

# Note agli esperimenti

Claudio Bonati

25 gennaio 2018

## Indice

<b>1</b>	<b>Simmetrie discrete e applicazioni elementari</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Fotoni</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Proprietà dei pioni</b>	<b>9</b>
3.1	Lo spin del pione . . . . .	9
3.2	La parità intrinseca del pione . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Violazione della parità</b>	<b>11</b>
4.1	Il problema $\theta - \tau$ . . . . .	11
4.2	Esperimenti per rivelare una violazione della parità. Analisi teorica. . . . .	12
4.3	Cenni sui decadimenti $\beta$ nucleari . . . . .	15
4.4	L'esperimento di Wu et al. . . . .	16
4.5	La misura dell'elicità del neutrino . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Il sistema <math>K^0 - \bar{K}^0</math></b>	<b>20</b>
5.1	L'invarianza $CP$ e il sistema $K^0 - \bar{K}^0$ . . . . .	20
5.2	Oscillazioni di stranezza e rigenerazione . . . . .	21
5.3	Violazione della simmetria $CP$ . . . . .	23
	<b>Bibliografia</b>	<b>24</b>

# 1 Simmetrie discrete e applicazioni elementari

La parità è l'operatore che cambia segno a coordinate (e momenti): su uno stato con impulso  $\mathbf{p}$ ,  $|\psi(\mathbf{p})\rangle$ , l'operatore parità agisce come  $\hat{P}|\psi(\mathbf{p})\rangle = |\psi(-\mathbf{p})\rangle$  (i momenti angolari ed in particolare gli spin restano invariati sotto parità). Se indichiamo con  $\hat{\mathbf{P}}$  l'operatore impulso si ha<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\hat{P}\hat{\mathbf{P}}|\psi(\mathbf{p})\rangle &= \hat{P}\mathbf{p}|\psi(\mathbf{p})\rangle = \mathbf{p}\hat{P}|\psi(\mathbf{p})\rangle = \mathbf{p}|\psi(-\mathbf{p})\rangle \\ \hat{\mathbf{P}}\hat{P}|\psi(\mathbf{p})\rangle &= \hat{\mathbf{P}}|\psi(-\mathbf{p})\rangle = -\mathbf{p}|\psi(-\mathbf{p})\rangle\end{aligned}\quad (1.1)$$

quindi

$$[\hat{P}, \hat{\mathbf{P}}] = 2\hat{\mathbf{P}} \quad (1.2)$$

In questo modo si vede formalmente come possano essere autostati simultanei dell'operatore parità e dell'operatore impulso solo gli stati ad impulso totale nullo, che sono quindi gli unici per i quali ha senso parlare di parità dello stato.

Nella definizione  $P|\psi(\mathbf{p})\rangle = |\psi(-\mathbf{p})\rangle$  si è usata la possibilità di poter scegliere indipendentemente le fasi di  $|\psi(\mathbf{p})\rangle$  e  $|\psi(-\mathbf{p})\rangle$  in modo da eliminare una eventuale fase di differenza. Questo non è chiaramente possibile per  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ . La parità intrinseca di una particella è l'autovalore dell'operatore parità nel suo sistema di quiete e convenzionalmente si assegna parità intrinseca positiva al protone ed al vuoto. Si può mostrare che la parità intrinseca di una particella è legata alla parità intrinseca della sua antiparticella dalla relazione

$$P_{\bar{a}} = \begin{cases} \text{bosoni} & P_a \\ \text{fermioni} & -P_a \end{cases} \quad (1.3)$$

Consideriamo ad esempio il caso di un campo scalare carico  $\hat{\varphi}(x^0, \mathbf{x})$ : il fatto che il campo  $\hat{\varphi}$  abbia parità  $\eta$  definita significa che  $\hat{P}\hat{\varphi}(x^0, \mathbf{x})\hat{P}^\dagger = \eta\hat{\varphi}(x^0, -\mathbf{x})$ . Partendo dallo sviluppo in operatori di creazione e distruzione di  $\hat{\varphi}$

$$\hat{\varphi}(x^0, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left( \hat{a}(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} + \hat{b}(\mathbf{p})^\dagger e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} \right) \quad (1.4)$$

si vede che lo sviluppo di  $\hat{P}\hat{\varphi}\hat{P}^\dagger$  è:

$$\hat{P}\hat{\varphi}(x^0, \mathbf{x})\hat{P}^\dagger = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left( \hat{P}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{P}^\dagger e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} + \hat{P}\hat{b}(\mathbf{p})^\dagger\hat{P}^\dagger e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} \right) \quad (1.5)$$

Poichè lo sviluppo di  $\hat{\varphi}(x^0, -\mathbf{x})$  è (nel secondo passaggio si effettua il cambio di variabile  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  nell'integrale)

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(x^0, -\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left( \hat{a}(\mathbf{p})e^{i(-\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} + \hat{b}(\mathbf{p})^\dagger e^{-i(-\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0}} \left( \hat{a}(-\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} + \hat{b}(-\mathbf{p})^\dagger e^{-i(\mathbf{p}\mathbf{x} - p^0 x^0)} \right)\end{aligned}\quad (1.6)$$

si vede che affinché si abbia  $\hat{P}\hat{\varphi}(x^0, \mathbf{x})\hat{P}^\dagger = \eta\hat{\varphi}(x^0, -\mathbf{x})$  è necessario avere  $\hat{P}\hat{a}(\mathbf{p})\hat{P}^\dagger = \eta\hat{a}(-\mathbf{p})$  e  $\hat{P}\hat{b}(\mathbf{p})^\dagger\hat{P}^\dagger = \eta^*\hat{b}(-\mathbf{p})$ . Si ha allora per una particella (con impulso nullo)

$$\hat{P}|\text{particella}\rangle = \hat{P}\hat{a}(\mathbf{0})^\dagger|0\rangle = \hat{P}\hat{a}^\dagger(\mathbf{0})\hat{P}^\dagger\hat{P}|0\rangle = \eta^*\hat{a}(-\mathbf{0})^\dagger|0\rangle = \eta^*|\text{particella}\rangle \quad (1.7)$$

ed analogamente per una antiparticella

$$\hat{P}|\text{antiparticella}\rangle = \hat{P}\hat{b}(\mathbf{0})^\dagger|0\rangle = \hat{P}\hat{b}^\dagger(\mathbf{0})\hat{P}^\dagger\hat{P}|0\rangle = \eta\hat{b}(-\mathbf{0})^\dagger|0\rangle = \eta|\text{antiparticella}\rangle \quad (1.8)$$

Poichè  $\eta = \pm 1$  si vede che la parità intrinseca di una particella scalare è uguale alla parità intrinseca della rispettiva antiparticella. Per un campo non scalare il precedente argomento è complicato dal fatto che in generale si ha  $\hat{P}\hat{\psi}(x^0, \mathbf{x})\hat{P}^\dagger = S\hat{\psi}(x^0, -\mathbf{x})$ , dove  $S$  è una matrice non banale che agisce sullo spin (vedi ad es. [1] §27, [2] §10.1, [3] §5.5).

La parità intrinseca del fotone si ottiene imponendo che il termine di interazione  $j_\mu A^\mu$  nella lagrangiana elettromagnetica sia invariante sotto parità. Poichè sotto parità  $j \equiv (\rho, \mathbf{j}) \rightarrow (\rho, -\mathbf{j})$ ,

<sup>1</sup> $\hat{P}$  commuta con  $\mathbf{p}$  in quanto  $\mathbf{p}$  è una costante (non un operatore) e quindi commuta con tutti gli operatori.

affinchè l'interazione sia invariante sotto parità si deve avere  $(A^0, \mathbf{A}) \rightarrow (A^0, -\mathbf{A})$ . Di conseguenza, ricordando che  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  ed usando  $\nabla \rightarrow -\nabla$ , si ottiene  $\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ . I fotoni sono gli stati fisici associati ad i modi trasversi di  $\mathbf{A}$  ed hanno quindi parità intrinseca negativa.

Consideriamo un sistema composto da una particella  $a$  e dalla sua antiparticella  $\bar{a}$ : la parità di questo sistema è data dal prodotto delle parità intrinseche moltiplicato per il termine di parità orbitale  $(-1)^\ell$  (valore che segue da  $Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ ), quindi  $P = P_a P_{\bar{a}} (-1)^\ell$  e

$$P = \begin{cases} \text{bosoni} & (-1)^\ell \\ \text{fermioni} & (-1)^{\ell+1} \end{cases} \quad (1.9)$$

Mentre la parità relativa di particella ed antiparticella è sempre ben definita, il valore della parità intrinseca di una particella è spesso convenzionale. Questo è legato al concetto di superselezione: si dice esistere una regola di superselezione nel caso in cui una legge di conservazione impedisca a qualunque osservabile di avere elementi di matrice non nulli tra gli stati  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ . In questo caso la fase relativa di questi due stati non è osservabile ed è quindi convenzionale. Esempi di regole di superselezione sono la conservazione della carica elettrica e del numero barionico. La parità intrinseca del neutrone è convenzionalmente definita come positiva in quanto la conservazione del numero barionico impone l'annullarsi di tutti gli elementi di matrice tra uno stato ad un neutrone ed il vuoto. Analogamente la fase relativa di un neutrone ed un protone non è fisicamente osservabile a causa della conservazione della carica. Il concetto di superselezione ed alcune sue conseguenze sono state introdotti in [4].

Una volta fissati alcuni valori di riferimento convenzionali per le parità intrinseche, gli altri potranno essere dedotti utilizzando la conservazione della parità stessa. Un caso particolare che è stato visto in precedenza è il fotone: poichè nella lagrangiana il fotone accoppia alla corrente fermionica, la parità intrinseca del fotone non dipende dal valore della parità intrinseca del fermione, ma solo dalla parità relativa di fermione ed antifermione, quindi è determinata dalla conservazione della parità. Un altro esempio che si vedrà nel seguito è quello della parità intrinseca del  $\pi^-$ , che può essere determinato conoscendo le parità intrinseche di neutrone e protone.

La coniugazione di carica  $\hat{C}$  è l'operatore che inverte le "cariche" delle particelle, dove con "cariche" si intende carica elettrica, numero barionico, isospin, stranezza, sapore, etc. Se si indica con  $\hat{Q}$  l'operatore che corrisponde ad una carica, con un ragionamento identico a quello fatto per  $\hat{P}$  e  $\hat{\mathbf{P}}$  si ottiene per l'operatore coniugazione di carica la relazione

$$[\hat{C}, \hat{Q}] = 2\hat{Q} \quad (1.10)$$

quindi ha senso parlare di valore intrinseco della coniugazione di carica solo per particelle con valore nullo di tutte le cariche: ad esempio fotone e  $\pi^0$ .

Il valore intrinseco della coniugazione di carica del fotone può essere ottenuto notando che il termine di interazione nella lagrangiana di QED è della forma  $\hat{A}_\mu \hat{j}^\mu$ , dove  $\hat{A}_\mu$  è il campo del fotone e  $\hat{j}^\mu$  è la corrente fermionica. Sotto coniugazione di carica  $\hat{C} \hat{j}^\mu \hat{C}^\dagger = -\hat{j}^\mu$  (che corrisponde al fatto che si sta cambiando la carica dei fermioni) quindi se si vuole che l'interazione sia invariante sotto coniugazione di carica si deve assumere  $\hat{C} \hat{A}_\mu \hat{C}^\dagger = -\hat{A}_\mu$ . Assumendo che il vuoto sia uno stato con valore di coniugazione di carica +1 si ha allora per lo stato ad un fotone  $|\gamma\rangle = \hat{A}_\mu |0\rangle$  (ricordiamo che  $\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu^\dagger$ ) che

$$\hat{C}|\gamma\rangle = \hat{C} \hat{A}_\mu \hat{C}^\dagger |0\rangle = -\hat{A}_\mu |0\rangle = -|\gamma\rangle \quad (1.11)$$

e quindi il fotone<sup>2</sup> ha  $C = -1$ .

Per procedere oltre è utile notare che se si hanno due particelle (non necessariamente distinguibili) con coniugazione di carica  $c_1$  e  $c_2$ , allora il valore della coniugazione di carica per la coppia

<sup>2</sup>Da un punto di vista di principio non è ovvio che l'operatore  $\hat{C}$  così definito possa essere implementato unitariamente nello spazio di Hilbert della teoria. Operativamente si introduce in modo esplicito l'operatore  $\hat{C}$  sugli stati ad una particella e poi si mostra che la hamiltoniana di QED è invariante sotto questa trasformazione.

di particelle è  $c_1 c_2$ , infatti lo stato a due particelle sarà una sovrapposizione lineare di termini  $|2\rangle = \hat{a}_1(\mathbf{p}_1)^\dagger \hat{a}_2(\mathbf{p}_2)^\dagger |0\rangle$  e per ognuno di questi termini si ha

$$\hat{C}|2\rangle = \hat{C}\hat{a}_1(\mathbf{p}_1)^\dagger \hat{C}^\dagger \hat{C}\hat{a}_2(\mathbf{p}_2)^\dagger \hat{C}^\dagger \hat{C}|0\rangle = c_1 c_2 \hat{a}_1(\mathbf{p}_1)^\dagger \hat{a}_2(\mathbf{p}_2)^\dagger |0\rangle = c_1 c_2 |2\rangle \quad (1.12)$$

A questo punto si può calcolare il valore della coniugazione di carica per il  $\pi^0$  utilizzando il fatto che è osservato il decadimento  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ , quindi per il  $\pi^0$  si ha  $C = +1$ . In generale la coniugazione di carica di un sistema di  $n$  fotoni è  $C = (-1)^n$  e l'invarianza sotto coniugazione di carica implica che non è possibile tramite l'interazione elettromagnetica convertire un numero pari di fotoni in un numero dispari di fotoni (teorema di Furry). In particolare, ad esempio, la reazione  $2\gamma \rightarrow 3\gamma$ , che è cinematicamente permessa, non può avvenire. In modo analogo il decadimento di un  $\pi^0$  in un numero dispari di fotoni, anche quando permesso dalla cinematica e dalla conservazione della parità, non può avvenire.

Un sistema composto da una particella e dalla sua antiparticella ha tutte le cariche nulle, quindi ad esso può essere associato un valore della coniugazione di carica. Per il calcolo del valore di  $C$  si può procedere in tre modi diversi, di cui il primo euristico:

1. Il metodo euristico (esposto ad es. in [5] §4.2.1) consiste nel notare che per il sistema particella antiparticella la azione di  $C$  corrisponde alla azione combinata di  $S$  (scambio degli spin) e  $P$ :

$$\begin{array}{ccc} & \left[ \begin{array}{cc} a \uparrow & \bar{a} \downarrow \end{array} \right] & \\ & & (S) \left[ \begin{array}{cc} a \downarrow & \bar{a} \uparrow \end{array} \right] \\ (C) \left[ \begin{array}{cc} \bar{a} \uparrow & a \downarrow \end{array} \right] & & (P) \left[ \begin{array}{cc} \bar{a} \uparrow & a \downarrow \end{array} \right] \end{array} \quad (1.13)$$

Per lo scambio degli spin si ha<sup>3</sup>

$$S = \begin{cases} \text{bosoni} & (-1)^s \\ \text{fermioni} & (-1)^{s+1} \end{cases} \quad (1.14)$$

infatti lo stato con  $S_z$  massimo  $|\uparrow\uparrow\rangle$  è sempre simmetrico per scambio di spin, ma nel caso di bosoni corrisponde a  $s$  pari, mentre nel caso di fermioni corrisponde a  $s$  dispari. Sia per bosoni che per fermioni, usando Eq. (1.9)-(1.14) si ottiene

$$C = PS = (-1)^{\ell+s} \quad (1.15)$$

Il motivo per cui questo metodo è euristico è che in realtà non è chiaro che non si stiano perdendo fasi: non si è in grado di discriminare tra  $C = PS$  (che è il risultato giusto) e  $C = -PS$  (che è sbagliato).

2. Si può estendere il principio di Pauli al caso dei sistemi particella-antiparticella ([6], [1] problema della sezione §27): in questo caso particella ed antiparticella sono viste come due diversi stati di una stessa particella e la funzione d'onda deve di conseguenza avere la corretta simmetria. La funzione d'onda viene scritta come il prodotto di un termine orbitale, un termine di spin ed un termine "di carica" e la parità di scambio è di conseguenza data da  $P_{sc} = C\tilde{P}S$ , dove  $\tilde{P} = (-1)^\ell$  è la parità di scambio orbitale (questa è una parità di scambio, non l'operatore parità, quindi le parità intrinseche non intervengono). In questo modo si ha

$$\begin{array}{ll} \text{bosoni} & +1 = C(-1)^{\ell+s} \\ \text{fermioni} & -1 = C(-1)^{\ell+s+1} \end{array} \quad (1.16)$$

e quindi  $C = (-1)^{\ell+s}$

---

<sup>3</sup>Formalmente questo può essere mostrato utilizzando la proprietà  $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_1, j_2; J, M \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_2, m_2; j_1, m_1 | j_1, j_2; J, M \rangle$  dei coefficienti di Clebsch Gordan: lo stato con  $J$  massimo,  $J^{max} = j_1 + j_2$  è sempre simmetrico e gli stati  $J^{max} - 1, J^{max} - 2, \dots$  sono alternativamente antisimmetrici e simmetrici.

3. Si scrive esplicitamente la forma dell'operatore  $\hat{C}$  sul campo quantizzato  $\hat{\Psi}$ , da cui si deducono le regole di trasformazione degli operatori di creazione e distruzione, quindi ([7], [2] §10.2, [3] §5.5) si verifica esplicitamente come trasforma lo stato  $\int f(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})b^\dagger(-\mathbf{p})|0\rangle d\mathbf{p}$ , dove  $a$  è l'operatore di distruzione della particella e  $b$  l'operatore di distruzione per l'antiparticella. Questa è una versione formalmente migliore del metodo esposto nel punto precedente: come passaggio intermedio si utilizza il fatto che gli operatori  $a^\dagger$  e  $b^\dagger$  anticommutano, che è quanto serve per poter generalizzare il principio di Pauli.

Esistono due stati legati di positrone ed elettrone (positronio): entrambi hanno momento angolare orbitale  $\ell = 0$ , però lo spin vale 0 o 1: sono il para-positronio (spin 0, in notazione spettroscopica  ${}^{2S+1}L_J$  indicato con  ${}^1S_0$ , vita media  $\approx 10^{-10}s$ ) e l'orto-positronio (spin 1,  ${}^3S_1$ , vita media  $\approx 10^{-7}s$ ). Utilizzando i risultati precedenti si ha

$$\begin{array}{llll} \text{para} & J = 0 & P = -1 & C = +1 \\ \text{orto} & J = 1 & P = +1 & C = -1 \end{array} \quad (1.17)$$

quindi si vede come il para-positronio può decadere solo in un numero pari di fotoni mentre l'orto-positronio può decadere solo in un numero dispari di fotoni. I canali preferenziali sono chiaramente para  $\rightarrow 2\gamma$  e orto  $\rightarrow 3\gamma$ , e le larghezze differiscono quindi per un fattore  $\alpha \approx 1/137$  che, insieme al diverso spazio delle fasi, giustifica la differenza di vita media.

## 2 Fotoni

Le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

e dalle prime due equazioni si ottiene

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (2.3)$$

dove  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  sono determinati a meno di una trasformazione di gauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla\psi \qquad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.4)$$

Fissiamo ora la gauge di Lorentz, definita dall'equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (2.5)$$

che corrisponde a scegliere una trasformazione di gauge  $\psi$  che soddisfa

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (2.6)$$

notiamo esplicitamente che questa gauge è definita a meno di una soluzione omogenea dell'equazione d'onda. Con questa scelta di gauge le equazioni di Maxwell per  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  assumono la forma

$$-\nabla^2\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 4\pi\rho \qquad -\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.7)$$

Nel caso particolare delle equazioni nel vuoto, sia  $\phi$  che  $\mathbf{A}$  soddisfano le equazioni d'onda omogenee e, poichè si è appena visto che la trasformazione per il passaggio alla gauge di Lorentz è definita a meno di una soluzione dell'equazione d'onda omogenea, si può imporre l'ulteriore vincolo che il potenziale scalare si annulli:  $\phi = 0$ . Un campo elettromagnetico nel vuoto è quindi descritto dalle equazioni

$$-\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad \phi = 0 \quad (2.8)$$

La funzione hamiltoniana di un campo elettromagnetico  $H = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3\mathbf{x}$ , scritta in termini dei gradi di libertà trasversi del campo  $\mathbf{A}$ , diventa la hamiltoniana di un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati, uno per ogni valore dell'impulso  $\mathbf{k}$  e per ognuna delle due polarizzazioni trasverse di  $\mathbf{A}$ . Le eccitazioni quantizzate di questi oscillatori sono i fotoni (per maggiori dettagli vedi ad es. [1], §2-3).

Poichè la funzione d'onda di un fotone di impulso assegnato  $\mathbf{k}$  è  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ , che è un vettore, è uso comune ma non completamente corretto dire che il fotone ha spin 1: questo non è formalmente corretto per almeno due motivi

- lo spin può essere definito come il momento angolare della particella nel suo sistema di riferimento di quiete, tuttavia non si può considerare il sistema di riferimento di quiete di un fotone che si muove con velocità  $c$
- una particella di spin 1 ha tre polarizzazioni, mentre un fotone ha solo due polarizzazioni

Da un punto di vista formale gli stati di un fotone non sono caratterizzati dallo spin, ma dalla elicità, che corrisponde alla proiezione dello spin sulla direzione di moto. Indicando con  $z$  la direzione del moto del fotone, le due polarizzazioni circolari corrispondono agli stati di elicità  $+1$  e  $-1$ , manca l'autovalore  $0$  che sarebbe presente nel caso di particelle massive di spin  $1$ .

Nonostante queste difficoltà, risulta comodo, da un punto di vista pratico, suddividere il momento angolare totale del fotone in un termine di spin (derivante dalla natura vettoriale di  $\mathbf{A}$  ed analogo ad uno spin  $1$ ) ed un termine orbitale derivante dallo sviluppo di  $\mathbf{A}(x)$  in onde sferiche, tuttavia un po' di attenzione è necessaria, vedremo ora alcuni casi. Notiamo innanzitutto che, essendo  $\mathbf{A}$  un vettore, sotto parità si ha

$$\hat{P}\hat{A}(x^0, \mathbf{x})\hat{P}^\dagger = -\hat{A}(x^0, -\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

in quanto la parità inverte le direzioni degli assi coordinati. L'equazione precedente è quello che si intende quando si dice, nuovamente in modo un poco approssimativo, che il fotone ha parità intrinseca negativa (la parità intrinseca è definita normalmente nel sistema di quiete, ci sono problemi analoghi a quelli della definizione dello spin) e da essa segue che per la componente corrispondente al momento angolare orbitale  $\ell$  si ha  $P = (-1)^{\ell+1}$ .

Vediamo ora quanti sono e che parità hanno gli stati ad una particella di una particella di spin  $1$  e parità intrinseca negativa trascurando inizialmente le difficoltà connesse con i fotoni: l'unico modo per avere  $j = 0$  è avere  $\ell = 1$  (e quindi  $P = +1 = (-1)^j$ ), mentre se  $j > 0$  sono possibili tre diversi valori di  $\ell$ :

$$\ell = j \quad P = (-1)^{\ell+1} = (-1)^{j+1} \quad (2.10)$$

$$\ell = j \pm 1 \quad P = (-1)^{\ell+1} = (-1)^j \quad (2.11)$$

A questi stati bisogna sottrarre quelli che corrispondono ad uno stato di fotone longitudinale, che può essere scritto nella forma  $\mathbf{k}f(\mathbf{k})$ , dove  $f(\mathbf{k})$  è una funzione scalare. Per questi stati si ha quindi  $j = \ell$  (dove  $\ell$  è il momento orbitale della funzione  $f$ ) e lo stato trasformato sotto parità è dato da

$$-(-\mathbf{k}f(-\mathbf{k})) = (-1)^\ell f(\mathbf{k}) = (-1)^j f(\mathbf{k}) \quad (2.12)$$

quindi uno degli stati con parità  $(-1)^j$  trovati in precedenza non è ammissibile per il fotone. Riassumendo si vede quindi che non esiste uno stato ad un fotone con momento angolare totale nullo, mentre per ogni  $j$  intero positivo esistono uno stato ad un fotone con parità  $(-1)^j$  ed uno con parità  $(-1)^{j+1}$ .

Lo stato con parità  $(-1)^j$  viene convenzionalmente indicato con il nome di stato di multipolo elettrico  $2^j$ , mentre lo stato con parità  $(-1)^{j+1}$  viene convenzionalmente indicato come lo stato di multipolo magnetico  $2^j$ . In particolare uno stato con  $j = 1$  e parità negativa è uno stato di dipolo elettrico, uno stato con  $j = 1$  e parità positiva è uno stato di dipolo magnetico ed uno stato con  $j = 2$  e parità positiva è uno stato di quadrupolo elettrico. Le funzioni d'onda dei fotoni con assegnato momento angolare totale e parità possono essere scritte in termini delle armoniche sferiche vettoriali (vedi ad es. [1] §7) e le transizioni corrispondenti a multipoli via via più elevati sono soppresse da potenze sempre maggiori di  $a/\lambda$ , dove  $a$  è una dimensione tipica del sistema e  $\lambda$  la lunghezza d'onda del fotone emesso (vedi ad es. [1] §46-47).

Il fatto che non esista uno stato ad un fotone con momento angolare totale nullo può essere mostrato anche con il seguente ragionamento: consideriamo un fotone polarizzato circolarmente che si muove lungo la direzione  $z$ . Poichè il sistema è invariante sotto rotazioni lungo  $z$ , l'autovalore della proiezione del momento orbitale lungo  $z$ , sia esso  $m$ , deve essere nullo, poichè altrimenti la funzione d'onda cambierebbe di  $e^{im\phi}$  per una rotazione di angolo  $\phi$  lungo  $z$ . Da  $j = 0$  segue che  $j_z = 0$  e poichè  $m = 0$  si dovrebbe anche avere  $s_z = 0$ , mentre per i fotoni solo gli stati  $s_z = \pm 1$  sono possibili.

Passiamo ora ad analizzare gli stati a due fotoni. Si utilizzeranno l'invarianza per rotazioni, la trasversalità dei fotoni, la simmetria di Bose ed il principio di sovrapposizione lineare. Le variabili utilizzabili sono le polarizzazioni  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  dei due fotoni ed il loro impulso relativo  $\mathbf{k}$ . La trasversalità

$j$	+	-
0	1	1
1	0	0
$2n, n > 0$	2	1
$2n + 1, n > 0$	1	0

Tabella 2.1: Numero degli stati a due fotoni con assegnato momento angolare totale  $j$  e parità positiva (+) o negativa (-).

impone  $\mathbf{k}\epsilon_i = 0$  e la simmetria di Bose implica che lo stato debba essere simmetrico per scambio dei fotoni, quindi per  $\epsilon_1 \leftrightarrow \epsilon_2$  e  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ . Infine il principio di sovrapposizione lineare implica che la funzione d'onda deve essere lineare sia in  $\epsilon_1$  che in  $\epsilon_2$ .

I valori in linea di principio possibili per il momento angolare totale sono i valori  $j$  interi. Partiamo dal caso  $j = 0$ . In questo caso la funzione d'onda deve essere uno scalare sotto rotazioni ed esistono due combinazioni che soddisfano tutte le condizioni precedentemente elencate:

$$P_+ = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \quad P_- = \mathbf{k} \cdot (\epsilon_1 \times \epsilon_2) \quad (2.13)$$

Sotto parità  $\epsilon_i \rightarrow -\epsilon_i$  e  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ , quindi  $P_+$  corrisponde ad uno stato a parità positiva, mentre  $P_-$  corrisponde ad uno stato con parità negativa.

Passiamo ora ad analizzare il caso  $j = 1$ : nel sistema del centro di massa la funzione d'onda di un sistema di spin 1 trasforma sotto rotazioni come un vettore, quindi nello spazio degli impulsi la funzione d'onda deve essere un vettore scrivibile in termini delle polarizzazioni dei due fotoni e del loro momento relativo. D'altra parte non esiste una combinazione non nulla di questi elementi che sia un vettore e che soddisfi le condizioni precedentemente imposte. Ad esempio

- $\epsilon_1 \times \epsilon_2$  non soddisfa la simmetria di Bose
- $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2$  soddisfa Bose ma non è un vettore
- $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)\mathbf{k}$  non soddisfa Bose
- $\mathbf{k} \times (\epsilon_1 \times \epsilon_2)$  soddisfa Bose e la simmetria per rotazioni ma  $\mathbf{k} \times (\epsilon_1 \times \epsilon_2) = \epsilon_1(\mathbf{k}\epsilon_2) - \epsilon_2(\mathbf{k}\epsilon_1) = 0$

Si deve quindi concludere che due fotoni non possono essere in uno stato con  $j = 1$  ed è quindi un risultato estremamente generale che una particella di spin 1 non può decadere in due fotoni.

Nel caso  $j = 2$  la funzione d'onda deve essere un tensore a due indici simmetrico ed a traccia nulla. In questo caso due stati di parità positiva ed uno di parità negativa sono possibili, che sono dati dalla versione simmetrizzata a traccia nulla di

$$P_{ij}^{+,1} = \epsilon_i^1 \epsilon_j^2 \quad P_{ij}^{+,2} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 k_i k_j \quad P_{ij}^- = k_i (\epsilon_1 \times \epsilon_2)_j \quad (2.14)$$

mentre nel caso  $j = 3$  esiste solo uno stato con parità positiva, dato dalla versione simmetrizzata a traccia nulla di

$$P_{ijl}^+ = [(\mathbf{k} \times \epsilon_1)_i \epsilon_j^2 + (\mathbf{k} \times \epsilon_2)_i \epsilon_j^1] k_l \quad (2.15)$$

Il caso di  $j$  pari con  $j > 2$  è analogo al caso  $j = 2$ , mentre il caso di  $j$  dispari e maggiore di 3 è analogo al caso  $j = 3$ . Un riassunto degli stati possibili è mostrato in Tab. (2.1) ([1] §9, [8]).



### 3 Proprietà dei pioni

Articoli riprodotti:

1. R. Durbin, H. Loar, J. Steinberger *The Spin of the Pion via the Reaction  $\pi^+ + d \rightleftharpoons p + p$* . Phys. Rev. **83**, 646 (1951).
2. W. Chinowsky, J. Steinberger *Absorption of Negative Pions in Deuterium: Parity of the Pion*. Phys. Rev. **95**, 1561 (1954).

#### 3.1 Lo spin del pione

Nel primo degli articoli riprodotti viene descritto l'esperimento che ha mostrato che il pione carico  $\pi^+$  ha spin nullo. Il punto di partenza per arrivare a questa conclusione è lo studio delle due reazioni  $\pi^+ + d \rightleftharpoons p + p$ .

Nel calcolo di una sezione d'urto, nel caso in cui i reagenti non siano polarizzati e non si sia interessati a rivelare una polarizzazione dei prodotti finali, si deve sommare sui possibili stati di polarizzazione finali e mediare sugli stati di polarizzazione iniziale. Se indichiamo con  $S_\pi$  lo spin del pione, le possibili polarizzazioni per il sistema  $p + p$  sono 4, mentre le possibili polarizzazioni per il sistema  $d + \pi^+$  sono (ricordiamo che il deutone ha spin 1)  $3(2S_\pi + 1)$ . Indicando con  $T$  l'operatore di interazione (ovvero la parte non banale della matrice di scattering), le sezioni d'urto differenziali nel sistema del centro di massa per il processo diretto ed inverso si possono scrivere nella forma (vedi ad es. [1] §64)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \rightarrow \pi^+d) &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{64\pi^2} \sum_{spin} |T_{pp \rightarrow \pi d}|^2 \right) \frac{p_\pi}{p_p} \frac{1}{s} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi^+d \rightarrow pp) &= \frac{1}{3(2S_\pi + 1)} \left( \frac{1}{64\pi^2} \sum_{spin} |T_{\pi d \rightarrow pp}|^2 \right) \frac{p_p}{p_\pi} \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dove  $s$  è il quadrato dell'energia nel centro di massa, la dinamica è contenuta negli elementi di matrice  $T$ , la somma è estesa agli spin iniziali e finale e tutti gli altri fattori sono puramente cinematici.

Una conseguenza fondamentale dell'invarianza per inversione temporale è il principio di reciprocità (vedi ad es. [1] §69, [2] §13.6, [3] §3.3, per il caso non relativistico [9] §135), che si esprime nella forma

$$\sum_{spin} |\langle \beta, \mathbf{p}_f, m_f | T | \alpha, \mathbf{p}_i, m_i \rangle|^2 = \sum_{spin} |\langle \alpha, \mathbf{p}_i, m_i | T | \beta, \mathbf{p}_f, m_f \rangle|^2 \quad (3.2)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono generici numeri quantici che identificano le particelle entranti ed uscenti,  $\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{p}_f$  sono gli impulsi entranti ed uscenti e  $m_i, m_f$  sono le proiezioni degli spin delle particelle incidenti ed uscenti. Utilizzando la precedente identità si ottiene quindi subito (a parità di energia nel centro di massa) la relazione tra le sezioni d'urto diretta ed inversa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(pp \rightarrow \pi^+d) = \frac{3}{4}(2S_\pi + 1) \frac{p_\pi^2}{p_p^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi^+d \rightarrow pp) \quad (3.3)$$

e se entrambe le sezioni d'urto sono misurate si può quindi estrarre lo spin  $S_\pi$  del pione, che risulta essere nullo.

#### 3.2 La parità intrinseca del pione

Nel secondo articolo riprodotto viene determinata la parità del  $\pi^-$  mostrando sperimentalmente che il processo

$$\pi^- + d \rightarrow n + n \quad (3.4)$$

può avvenire con i reagenti in onda  $s$ . Vediamo ora come questo implichi che la parità del  $\pi^-$  è negativa. Il deutone è uno stato con  $J^P = 1^+$ , si è appena visto che lo spin del pione è nullo e per il neutrone si ha  $J^P = \frac{1}{2}^+$ . Se si assume che l'energia del pione sia sufficientemente piccola da permettere la reazione solo in onda  $\ell = 0$  allora la parità dello stato iniziale è data da

$$P_i = P_d P_\pi (-1)^\ell = P_\pi \quad (3.5)$$

inoltre il momento angolare iniziale è 1. Dal vincolo che il momento angolare totale si conservi, si ottengono i seguenti possibili stati (dove  $L$  è il momento angolare orbitale dei due neutroni e  $P_f = (-1)^L$  è la parità dello stato finale):

$S$	$L$	$P_f$
0	1	-
1	0	+
1	1	-
1	2	+

Per lo stato a due neutroni si deve imporre che la parità di scambio, data da  $P_{sc} = (-1)^{S+1}(-1)^L$ , deve essere negativa, quindi  $S + L$  deve essere pari<sup>4</sup>. Di conseguenza i due neutroni devono essere in uno stato con  $S = L = 1$  e quindi  $P_f = -1$ . Se si assume la conservazione della parità si ottiene allora  $P_\pi = P_i = P_f = -1$

Il fatto che il deutone abbia parità positiva può essere dedotto con il seguente argomento: anche nel caso della funzione d'onda di neutrone e protone si deve imporre che la funzione d'onda sia antisimmetrica per scambio, tuttavia in questo caso l'isospin gioca un ruolo fondamentale. La parità di scambio è data da  $P_{sc} = (-1)^{S+L+T}$  quindi gli stati permessi per un sistema di due nucleoni sono (in notazione spettroscopica  $^{2S+1}L_J$ )

$$\begin{array}{lllll} T = 1 & ^1S_0 & ^3P_{0,1,2} & ^1D_2 & \cdots \\ T = 0 & ^3S_1 & ^1P_1 & ^3D_{1,2,3} & \cdots \end{array} \quad (3.6)$$

Il deutone è l'unico stato legato a due nucleoni, quindi deve essere un singoletto di isospin, inoltre dal fatto che il momento di dipolo magnetico del deutone è approssimativamente la somma dei momenti magnetici del neutrone e del protone si deduce che sia uno stato (quasi interamente) di onda  $S$ . La conservazione della parità implica allora che il deutone sia uno stato con parità positiva. Imponendo anche che il momento angolare totale sia 1 si vede che il deutone può solo essere una sovrapposizione degli stati  $^3S_1$  e  $^3D_1$ .

Sperimentalmente, alle energie degli esperimenti riportati, il processo  $\pi^- + d \rightarrow n + n$  avviene in circa il 70% dei casi, mentre nel restante 30% dei casi avviene la reazione  $\pi^- + d \rightarrow n + n + \gamma$ . Utilizzando un argomento basato sul principio del bilancio dettagliato e l'invarianza di isospin, è stata data in [10] una stima della probabilità di cattura del pione in onde con momento angolare  $\ell > 0$  ed è stato mostrato che, nel caso in cui il  $\pi$  sia uno scalare, la cattura in onda  $p$  può essere responsabile di non più dell'1% dei processi  $\pi^- + d \rightarrow n + n$  osservati, quindi l'unica conclusione che si può trarre è che il pione è pseudoscalare.

<sup>4</sup>Considerando anche l'isospin comparirebbe nella parità di scambio anche un termine  $(-1)^{T+1}$ , tuttavia per per il neutrone si ha  $T_z = -1/2$ , quindi lo stato con due neutroni ha  $T_z = -1$  e deve necessariamente avere  $T = 1$ , quindi  $(-1)^{T+1} = 1$  in questo caso.

## 4 Violazione della parità

Articoli riprodotti:

1. T. D. Lee, C. N. Yang *Question of Parity Conservation in Weak Interactions*. Phys. Rev. **104**, 254 (1956).
2. C. S. Wu et al. *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*. Phys Rev. **105**, 1413 (1957).
3. R. L. Garwin, L. M. Lederman, M. Weinrich *Observation of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: the Magnetic Moment of the Free Muon*. Phys. Rev. **105**, 1415 (1957).
4. F. S. Crawford et al. *Detection of Parity Nonconservation in  $\Lambda$  decay*. Phys. Rev. **108**, 1102 (1957).
5. L. Grodzins *Lifetime of a  $1^-$  Level in  $Sm^{152}$* . Phys. Rev. **109** 1014 (1958).
6. M. Goldhaber, L. Grodzins, A. W. Sunyar *Helicity of Neutrinos*. Phys. Rev. **109**, 1015 (1958).

### 4.1 Il problema $\theta - \tau$

Il cosiddetto problema  $\theta - \tau$  è stato il problema che ha dato inizio agli studi sulla violazione della parità nelle interazioni deboli a metà degli anni '50. Il problema consiste nell'esistenza di due particelle aventi parità intrinseca diversa ma uguali massa e vita media (la  $\theta$  e la  $\tau$  appunto). I loro modi di decadimento risultavano essere

$$\begin{aligned}\theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ \theta^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 \quad \theta^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ \tau &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0\end{aligned}\tag{4.1}$$

Dalla conservazione del momento angolare segue che sia la  $\theta$  che la  $\tau$  devono avere spin intero, inoltre nel caso della  $\theta^0$ , a causa del decadimento in due pioni identici, la statistica di Bose impone che lo spin sia non solo intero ma anche pari (in quanto sotto scambio si deve avere  $(-1)^\ell = +1$  e  $J = \ell$  poichè i pioni hanno spin nullo). Gli stati possibili di spin parità del  $\theta^+$  sono dunque

$$J^P(\theta^+) = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots\tag{4.2}$$

e quelli del  $\theta^0$  sono

$$J^P(\theta^0) = 0^+, 2^+, 4^+, \dots\tag{4.3}$$

in particolare il  $\theta^0$  deve avere parità positiva. Dallo studio dei decadimenti risulta che sia il  $\theta^+$  che il  $\theta^0$  hanno spin nullo e sono quindi stati  $0^+$ .

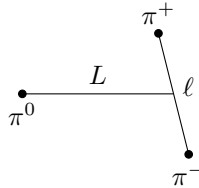


Figura 4.1: Momenti angolari relativi in un decadimento a tre pioni

Il problema ebbe origine quando nel 1954 Dalitz mostrò che anche il  $\tau$  ha spin 0. Da questo segue infatti che la parità del  $\tau$  debba essere negativa: in un decadimento a tre corpi, si hanno due momenti angolari orbitali (vedi Fig. (4.1)) e ricordando che la parità intrinseca dei pioni è negativa, si ottiene

$$P_\tau = (-1)^3(-1)^L(-1)^\ell \quad (4.4)$$

d'altra parte, affinché lo spin del  $\tau$  sia zero, si deve avere  $L = \ell$  e quindi si ha  $P_\tau = -1$ .

Alcune possibili spiegazioni che a posteriori possono essere ritenute “esotiche” per cercare di spiegare questo fenomeno mantenendo la conservazione della parità furono proposte ma non ressero il confronto con gli esperimenti per più di un paio di anni (ad esempio il meccanismo a cascata, [11]). Alla fine apparve quindi naturale interpretare il problema  $\theta - \tau$  come una manifestazione della non invarianza sotto parità dell'interazione debole nel decadimento di quello che è poi stata chiamato mesone  $K^0$ .

A questo punto si pone chiaramente il problema di stabilire se questa sia l'unica manifestazione della violazione di parità o se altre evidenze più dirette possano essere acquisite.

## 4.2 Esperimenti per rivelare una violazione della parità. Analisi teorica.

Una analisi completa delle evidenze sperimentali della simmetria sotto parità, insieme a proposte di esperimenti per osservare una sua eventuale violazione, è stata svolta nel lavoro allegato di Lee e Yang.

Il punto di partenza è l'osservazione che il fatto che sia stato possibile assegnare in modo coerente valori della parità intrinseca a stati atomici e nucleari è un forte indizio che le interazioni elettromagnetiche e forti sono invarianti sotto parità. Se queste interazioni violassero la simmetria sotto parità, allora gli stati stazionari dovrebbero essere delle sovrapposizioni lineari non banali di stati a parità definita (ad esempio  $|A\rangle \approx |A+\rangle + \mathcal{F}|A-\rangle$ , con  $|\mathcal{F}| \ll 1$ ) e dai dati sperimentali si possono porre dei limiti sul valore di  $\mathcal{F}$ . Il valore più stringente si ottiene dalla misura dei momenti di dipolo elettrici, che sono vincolati ad essere nulli sugli stati a parità definita:

$$\mathbf{d} = \langle n|\hat{\mathbf{d}}|n\rangle = \langle n|P^\dagger P\hat{\mathbf{d}}P^\dagger P|n\rangle = \langle n|P\hat{\mathbf{d}}P^\dagger|n\rangle = -\langle n|\hat{\mathbf{d}}|n\rangle = -\mathbf{d} \quad (4.5)$$

dove si è usato il fatto che  $P|n\rangle = \pm|n\rangle$  e che il momento di dipolo è un operatore dispari sotto parità:  $P\hat{\mathbf{d}}P^\dagger = -\hat{\mathbf{d}}$  (in quanto  $\hat{\mathbf{d}} = \sum e\mathbf{r}$ ).

L'annullarsi dei momenti di dipoli elettrici non è solo una conseguenza della simmetria sotto parità ma anche della simmetria sotto inversione temporale (che per il teorema CPT è equivalente alla simmetria CP), quindi un momento di dipolo elettrico non nullo sicuramente violerebbe la conservazione della parità tuttavia, anche in presenza di una violazione di parità, i momenti di dipolo dovrebbero ancora essere nulli se CP è una simmetria della teoria. Sotto inversione temporale il momento di dipolo elettrico trasforma secondo  $T\hat{\mathbf{d}}T^\dagger = \hat{\mathbf{d}}$  inoltre, se si indica con  $|j, m\rangle$  uno autosatato di momento angolare e momento angolare lungo l'asse  $z$ , il fatto che la hamiltoniana commuti con l'inversione temporale significa che (assumendo non siano presenti degenerazioni accidentali)  $T|j, m\rangle = \eta|j, -m\rangle$  con  $|\eta| = 1$ , e quindi si ha

$$\langle j, m|\hat{\mathbf{d}}|j, m\rangle = \langle j, m|T^\dagger T\hat{\mathbf{d}}T^\dagger T|j, m\rangle = \langle j, -m|\hat{\mathbf{d}}|j, -m\rangle \quad (4.6)$$

A questo punto si deve utilizzare una conseguenza del teorema di Wigner-Eckart nota come teorema della proiezione (vedi [12] §3.10) che afferma che per ogni operatore vettoriale  $\hat{\mathbf{V}}$  si ha

$$\langle j, m'|\hat{\mathbf{V}}|j, m\rangle = \frac{\langle j|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{V}}|j\rangle}{j(j+1)} \langle j, m'|\hat{\mathbf{J}}|j, m\rangle \quad (4.7)$$

dove  $\hat{\mathbf{J}}$  è il momento angolare e  $\langle j|\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{V}}|j\rangle$  non dipende da  $m$  in quanto  $\hat{\mathbf{J}} \cdot \hat{\mathbf{V}}$  è uno scalare. Usando questa espressione è immediato verificare che si ha

$$\langle j, -m|\hat{\mathbf{d}}|j, -m\rangle = -\langle j, m|\hat{\mathbf{d}}|j, m\rangle \quad (4.8)$$

da cui si vede che il momento di dipolo elettrico deve essere nullo sugli autostati del momento angolare di una teoria la cui hamiltoniana è invariante sotto inversione temporale.

La strada da seguire per identificare una violazione della simmetria sotto parità è quindi la seguente: si deve identificare una quantità che sia vincolata dalla simmetria sotto parità ad essere

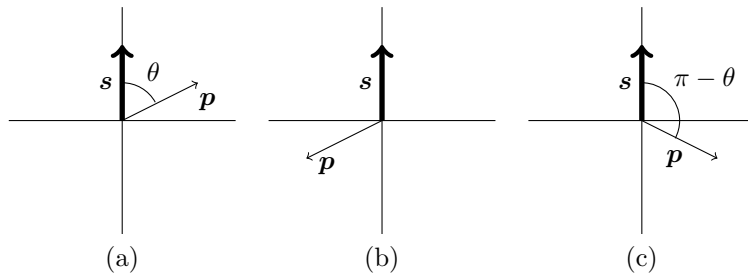


Figura 4.2: (a) Configurazione originale. (b) Configurazione dopo una inversione di parità. (c) Configurazione dopo una rotazione lungo l'asse di polarizzazione.

nulla, misurarla e verificare che sia effettivamente nulla. Nel caso ciò non avvenga significa che la parità non è una simmetria dell'interazione che governa il processo. Le osservabili naturali da utilizzare sono quindi le osservabili pseudoscalari, che cambiano segno sotto parità: nel caso di una interazione invariante per parità tutti i valori medi delle osservabili pseudoscalari devono essere nulli.

È interessante osservare come nel caso di un decadimento  $\beta$  non sia possibile costruire una quantità pseudoscalare non banale utilizzando solo gli impulsi delle particelle finali: consideriamo ad esempio il decadimento del neutrone,  $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ . Sembra ad esempio a prima vista potersi costruire la quantità pseudoscalare  $\mathbf{p}_p \cdot (\mathbf{p}_e \times \mathbf{p}_{\bar{\nu}})$ , tuttavia questa osservabile è identicamente nulla a causa della conservazione dell'impulso.

Il modo più semplice per costruire una quantità pseudoscalare è utilizzare uno spin:  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$  è una quantità pseudoscalare in quanto  $P : \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s}$  e  $P : \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ . Chiaramente questo presenta la difficoltà di dover usare particelle polarizzate (cioè con  $\langle \mathbf{s} \rangle \neq 0$ ), altrimenti quello che si osserva è una media sulle diverse polarizzazioni, che si annulla a causa dell'invarianza per rotazioni. Nel caso in cui si abbiano a disposizione particelle completamente polarizzate e l'impulso  $\mathbf{p}$  sia l'impulso di uno dei prodotti di decadimento, questa osservabile risulta proporzionale a  $\langle \cos \theta \rangle$  dove  $\theta$  è l'angolo tra lo spin e l'impulso. Se si vuole studiare non solo il valor medio  $\langle \cos \theta \rangle$  ma la forma esplicita della dipendenza da  $\theta$ , la simmetria sotto parità (insieme all'invarianza per rotazioni) impone la simmetria  $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$  in quanto ad ogni configurazione con dato valore di  $\theta$  corrisponde una configurazione legata ad essa da una trasformazione di simmetria con  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  (vedi Fig. (4.2)).

Se si usa il fatto che una proprietà fondamentale delle teorie di campo relativistiche (il teorema *CPT*) implica che la simmetria per coniugazione di carica è equivalente alla simmetria *PT*, una asimmetria in un esperimento di questo tipo può essere vista anche come evidenza indiretta della violazione della simmetria per coniugazione di carica: si ha infatti  $T : \mathbf{s} \rightarrow -\mathbf{s}$  e  $T : \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ , quindi  $TP : \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$ , inoltre considerando gli autostati del momento angolare si ha  $TP|j, m\rangle \propto |j, -m\rangle$  ma poichè  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$  è uno scalare sotto rotazioni il suo elemento di matrice non dipende dal valore di  $m$ , quindi la simmetria sotto l'invarianza *TP* implica  $\langle j, m | \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} | j, m \rangle = -\langle j, m | \mathbf{s} \cdot \mathbf{p} | j, m \rangle = 0$ .

Un modo simile di procedere, che però non richiede di avere particelle polarizzate, è considerare due reazioni consecutive. La coppia di processi inizialmente considerata fu

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (4.9)$$

L'idea è quella di rallentare il muone senza modificarne la polarizzazione fino a fermarlo, quindi di osservare la direzione dell'elettrone emesso rispetto alla direzione di moto iniziale del muone. Un esempio di una catena di decadimento di questo tipo è quello riportato in Fig. (4.3). Il processo iniziale è il decadimento di un pione fermo in un muone ed un neutrino. Scegliendo l'asse di quantizzazione del momento angolare nella direzione di moto dei prodotti di decadimento ed usando l'invarianza per rotazioni intorno a questo asse si vede che la proiezione del momento angolare orbitale su questo asse deve essere nulla, quindi gli spin del muone e del neutrino devono essere

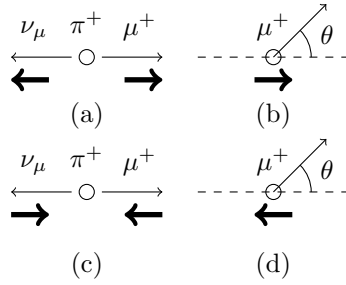


Figura 4.3: Esempi di processo  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  con a seguire  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ . La linea più spessa rappresenta la proiezione dello spin lungo l'asse di moto.

opposti in quanto il pione iniziale ha spin nullo. I due casi possibili (casi (a) e (c) della figura), sono collegati da una trasformazione di parità e da una rotazione di  $\pi$  intorno all'asse perpendicolare al foglio, quindi se c'è invarianza sotto parità sono equiprobabili.

La seconda parte del processo consiste nel decadimento del muone, che è identico al caso trattato in precedenza ed in cui una trasformazione di parità coincide (a meno di una rotazione), con l'inversione dello spin. L'invarianza per parità implica dunque la simmetria  $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$ .

Se in una misura sperimentale non si osserva la simmetria  $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$  si può quindi concludere che il muone prodotto dal primo decadimento ha una polarizzazione preferenziale (e quindi viola l'invarianza sotto parità che scambia le due polarizzazioni) e che il secondo decadimento è asimmetrico per  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  (quindi di nuovo l'invarianza sotto parità non è rispettata). Infatti se i muoni iniziali non avessero una polarizzazione preferenziale non si osserverebbe un effetto medio non nullo, se d'altra parte il secondo decadimento fosse simmetrico non si potrebbe osservare la eventuale asimmetria prodotta dal primo.

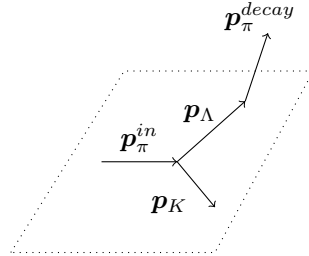


Figura 4.4: Gli impulsi delle particelle coinvolte nelle reazioni  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  e  $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$  (il protone iniziale è assunto essere fermo).

Un terzo possibile metodo di rivelare una violazione della simmetria sotto parità considera un processo di scattering anelastico seguito da un decadimento: si usa la catena di reazioni

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad \Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p \quad (4.10)$$

e si misura  $\langle \mathbf{p}_\pi^{decay} \cdot (\mathbf{p}_\pi^{in} \times \mathbf{p}_\Lambda) \rangle$ . Il significato geometrico di questa osservabile è piuttosto intuitivo (vedi Fig. (4.4)): il prodotto vettore identifica il piano in cui avviene lo scattering anelastico, quindi il prodotto scalare è positivo o negativo a seconda che il pione finale sia emesso con verso concorde o discorde con l'orientazione della normale al piano. Una osservabile analoga è

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}_\pi^{decay} \cdot (\mathbf{p}_\pi^{in} \times \mathbf{p}_\Lambda)}{|\mathbf{p}_\pi^{decay} \cdot (\mathbf{p}_\pi^{in} \times \mathbf{p}_\Lambda)|} \right\rangle = N_\pi^{up} - N_\pi^{down} \quad (4.11)$$

che è semplicemente la differenza del numero di pioni emessi in verso concorde e del numero di quelli emessi in verso discorde.

### 4.3 Cenni sui decadimenti $\beta$ nucleari

In un decadimento  $\beta$  nucleare, gli impulsi tipici dei leptoni (elettrone, neutrino o loro rispettive antiparticelle) nello stato finale sono  $p = \mathcal{O}(\text{MeV})$ , quindi da un punto di vista semiclassico il momento angolare di questi leptoni soddisfa la relazione

$$\ell \lesssim pd \approx \frac{\text{MeV}}{c} 5 \text{ fm} \approx \hbar \frac{5 \text{ MeV fm}}{200 \text{ MeV fm}} \quad (4.12)$$

dove si è assunto  $d = 5 \text{ fm}$  come dimensione nucleare tipica. Momenti orbitali non nulli sono quindi estremamente soppressi. D'altra parte leptoni con energie  $\mathcal{O}(\text{MeV})$  sono relativistici e le componenti di spin ed orbitale del momento angolare non si conservano separatamente, quindi l'unica conclusione che si può trarre è che ciascuno dei due leptoni viene emesso con grande probabilità in uno stato di momento angolare totale  $1/2$ . Le transizioni per le quali questa regola è soddisfatta vengono dette transizioni "permesse", essendo le transizioni cosiddette "vietate" sopresse da potenze crescenti di  $d/\lambda$ , con  $\lambda$  la lunghezza d'onda di De Broglie dei leptoni.

Le transizioni permesse si suddividono in transizione di tipo Fermi ed in tipo Gamow-Teller. Le transizioni di Fermi sono quelle in cui il momento angolare totale della coppia di leptoni è nullo, quelle di tipo Gamow-Teller sono quelle per le quali il momento angolare totale della coppia di leptoni vale 1. Le regole di selezione per gli spin nucleari per i due diversi tipi di reazioni permesse sono

**F**  $J_i = J_f$

**GT**  $|J_f - J_i| = 0, 1$  tranne  $0 \rightarrow 0$

Consideriamo ora la distribuzione angolare rispetto all'asse  $\hat{z}$  di uno dei leptoni emessi in un decadimento permesso. Nel caso di un decadimento di Fermi la funzione d'onda dei due leptoni è invariante per rotazioni, quindi nessuna dipendenza angolare può essere osservata. Nel caso Gamow-Teller questo non è più vero e per determinare la distribuzione si può procedere come segue: poichè il momento angolare totale del leptone deve essere  $1/2$  e potranno contribuire alla parte orbitale della funzione d'onda sia la componente  $s$  che la componente  $p$ , la funzione d'onda corrispondente al caso  $J_z = 1/2$  si può scrivere nella forma generale

$$|\psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle = c_s Y_{00} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + c_p \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} Y_{10} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right) \quad (4.13)$$

dove  $Y_{\ell m}$  sono le funzioni armoniche sferiche,  $|1/2, \pm 1/2\rangle$  sono i due stati di polarizzazione di spin e  $|c_s|^2 + |c_p|^2 = 1$ . La distribuzione angolare del leptone sarà allora data dal modulo quadro della funzione d'onda, cioè

$$\begin{aligned} |\psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}|^2 &= |c_s Y_{00}|^2 + |c_p|^2 \left( \frac{1}{3} |Y_{10}|^2 + \frac{2}{3} |Y_{11}|^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Re}(c_s^* c_p Y_{00}^* Y_{10}) = \\ &= \frac{1 + \alpha \cos \theta}{4\pi} \quad \alpha = \text{Re}(c_s^* c_p) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Per  $|\psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\rangle$  si ottiene analogamente la relazione

$$|\psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}|^2 = \frac{1 - \alpha \cos \theta}{4\pi} \quad (4.15)$$

e quindi, nel caso in cui non si misuri la polarizzazione del leptone finale, la distribuzione dei leptoni emessi in funzione dell'angolo  $\theta$  è data da

$$P(\theta) = \frac{1 + A \cos \theta}{4\pi} \quad A = \alpha [p(1/2) - p(-1/2)] \quad (4.16)$$





$s_z(\text{Eu} + e^-)$	$s_z(\nu_e)$	$s_z(\text{Sm}^*)$	$s_z(\gamma)$
1/2	-1/2	1	1
1/2	1/2	0	
-1/2	1/2	-1	-1
-1/2	-1/2	0	

Tabella 4.1: Possibili valori delle proiezioni degli spin lungo la direzione di moto delle varie particelle.

nel verificare che le misure non cambiano invertendo il campo magnetico esterno. Una differenza nei risultati fu osservata per le due diverse configurazioni del campo e fu inoltre verificato che aumentando la temperatura del campione la differenza scompariva in corrispondenza della perdita di polarizzazione del campione (segnalata dall'isotropia della radiazione  $\gamma$ ), vedi Fig. (2) di Wu et al., consistentemente con una violazione della simmetria sotto parità delle interazioni deboli.

#### 4.5 La misura dell'elicità del neutrino

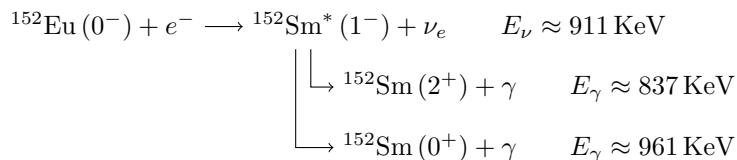


Figura 4.6: Schema di decadimento dell'eurobio 152 per cattura elettronica. I numeri in parentesi sono i valori di  $J^P$  degli stati nucleari.

In questa sezione si descriveranno le idee principali alla base dell'esperimento di Goldhaber et al. per la misura dell'elicità del neutrino. L'elicità di una particella è la proiezione dello spin lungo la direzione di moto ed è quindi proporzionale a  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}$ , quindi sotto parità l'elicità cambia segno. Il risultato finale dell'esperimento di Goldhaber, ovvero che il neutrino emesso nel decadimento  $\beta$  dell'eurobio ha sempre elicità compatibile con  $-1$ , è quindi una ulteriore prova della violazione della simmetria per parità da parte delle interazioni deboli.

La cattura elettronica avviene nel livello nucleare K, quindi con momento orbitale  $\ell = 0$ , quindi il momento angolare totale del sistema  $^{152}\text{Eu} + e^-$  è  $J = 1/2$ . Assumiamo come asse di quantizzazione per il momento angolare la direzione di moto  $\hat{z}$  del nucleo eccitato di samario. Poiché il sistema è invariante per rotazioni attorno a questo asse, la proiezione del momento orbitale del sistema  $^{152}\text{Sm}^* + \nu_e$  lungo questo asse deve essere nulla, quindi i valori possibili per la componente  $z$  dello spin del neutrino e del samario eccitato sono quelli riportati nella seconda e terza colonna di Tab. (4.1).

Supponiamo ora di essere in grado di selezionare, tra i fotoni di diseccitazione del samario, quelli che corrispondono alla transizione al fondamentale ( $1^- \rightarrow 0^+$ , transizione di dipolo elettrico) e che sono emessi lungo l'asse  $\hat{z}$ . Usando nuovamente il fatto che la proiezione del momento orbitale lungo l'asse di simmetria si annulla, si vede che questo tipo di decadimento è permesso solo per i nuclei di samario con  $s_z$  non nullo e, nei casi in cui questa configurazione di decadimento è permessa, i valori possibili di  $s_z$  per il fotone sono quelli riportati in Tab. (4.1). Da questa tabella si vede che, in base semplicemente a considerazioni sulla conservazione del momento angolare, l'elicità del fotone di diseccitazione  $1^- \rightarrow 0^+$  emesso in direzione  $\hat{z}$  (la direzione iniziale di moto del  $^{152}\text{Sm}$ ) deve sempre essere uguale a quella del neutrino (il neutrino si muove lungo  $-\hat{z}$ ).

La misura dell'elicità media di un fascio di fotoni può essere effettuata facendo passare il fascio attraverso un magnete polarizzato lungo la direzione di volo del fascio. Supponiamo ad esempio

che nel magnete gli elettroni siano polarizzati con  $s_z(e^-) = 1/2$ ; in questo caso un fotone con  $s_z(\gamma) = -1$  può eccitare un elettrone invertendone lo spin, mentre per un fotone con  $s_z(\gamma) = +1$  questo processo non può avvenire, quindi il rate di assorbimento dei fotoni dipende dalla loro polarizzazione. Confrontando la attenuazione del fascio nei due casi di magnete polarizzato lungo  $\hat{z}$  e lungo  $-\hat{z}$  si può dunque risalire alla elicità media dei fotoni nel fascio.

Resta ora da vedere come sia possibile selezionare solo i fotoni di diseccitazione del samario che provengano dai decadimenti  $1^- \rightarrow 0^+$  e che si muovano in direzione concorde con quella del samario eccitato. Un possibile metodo consiste nel selezionare solo i fotoni che effettuino scattering risonante su del samario nello stato fondamentale. Se indichiamo con  $\Delta$  la differenza di massa tra il samario eccitato e quello nel fondamentale  $\Delta = M(\text{Sm}^*) - M(\text{Sm})$ , è semplice verificare che l'energia del fotone di diseccitazione è

$$E_\gamma^{(dis)} = \frac{M(\text{Sm}^*)^2 - M(\text{Sm})^2}{2M(\text{Sm}^*)} = \Delta - \frac{\Delta^2}{2M(\text{Sm}^*)} \quad (4.20)$$

e che l'energia di soglia necessaria ad fotone che incide sul samario per eccitarlo è

$$E_\gamma^{(ecc)} = \frac{M(\text{Sm}^*)^2 - M(\text{Sm})^2}{2M(\text{Sm})} = \Delta + \frac{\Delta^2}{2M(\text{Sm})} \quad (4.21)$$

quindi, affinché un fotone di diseccitazione possa rieccitare un nucleo di samario, deve essere fornita dall'esterno una energia

$$\Delta E \approx \frac{\Delta^2}{M(\text{Sm})} \approx 6 \text{ eV} \quad (4.22)$$

poichè la larghezza naturale del livello eccitato  $1^-$ , di soli 20 meV, non è sufficiente a coprire questo gap. Anche la agitazione termica a temperatura ambiente non è sufficiente: la velocità tipica di agitazione termica del nucleo di samario è

$$v \approx \sqrt{\frac{3kT}{M(\text{Sm})}} \quad (4.23)$$

e quindi la larghezza termica dei fotoni di eccitazione e diseccitazione indotta dall'effetto Doppler è

$$\Delta E_\gamma^{therm} \approx \frac{v}{c} \Delta \approx \frac{\Delta}{c} \sqrt{\frac{3kT}{M(\text{Sm})}} \quad (4.24)$$

che a temperatura ambiente  $kT \approx 1/40 \text{ eV}$  risulta essere  $\Delta E_\gamma^{therm} \approx 0.7 \text{ eV}$ .

D'altra parte il tempo di decadimento dello stato  $^{152}\text{Sm}^*(1^-)$  è di circa  $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ , minore dei tempi tipici di rilassamento dei cristalli, quindi si può supporre che quando il fotone viene emesso il nucleo di samario eccitato stia ancora rinculando a causa del decadimento  $\beta$ . Indicando con  $p_\nu \approx 911 \text{ KeV}$  l'impulso del neutrino emesso, la velocità del samario eccitato è

$$v(\text{Sm}^*) \approx \frac{p_\nu}{M(\text{Sm}^*)} \quad (4.25)$$

che corrisponde ad uno shift doppler del fotone di diseccitazione emesso in direzione concorde al moto del samario di

$$\Delta E_\gamma \approx \frac{p_\nu \Delta}{M(\text{Sm}^*)c} \approx 5.76 \text{ eV} \quad (4.26)$$

che, insieme anche all'allargamento termico, è sufficiente a coprire il gap tra l'energia di diseccitazione e quella di rieccitazione.

Notiamo esplicitamente che nel 1957 non si conosceva il tempo di decadimento del livello  $1^-$ , quindi in particolare non poteva essere effettuato il calcolo appena mostrato; nell'articolo di Grodzinis (che era uno studio preliminare per il seguente lavoro di Goldhaber et al.) si mostra che effettivamente si osserva scattering risonante, da cui si ottiene una stima per la vita media del livello eccitato  $1^-$  del samario.

L'idea di base dell'esperimento di Goldhaber et al. è quindi la seguente

1. si parte da un campione di  $^{152}\text{Eu}$ , che decade in  $^{152}\text{Sm}^* + \nu_e$  per cattura elettronica
2. il samario eccitato decade in  $^{152}\text{Sm}(0^+/2^+) + \gamma$
3. si fanno passare i  $\gamma$  del punto precedente attraverso un magnete
4. si fanno incidere i  $\gamma$  passati attraverso il magnete su un campione di  $^{152}\text{Sm}(0^+)$
5. si osservano gli eventuali fotoni emessi per scattering risonante dal  $^{152}\text{Sm}(0^+)$

Per quanto precedentemente visto gli unici fotoni che possono effettuare scattering risonante sono quelli prodotti dal decadimento  $1^- \rightarrow 0^+$  ed emessi nella direzione di volo del samario eccitato, inoltre si era mostrato che l'elicità di questi fotoni coincide con l'elicità dei neutrini prodotti nel decadimento  $\beta$ . Studiando la dipendenza dello scattering risonante dalla polarizzazione del magnete si può quindi risalire all'elicità dei neutrini, che risulta essere compatibile con  $-1$ .

## 5 Il sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Articoli riprodotti:

1. M. Gell-Mann, A. Pais, *Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation*. Phys. Rev. **97**, 1387 (1955).
2. A. Pais, O. Piccioni, *Note on the Decay and Absorption of the  $\theta^0$* . Phys. Rev. **100**, 1487 (1955).
3. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay, *Evidence for the  $2\pi$  decay of the  $K_2^0$  meson*. Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).
4. S. Gjesdal, G. Presser, T. Kame, P. Steffen, J. Steinberger, F. Vannucci, H. Wahl, F. Eisele, H. Filthuth, V. Lüth, G. Zech *A measurement of the  $K_L - K_S$  mass difference from the charge asymmetry in semi-leptonic kaon decays*. Phys. Lett. B **52**, 113 (1974).

### 5.1 L'invarianza $CP$ e il sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Si è visto in precedenza che la parità e la coniugazione di carica non sono simmetrie delle interazioni deboli. Consideriamo ad esempio il caso dei neutrini: indicando con  $\xi$  l'elicità, sotto parità  $\xi \rightarrow -\xi$  mentre  $\xi$  resta invariata sotto coniugazione di carica. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \nu(\xi = -1) &\xrightarrow{P} \nu(\xi = +1) \\ \nu(\xi = -1) &\xrightarrow{C} \bar{\nu}(\xi = -1) \\ \nu(\xi = -1) &\xrightarrow{CP} \bar{\nu}(\xi = +1) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Poichè per i neutrini si ha sempre  $\xi = -1$  mentre per gli antineutrini si ha sempre  $\xi = +1$ , dalle relazioni precedenti segue che  $P$  e  $C$  non sono simmetrie della interazione debole, mentre  $CP$  potrebbe essere una simmetria esatta.

In realtà anche la simmetria  $CP$  è violata nei processi deboli tuttavia, mentre la parità è violata in modo massimale (vedi il neutrino),  $CP$  è solo debolmente violata ed una buona parte della fenomenologia dell'interazione debole può essere compresa anche assumendo, in prima approssimazione, che  $CP$  sia conservata.

Il  $K^0$ , analogamente al pione, è un mesone con  $J^P = 0^-$ , tuttavia, mentre il pione ha stranezza nulla, il  $K^0$  ha stranezza  $S = 1$  e non può quindi essere un autostato dell'operatore di coniugazione di carica: la sua antiparticella è il mesone  $\bar{K}^0$ , che ha  $S = -1$ .

Poichè la stranezza è conservata dall'interazione forte, i comportamenti di  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  sono significativamente diversi per quanto riguarda l'interazione forte: ad esempio il  $K^0$  può essere prodotto ad energie più basse rispetto al  $\bar{K}^0$  utilizzando la reazione  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ , in quanto il  $\Lambda^0$  è il barione strano più leggero ed ha  $S = +1$ .

Poichè l'interazione responsabile del decadimento di  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  è l'interazione debole, che viola la conservazione della stranezza, è necessario procedere come segue: supponiamo che l'interazione debole conservi  $CP$  e scegliamo le fasi usando la convenzione

$$|\bar{K}^0\rangle = CP|K^0\rangle \quad |K^0\rangle = CP|\bar{K}^0\rangle \quad (5.2)$$

È a questo punto necessario passare ad una base di autostati di  $CP$ , dati da

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &= \frac{|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} & CP|K_1^0\rangle &= +|K_1^0\rangle \\ |K_2^0\rangle &= \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} & CP|K_2^0\rangle &= -|K_2^0\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

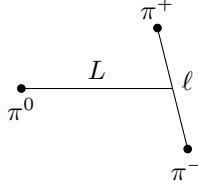


Figura 5.1: Momenti angolari relativi in un decadimento a tre pioni

(l'argomento originale di Gell-Mann e Pais usava solo  $C$  ma il ragionamento di base resta praticamente invariato usando  $CP$ ). Il decadimento principale di  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  è quello in una coppia di pioni, tuttavia si vede subito che una coppia di pioni con carica totale nulla ha sempre  $CP = +1$ : usando i risultati di Sez. (1) si ha infatti (i pioni hanno spin nullo)

$$\begin{aligned} CP|\pi^0\pi^0\rangle &= (-1)^\ell C|\pi^0\pi^0\rangle = (-1)^\ell [C(\pi^0)]^2 |\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle \quad (\ell \text{ pari per Bose}) \\ CP|\pi^+\pi^-\rangle &= (-1)^\ell C|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^{2\ell} |\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^+\pi^-\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

dove  $\ell$  è il momento angolare della coppia di pioni. Nel caso di tre pioni, scegliendo i momenti orbitali relativi come in Fig. (5.1) si ha

$$\begin{aligned} CP|\pi^0\pi^+\pi^-\rangle &= (-1)^3 (-1)^{\ell+L} C|\pi^0\pi^+\pi^-\rangle = \\ &= (-1)^3 (-1)^{\ell+L} C(\pi^0) (-1)^\ell |\pi^0\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^{\ell+1} |\pi^0\pi^+\pi^-\rangle \end{aligned} \quad (5.5)$$

dove si è usato il fatto che i pioni hanno parità intrinseca negativa e che il pione neutro è un autostato della coniugazione di carica con autovalore positivo. Analogamente

$$PC|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = (-1)^3 (-1)^{\ell+L} C|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = (-1)^3 (-1)^{\ell+L} [C(\pi^0)]^3 |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle \quad (5.6)$$

in quanto  $\ell$  ed  $L$  devono essere pari come conseguenza della statistica di Bose.

Se ne deduce quindi che  $K_1^0$  può decadere in due pioni ed in tre pioni (non tutti neutri) con  $\ell$  dispari, mentre  $K_2^0$  può decadere in tre pioni con  $\ell$  pari ma non in due pioni. È quindi naturale supporre che la componente  $K_1^0$  abbia una vita media più piccola della componente  $K_2^0$ . Due componenti di vita media diversa furono effettivamente identificate nei fasci di  $K^0$ , indicate con  $K_S^0$  (short) e  $K_L^0$  (long), che hanno tempi di decadimento

$$\tau_S = (8.954 \pm 0.004) \times 10^{-11} \text{ s} \quad \tau_L = (5.116 \pm 0.021) \times 10^{-8} \text{ s} \quad (5.7)$$

e che se si suppone  $CP$  conservata è naturale identificare con  $K_1^0$  e  $K_2^0$  rispettivamente.

## 5.2 Oscillazioni di stranezza e rigenerazione

Se si continua a supporre che  $CP$  sia una simmetria soddisfatta anche dalle interazioni deboli, allora gli stati  $K_1^0$  e  $K_2^0$  introdotti precedentemente sono gli autostati di massa da considerare per l'evoluzione temporale.

Consideriamo un fascio che inizialmente è composto solo da  $K^0$  (ad esempio prodotto tramite  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ ), allora si ha

$$|\psi(t=0)\rangle = |K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \quad (5.8)$$

e, indicando con  $m_j > 0$  e  $\Gamma_j > 0$  le masse e larghezze degli stati  $i = 1, 2$ , lo stato al tempo  $t$  è dato da

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |K_1^0\rangle \exp(-im_1 t) \exp(-\Gamma_1 t/2) + \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2^0\rangle \exp(-im_2 t) \exp(-\Gamma_2 t/2) \quad (5.9)$$

che può essere riscritto nella base  $K^0, \bar{K}^0$  come

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} \left[ \exp(-im_1 t) \exp(-\Gamma_1 t/2) + \exp(-im_2 t) \exp(-\Gamma_2 t/2) \right] |K^0\rangle + \frac{1}{2} \left[ \exp(-im_1 t) \exp(-\Gamma_1 t/2) - \exp(-im_2 t) \exp(-\Gamma_2 t/2) \right] |\bar{K}^0\rangle \quad (5.10)$$

quindi la probabilità di rivelare un  $K^0$  al tempo  $t$  è data da

$$|\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| \exp(-im_1 t) \exp(-\Gamma_1 t/2) + \exp(-im_2 t) \exp(-\Gamma_2 t/2) \right|^2 = \frac{1}{4} \left\{ \exp(-\Gamma_1 t) + \exp(-\Gamma_2 t) + 2 \exp \left[ -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t \right] \cos[(m_1 - m_2)t] \right\} \quad (5.11)$$

ed analogamente la probabilità di rivelare un  $\bar{K}^0$  al tempo  $t$  è

$$|\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left| \exp(-im_1 t) \exp(-\Gamma_1 t/2) - \exp(-im_2 t) \exp(-\Gamma_2 t/2) \right|^2 = \frac{1}{4} \left\{ \exp(-\Gamma_1 t) + \exp(-\Gamma_2 t) - 2 \exp \left[ -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t \right] \cos[(m_1 - m_2)t] \right\} \quad (5.12)$$

e si hanno quindi delle oscillazioni nel tempo della stranezza. Per identificare i  $K^0$  o  $\bar{K}^0$  si considerano i decadimenti semileptonici, infatti

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell & K^0 &\rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell \\ \bar{K}^0 &\rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell & \bar{K}^0 &\rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove  $\ell$  è un leptone. Queste relazioni sono vere per l'interazione debole al primo ordine perturbativo, corrispondono ai processi elementari  $\bar{s} \rightarrow \bar{u} + \ell^+ + \nu_\ell$  e  $s \rightarrow u + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$  e sono note come regola  $\Delta S = \Delta Q$ . Usando questi processi si può studiare la asimmetria

$$|\langle K^0 | \psi(t) \rangle|^2 - |\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2 = \exp \left[ -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} t \right] \cos[(m_1 - m_2)t] \quad (5.14)$$

ed estrarre il valore di  $|m_1 - m_2|$  (il coseno è una funzione pari, quindi non si determina il segno). La determinazione del segno può essere effettuata con esperimenti di interferenza (vedi ad es. [15] §11.4) ed il valore di riferimento attuale è

$$m_L - m_S = (3.480 \pm 0.006) \times 10^{-6} \text{ eV} \quad (5.15)$$

Notiamo esplicitamente che in realtà, per grandi tempi, si osservano deviazioni dall'andamento Eq. (5.14), che mostrano che gli stati fisici  $K_S$  e  $K_L$  non coincidono esattamente con  $K_1^0$  e  $K_2^0$  e quindi  $CP$  non è una simmetria delle interazioni deboli.

Un altro fenomeno caratteristico del sistema  $K^0, \bar{K}^0$  è la rigenerazione: dopo un tempo  $1/\Gamma_1 \ll t \ll 1/\Gamma_2$  un fascio di  $K$  è composto ormai solo dalla componente  $K_2^0$ , tuttavia se si fa interagire il fascio con un materiale, ricompare anche la componente  $K_1^0$ . Questo è dovuto al fatto che la base corretta per analizzare l'interazione forte è la base a stranezza definita, ovvero  $K^0, \bar{K}^0$ , e che l'interazione forte delle due componenti con  $S = \pm 1$  con la materia è molto diversa, in particolare le ampiezze di scattering sono diverse. Il processo di rigenerazione può quindi essere schematizzato come segue

$$|K_2^0\rangle = \frac{|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{a|K^0\rangle - \bar{a}|\bar{K}^0\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(a - \bar{a})|K_1^0\rangle + \frac{1}{2}(a + \bar{a})|K_2^0\rangle \quad (5.16)$$

Se le due ampiezze di scattering per  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  fossero uguali si avrebbe  $a = \bar{a}$  e non vi sarebbe rigenerazione. Il processo di rigenerazione è l'analogo di due esperimenti di Stern-Gerlach consecutivi che selezionano due polarizzazioni non compatibili di una particella di spin  $1/2$ : supponiamo di partire da un fascio non polarizzato e con il primo apparato selezioniamo gli stati con  $s_z = 1/2$ . Facciamo ora passare il fascio nel secondo apparato, che seleziona la polarizzazione  $s_x = 1/2$ . È semplice vedere che nello stato finale si avrà ora sia la componente  $s_z = 1/2$  che la  $s_z = -1/2$ .

### 5.3 Violazione della simmetria $CP$

Nel 1964 furono osservati dei decadimenti di  $K_L$  in due pioni, mostrando così la non invarianza sotto  $CP$  dell'interazione debole. La non invarianza dell'interazione debole sotto  $CP$  nel sistema  $K^0, \bar{K}^0$  si può manifestare in due modi diversi

1. il decadimento  $K_2^0 \rightarrow 2\pi$
2. gli stati  $K_S$  e  $K_L$  non coincidono con  $K_1^0$  e  $K_2^0$

Gli stati  $K_L$  e  $K_S$  possono essere parametrizzati (usando la simmetria  $CPT$ , per maggiori dettagli vedi ad es. [2, 16])

$$\begin{aligned} |K_S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|K_1\rangle + \epsilon|K_2\rangle) \\ |K_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle) \end{aligned} \quad (5.17)$$

dove  $\epsilon$  è un numero complesso. Notiamo esplicitamente che  $\langle K_S|K_L\rangle$  è in generale non nullo, cosa possibile in quanto la hamiltoniana di un sistema non stabile non è hermitiana.

Alcuni rapporti di osservabili che permettono di quantificare la violazione della simmetria  $CP$  sono

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell) - \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell)}{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell) + \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell)} \\ \eta_{+-} &= |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}} = A(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-) / A(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) \\ \eta_{00} &= |\eta_{00}| e^{i\phi_{00}} = A(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0) / A(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Usando la regola  $\Delta S = \Delta Q$  e scrivendo  $K_L$  e  $K_S$  in termini di  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  si ottiene

$$A_L = \frac{|1+\epsilon|^2 - |1-\epsilon|^2}{|1+\epsilon|^2 + |1-\epsilon|^2} = 2 \frac{\Re \epsilon}{1+|\epsilon|^2} \quad (5.19)$$

e  $\eta_{+-}$  e  $\eta_{00}$  possono essere parametrizzati come (con la convenzione di Wu-Yang per le fasi, vedi [16])

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon' \quad \eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon' \quad (5.20)$$

Sperimentalmente si hanno i risultati

$$\begin{aligned} |\epsilon| &= (2.284 \pm 0.014) \times 10^{-3} \\ \phi_\epsilon &= (43.5 \pm 0.5)^\circ \\ \Re(\epsilon'/\epsilon) &\approx \epsilon'/\epsilon = (1.66 \pm 0.23) \times 10^{-3} \\ \phi_{+-} &= (43.4 \pm 0.5)^\circ \\ \phi_{00} - \phi_{+-} &= (0.34 \pm 0.32)^\circ \\ A_L &= (3.32 \pm 0.06) \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (5.21)$$

## Riferimenti bibliografici

- [1] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Teoria quantistica relativistica” Editori Riuniti (2004).
- [2] T. D. Lee “Particle Physics and Introduction to Field Theory” Harwood Academic Publishers (1981).
- [3] S. Weinberg “The Quantum Theory of Field” vol. 1 Cambridge University Press (1995).
- [4] G. C. Wick, A. S. Wightman, E. P. Wigner “The Intrinsic Parity of Elementary Particles” Phys. Rev. **88**, 101 (1952).
- [5] D. H. Perkins “Introduction to High Energy Physics” Cambridge University Press (2000).
- [6] L. Michel *Selection Rules Imposed by Charge Conjugation* Il Nuovo Cimento **X**, 319 (1953).
- [7] L. Wolfenstein, D. G. Ravenhall *Some Consequences of Invariance under Charge Conjugation* Phys. Rev. **88**, 279 (1952).
- [8] C. N. Yang *Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons* Phys. Rev. **77**, 242 (1950).
- [9] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Meccanica quantistica, teoria non relativistica” Editori Riuniti (2004).
- [10] K. Brueckner, R. Serber, K. Watson *The Capture of  $\pi$ -Mesons in Deuterium* Phys. Rev. **81**, 575 (1951).
- [11] T. D. Lee, J. Orear *Speculations on Heavy Mesons* Phys. Rev. **100**, 932 (1955).
- [12] J. J. Sakurai “Modern quantum mechanics” Addison-Wesley (1994).
- [13] H. J. Lipkin “Beta Decay for Pedestrians” Dover Publications (2004).
- [14] M. J. Steenland, H. A. Tolhoek *Orientation of Atomic Nuclei at Low Temperatures*. Progr. in Low Temp. Physics **2**, 292 (1957).
- [15] L. B. Okun “Leprons and quarks” North-Holland (1980).
- [16] M. S. Sozzi “Discrete Symmetries and CP Violation” Oxford University Press (2008).