7 Momenti di dipolo magnetico e masse nel modello a quark costituenti

Utilizzando il modello a quark costituenti non è difficile ottenere previsioni per il momento di dipolo magnetico dei barioni: il vettore momento di dipolo magnetico di una particella di spin $\frac{1}{2}$ è (trascurando le correzioni radiative, che contribuiscono $O(10^{-2})$).

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{mc} \mathbf{S} \quad (7.1)$$

e si denota usualmente con il nome momento magnetico il valore di questo vettore per una particella polarizzata con valore massimo dello spin, cioè $\mu = \frac{q\hbar}{2mc}$. Per un dato barione B si ha quindi

$$\mu_B = \langle B \uparrow | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) | B \uparrow \rangle = \frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \mu_i \langle B \uparrow | S_z^{(i)} | B \uparrow \rangle \quad (7.2)$$

Consideriamo ad esempio il caso del protone, la cui funzione d'onda di spin/sapore è data da Eq. (5.6): si ha

$$(\mu_1 S_z^{(1)} + \mu_2 S_z^{(2)} + \mu_3 S_z^{(3)}) | u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) \rangle = \left[\mu_u \frac{\hbar}{2} + \mu_u \frac{\hbar}{2} - \mu_d \frac{\hbar}{2} \right] | u(\uparrow)u(\uparrow)d(\downarrow) \rangle \quad (7.3)$$

quindi il primo termine di Eq. (5.6) contribuisce al momento di dipolo magnetico con un fattore

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} \right)^2 \frac{2}{\hbar} \sum_{i=1}^3 \mu_i \langle B \uparrow | S_z^{(i)} | B \uparrow \rangle = \frac{2}{9} (2\mu_u - \mu_d) \quad (7.4)$$

in modo identico si vede che il secondo ed il terzo termine di Eq. (5.6) contribuiscono con $\frac{1}{18}\mu_d$. Il risultato complessivo che si ottiene è

$$\mu_p = 3 \left[\frac{2}{9} (2\mu_u - \mu_d) + \frac{1}{18}\mu_d + \frac{1}{18}\mu_d \right] = \frac{1}{3} (4\mu_u - \mu_d) \quad (7.5)$$

dove il fattore moltiplicativo 3 è dovuto alle permutazioni simmetriche. In modo analogo è possibile ottenere espressioni per tutti i momenti di dipolo magnetici dell'ottetto barionico e fittando ottenere i valori delle masse dei quark costituenti, che risultano approssimativamente

$$m_u = m_d \approx 336 \text{ MeV} \quad m_s \approx 538 \text{ MeV} \quad (7.6)$$

Il momento magnetico del neutrone si ottiene da quello del pione scambiando $u \leftrightarrow d$, cioè $\mu_n = \frac{1}{3} (4\mu_d - \mu_u)$. Inoltre se si suppone che $m_u = m_d$ si ottiene $\mu_u = -2\mu_d$ e

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{6\mu_d}{-9\mu_d} = -\frac{2}{3} \quad (7.7)$$

e sperimentalmente questo valore vale $-0.68497945(58)$ che è in accordo ragionevole con il valore atteso.

Per i mesoni vale la seguente formula di massa approssimata, che è un analogo del termine iperfino in fisica atomica:

$$M(\text{mesone}) = m_1 + m_2 + A \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2} \quad (7.8)$$

dove A è una costante. Il prodotto degli spin può essere riscritto come (i quark hanno spin $\frac{1}{2}$)

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} \left([\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2]^2 - S_1^2 - S_2^2 \right) = \begin{cases} \hbar^2/4 & \text{per mesoni pseudovettoriali } s = 1 \\ -3\hbar^2/4 & \text{per mesoni pseudoscalari } s = 0 \end{cases} \quad (7.9)$$

ed i risultati di un fit con le masse sperimentali dei mesoni sono

$$m_u \approx m_d \approx 308 \text{MeV} \quad m_s \approx 483 \text{MeV} \quad (7.10)$$

Nel caso dei barioni la formula di massa diventa

$$M(\text{barione}) = m_1 + m_2 + m_3 + A \left[\frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3}{m_2 m_3} \right] \quad (7.11)$$

dove A è una nuova costante (in generale diversa da quella per i mesoni).

Il caso più semplice è quello in cui le masse dei quark che compongono il barione sono tutte uguali: in questo caso si può usare

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 = \frac{\hbar^2}{2} \left(j(j+1) - \frac{9}{4} \right) = \begin{cases} 3\hbar^2/4 & \text{decupletto } j = 3/2 \\ -3\hbar^2/4 & \text{ottetto } j = 1/2 \end{cases} \quad (7.12)$$

quindi in particolare per i nucleoni, le Δ e Ω^- si ha

$$M_N = 3m_u - \frac{3}{4} A \frac{\hbar^2}{m_u^2} \quad M_\Delta = 3m_u + \frac{3}{4} A \frac{\hbar^2}{m_u^2} \quad M_\Omega = 3m_s + \frac{3}{4} A \frac{\hbar^2}{m_s^2} \quad (7.13)$$

Nel decupletto ogni coppia di quark ha spin totale 1, quindi usando Eq. (7.9) si trova

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 = \frac{\hbar^2}{4} \quad (7.14)$$

Gli altri casi sono leggermente più difficili ed è necessario analizzare gli accoppiamenti parziali della funzione d'onda di spin (vedi ad es. D. Griffiths "Introduction to elementary particles").

Fittando con i valori sperimentali si ottiene

$$m_u \approx m_d \approx 363 \text{MeV} \quad m_s \approx 538 \text{MeV} \quad (7.15)$$