

Alcuni aspetti “tecnici” del momento angolare

Claudio Bonati

23 agosto 2021

Indice

1	Considerazioni generali	2
1.1	Il momento angolare in meccanica classica	2
1.2	L'algebra delle rotazioni e la formula di Zassenhaus	3
1.3	Il momento angolare in meccanica quantistica	6
2	Lo spettro del momento angolare	9
2.1	Il caso generale	9
2.2	Il caso del momento angolare orbitale	11
3	Le matrici di rotazione	15
3.1	Gli angoli di Eulero ed alcune proprietà generali	15
3.2	La forma esplicita di $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ e le sue simmetrie	17
3.3	Le matrici di rotazione come autovettori del momento angolare	20
3.4	Il teorema di addizione delle armoniche sferiche	24
4	Somma di momenti angolari	26
4.1	Aspetti generali	26
4.2	Convenzioni di Condon-Shortley	29
4.3	Calcolo dei coefficienti di Clebsch-Gordan	32
4.4	Simmetrie dei coefficienti di Clebsch-Gordan	36
4.5	Applicazione alle matrici di rotazione	37
5	Operatori tensoriali	39
5.1	Tensori cartesiani e tensori sferici	39
5.2	Teorema di Wigner-Eckart	43
5.2.1	Prima dimostrazione	44
5.2.2	Seconda dimostrazione	45
5.2.3	Terza dimostrazione	46
5.2.4	Il teorema della proiezione	47
5.2.5	Wigner-Eckart per l'hermitiano coniugato	48
	Bibliografia	49

1 Considerazioni generali

1.1 Il momento angolare in meccanica classica

Consideriamo la rotazione infinitesima associata a $\delta\phi$, cioè una rotazione destrorsa intorno al versore del vettore $\delta\phi$ di un angolo $\delta\phi = |\delta\phi| \ll 1$. È semplice vedere che il raggio vettore \mathbf{q} cambia al primo ordine in $\delta\phi$ della quantità $\delta\mathbf{q} = \delta\phi \times \mathbf{q}$: il caso speciale in cui $\delta\phi$ è diretto lungo l'asse \hat{z} si può verificare esplicitamente, mentre il caso generale si ottiene usando il fatto che per ogni rotazione R si ha $R(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (R\mathbf{a}) \times (R\mathbf{b})$. Usando $RR^t = I$ (in componenti $R_{ic}R_{nc} = \delta_{in}$) si ha infatti

$$[(R\mathbf{a}) \times (R\mathbf{b})]_i = \epsilon_{ijk}R_{jl}a_lR_{km}b_m = R_{ic}R_{nc}\epsilon_{njk}R_{jl}a_lR_{km}b_m \quad (1.1)$$

inoltre usando la antisimmetria in clm e $\det R = \epsilon_{njk}R_{n1}R_{j2}R_{k3} = 1$ si trova

$$\epsilon_{njk}R_{nc}R_{jl}R_{km} = \epsilon_{clm}\epsilon_{njk}R_{n1}R_{j2}R_{k3} = \epsilon_{clm} \quad (1.2)$$

quindi

$$[(R\mathbf{a}) \times (R\mathbf{b})]_i = R_{ic}\epsilon_{clm}a_lb_m = [R(\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_i . \quad (1.3)$$

Partendo dal caso particolare $\delta\mathbf{q}' = \delta\phi\hat{z} \times \mathbf{q}'$, applicando la matrice R che porta $\delta\phi\hat{z}$ in un generico vettore $\delta\phi$ e chiamando $\mathbf{q} = R\mathbf{q}'$ il raggio vettore del nuovo sistema otteniamo quindi

$$\delta\mathbf{q} = R(\delta\mathbf{q}') = R(\delta\phi\hat{z}) \times R\mathbf{q}' = \delta\phi \times \mathbf{q} . \quad (1.4)$$

Da questa relazione segue anche in particolare che la composizione di due rotazioni infinitesime $\delta\phi$ e $\delta\psi$ non è altro che la rotazione infinitesima associata a $\delta\phi + \delta\psi$, cosa che tornerà utile nel seguito. Si ha infatti *al primo ordine*

$$\mathbf{q} \xrightarrow{\delta\phi} \mathbf{q}' = \mathbf{q} + \delta\phi \times \mathbf{q} \xrightarrow{\delta\psi} \mathbf{q}'' = \mathbf{q}' + \delta\psi \times \mathbf{q}' \simeq \mathbf{q} + (\delta\phi + \delta\psi) \times \mathbf{q} . \quad (1.5)$$

Consideriamo una particella descritta da una lagrangiana $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ invariante per rotazioni: per $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \delta\phi \times \mathbf{q}$ si ha quindi

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{q}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}} \cdot (\delta\phi \times \dot{\mathbf{q}}) . \quad (1.6)$$

Sostituendo la definizione $\mathbf{p} = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\mathbf{q}}$ e l'equazione del moto $\dot{\mathbf{p}} = \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{q}$ si ottiene quindi

$$0 = \dot{\mathbf{p}} \cdot (\delta\phi \times \mathbf{q}) + \mathbf{p} \cdot (\delta\phi \times \dot{\mathbf{q}}) = \delta\phi \cdot (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{p}) = \delta\phi \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) , \quad (1.7)$$

che deve essere vera per ogni $\delta\phi$, quindi è conservato il momento angolare

$$\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} . \quad (1.8)$$

Passiamo ora al formalismo hamiltoniano: le trasformazioni canoniche infinitesime sono associate alla funzione generatrice

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} + \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) , \quad (1.9)$$

dove ϵ è un parametro infinitesimo e la relazione tra le vecchie coordinate \mathbf{q}, \mathbf{p} e le nuove \mathbf{Q}, \mathbf{P} segue da

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial\mathbf{q}} , \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial\mathbf{P}} . \quad (1.10)$$

Si ha quindi

$$\delta\mathbf{p} = \mathbf{P} - \mathbf{p} = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial\mathbf{q}} , \quad \delta\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{q} = \epsilon \frac{\partial G}{\partial\mathbf{P}} \simeq \epsilon \frac{\partial G}{\partial\mathbf{p}} \quad (1.11)$$

e l'effetto della trasformazione canonica infinitesima su una generica funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ è dato da

$$\delta f = f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \simeq f\left(\mathbf{q} + \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}, \mathbf{p} - \epsilon \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}\right) - f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \simeq \epsilon \{f, G\}_P \quad (1.12)$$

dove $\{ \ }_P$ sono le parentesi di Poisson. Consideriamo ora il caso particolare in cui

$$\epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \simeq \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \delta \phi \cdot \mathbf{L} = -\mathbf{q} \cdot (\delta \phi \times \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot (\delta \phi \times \mathbf{q}) \quad (1.13)$$

ed il ruolo di parametro infinitesimo è svolto da $\delta \phi$. Usando le Eq. (1.11) si ha

$$\delta \mathbf{p} = \delta \phi \times \mathbf{p}; \quad \delta \mathbf{q} = \delta \phi \times \mathbf{q} \quad (1.14)$$

quindi il momento angolare è il generatore delle rotazioni. Inoltre applicando la relazione Eq. (1.12) alla hamiltoniana si trova $\delta H = \delta \phi \cdot \{H, \mathbf{L}\}_P$, da cui si vede che \mathbf{L} è conservato se e solo se la hamiltoniana è invariante per rotazioni.

1.2 L'algebra delle rotazioni e la formula di Zassenhaus

Passiamo ora ad analizzare l'algebra delle rotazioni, ovvero il modo in cui rotazioni attorno a diversi assi si compongono. Cominciamo con l'introdurre la matrice di rotazione finita $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ associata ad una rotazione di angolo ϕ attorno al versore $\hat{\mathbf{n}}$: si ha chiaramente $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\psi) = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi + \psi)$, quindi in particolare

$$\frac{R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi + d\phi) - R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)}{d\phi} \mathbf{v} = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) \frac{R_{\hat{\mathbf{n}}}(d\phi) - 1}{d\phi} \mathbf{v} = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}, \quad (1.15)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata usata la forma della rotazione infinitesima introdotta in Sez. (1.1). Se chiamiamo $M_{\hat{\mathbf{n}}}$ la matrice definita dall'uguaglianza

$$M_{\hat{\mathbf{n}}} \mathbf{v} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \quad (1.16)$$

(quindi $[M_{\hat{\mathbf{n}}}]_{ik} = \epsilon_{ijk} n_j$) si ha allora

$$\frac{d}{d\phi} R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) M_{\hat{\mathbf{n}}}, \quad R_{\hat{\mathbf{n}}}(0) = I, \quad (1.17)$$

quindi

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \exp(\phi M_{\hat{\mathbf{n}}}) \quad (1.18)$$

e

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) \mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2!} \phi^2 \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{3!} \phi^3 \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v})] + \dots \quad (1.19)$$

Utilizzando questa espressione e limitandosi ai termini del secondo ordine nell'angolo è semplice calcolare il commutatore di due rotazioni infinitesime:

$$(R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi) - R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)) \mathbf{v} \simeq \delta\phi\delta\psi \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{m}} \times \mathbf{v}) - \delta\phi\delta\psi \hat{\mathbf{m}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \quad (1.20)$$

in cui si vede che i termini del secondo ordine in $\delta\phi$ o $\delta\psi$ delle rotazioni non contribuiscono. Usando l'identità di Jacobi per il prodotto vettoriale triplo

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (1.21)$$

questa espressione può essere riscritta nella forma

$$[R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi), R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)] \mathbf{v} \simeq \delta\phi\delta\psi (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}}) \times \mathbf{v} \quad (1.22)$$

e quindi per due direzioni ortogonali si ha

$$[R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi), R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)] = R_{\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi\delta\psi) - I + o(\delta\psi\delta\phi). \quad (1.23)$$

Consideriamo ora nel formalismo hamiltoniano la differenza indotta nella funzione $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ dalla applicazione di $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)$ o $R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)$: analogamente al caso di Eq. (1.20) si può verificare esplicitamente che per ottenere un risultato al secondo ordine si possono usare le relazioni al primo ordine per le trasformazioni, quindi otteniamo

$$\delta_{R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)}f - \delta_{R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)}f = \delta\phi\delta\psi\{\{f, \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{L}\}_P, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}\}_P - \delta\phi\delta\psi\{\{f, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}\}_P, \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{L}\}_P \quad (1.24)$$

che usando l'identità di Jacobi delle parentesi di Poisson si può riscrivere nella forma

$$\delta_{R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)}f - \delta_{R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)}f = \delta\phi\delta\psi\{f, \{\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{L}, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}\}_P\}_P. \quad (1.25)$$

Non è difficile mostrare esplicitamente che si ha $\{L_a, L_b\}_P = \epsilon_{abc}L_c$, quindi

$$\{\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{L}, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}\}_P = m_a n_b \{L_a, L_b\}_P = m_a n_b \epsilon_{abc} L_c = (\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{L} \quad (1.26)$$

e per $\hat{\mathbf{m}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ ortogonali si ottiene

$$\delta_{R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)}f - \delta_{R_{\hat{\mathbf{m}}}(\delta\phi)R_{\hat{\mathbf{n}}}(\delta\psi)}f = \delta_{R_{\hat{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{n}}}(\delta\phi\delta\psi)}f, \quad (1.27)$$

che è l'analogo per le funzioni $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ della relazione Eq. (1.23) per le matrici di rotazione.

Per uniformarsi alla notazione usata in meccanica quantistica introduciamo i generatori

$$J_{\hat{\mathbf{n}}} = iM_{\hat{\mathbf{n}}} \quad (1.28)$$

(hermitiani poichè gli M sono antisimmetrici), tramite i quali le rotazioni si scrivono come

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \exp(-i\phi J_{\hat{\mathbf{n}}}) \quad (1.29)$$

Riscrivendo in Eq. (1.23) gli operatori di rotazione R tramite i loro generatori infinitesimi J si ottiene allora per due direzioni ortogonali $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}$ la relazione

$$[J_{\hat{\mathbf{n}}}, J_{\hat{\mathbf{m}}}] = iJ_{\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{m}}}. \quad (1.30)$$

Poichè $J_{-\hat{\mathbf{n}}} = -J_{\hat{\mathbf{n}}}$, se indichiamo con J_x, J_y e J_z i generatori delle rotazioni intorno agli assi \hat{x}, \hat{y} e \hat{z} (o agli assi di una qualunque terna destrorsa) si ha allora l'algebra di commutazione

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c. \quad (1.31)$$

Indicando con \mathbf{J} il vettore (J_x, J_y, J_z) ed usando le formule esplicite per $J_{\hat{\mathbf{n}}}$ e $M_{\hat{\mathbf{n}}}$, vedi Eq. (1.16), è infine semplice verificare che $J_{\hat{\mathbf{n}}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}$, quindi Eq. (1.29) si può riscrivere come

$$R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \exp(-i\phi \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}). \quad (1.32)$$

Si vuole ora mostrare che le relazioni Eq. (1.31) determinano univocamente la struttura del gruppo delle rotazioni: gli operatori J_a fissano la forma delle rotazioni attorno agli assi coordinati e le relazioni Eq. (1.31) determinano il modo in cui le rotazioni attorno ad assi diversi si compongono. Per verificare questa ultima affermazione mostreremo che la forma della rotazione generica Eq. (1.32) è completamente fissata dalla conoscenza dei commutatori dei generatori delle rotazioni, seguendo l'approccio di [9] per la dimostrazione della formula di Zassenhaus.

Date due matrici A e B introduciamo innanzitutto la notazione $[A^{(n)}, B]$ per i commutatori ripetuti, notazione definita ricorsivamente da

$$[A^{(0)}, B] = B, \quad [A^{(n+1)}, B] = [A, [A^{(n)}, B]]. \quad (1.33)$$

Ci servirà usare la relazione

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A^{(n)}, B]. \quad (1.34)$$

e per la dimostrazione di questa identità conviene riscaldare $A \rightarrow tA$ ed introdurre le notazioni

$$M_1(t) = e^{tA} B e^{-tA}, \quad M_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n)}, B]. \quad (1.35)$$

Si ha allora

$$\frac{d}{dt} M_1(t) = A e^{tA} B e^{-tA} - e^{tA} B e^{-tA} A = [A, M_1(t)], \quad (1.36)$$

inoltre $M_1(0) = B$. $M_2(t)$ soddisfa la stessa equazione differenziale

$$\frac{dM_2(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} [A^{(n)}, B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n+1)}, B] = [A, M_2(t)] \quad (1.37)$$

con la stessa condizione iniziale $M_2(0) = B$, quindi $M_1(t) = M_2(t)$ e fissando in particolare $t = 1$ si ottiene Eq. (1.34).

Si vuole ora mostrare la relazione di Zassenhaus

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} e^{\frac{1}{6}(2[B,[A,B]]+[A,[A,B]])} \dots \quad (1.38)$$

dove “...” indica altri prodotti di esponenziali di commutatori di A e B . Questa espressione mostra che la conoscenza di tutti i commutatori di A e B è sufficiente per calcolare e^{A+B} e quindi che le relazioni Eq. (1.31) determinano completamente la struttura del gruppo delle rotazioni. Per mostrare l'identità Eq. (1.38) partiamo da

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB} e^{t^2 C_2} e^{t^3 C_3} \dots \quad (1.39)$$

che non è altro che una definizione implicita delle matrici C_i , $i \geq 2$. Derivando questa relazione rispetto a t e moltiplicandola a destra per il suo inverso

$$e^{-t(A+B)} = \dots e^{-t^3 C_3} e^{-t^2 C_2} e^{-tB} e^{-tA} \quad (1.40)$$

si ottiene

$$A+B = A + e^{tA} B e^{-tA} + e^{tA} e^{tB} (2t C_2) e^{-tB} e^{-tA} + e^{tA} e^{tB} e^{t^2 C_2} (3t^2 C_3) e^{-t^2 C_2} e^{-tB} e^{-tA} + \dots \quad (1.41)$$

a questo punto ogni termine di questa relazione può essere iterativamente sviluppato usando Eq. (1.34) ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n)}, B] + 2t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n)}, e^{tB} C_2 e^{-tB}] + \\ &\quad + 3t^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n)}, e^{tB} e^{t^2 C_2} C_3 e^{-t^2 C_2} e^{-tB}] + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} [A^{(n)}, B] + 2t \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{t^{n+m}}{n!m!} [A^{(n)}, [B^{(m)}, C_2]] + \\ &\quad + 3t^2 \sum_{n,m,k=0}^{\infty} \frac{t^{n+m+2k}}{n!m!k!} [A^{(n)}, [B^{(m)}, [C_2^{(k)}, C_3]]] + \dots, \end{aligned} \quad (1.42)$$

che deve essere identicamente nulla ordine per ordine in t . La seconda sommatoria contribuisce a partire da $O(t)$ e dal termine $n = m = 0$ si ottiene C_2 :

$$[A^{(1)}, B] + 2[A^{(0)}, [B^{(0)}, C_2]] = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2}[A, B], \quad (1.43)$$

la terza sommatoria contribuisce da $O(t^2)$ e da $n = m = k = 0$ si ottiene C_3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[A^{(2)}, B] + 2[A^{(1)}, [B^{(0)}, C_2]] + 2[A^{(0)}, [B^{(1)}, C_2]] + 3[A^{(0)}, [B^{(0)}, [C_2^{(0)}, C_3]]] &= 0, \\ C_3 &= \frac{1}{3}[B, [A, B]] + \frac{1}{6}[A, [A, B]], \end{aligned} \quad (1.44)$$

e così via per gli ordini successivi. Dalla struttura di questa equazione è inoltre chiaro che tutte le matrici C_i si scrivono come combinazioni lineari di commutatori ricorsivi di A e B , che era quanto si voleva dimostrare.

Con una procedura in parte analoga si può anche mostrare la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots \right) \quad (1.45)$$

dove nuovamente “...” indica termini che sono combinazioni lineari di commutatori ripetuti di A e B (vedi [9]).

1.3 Il momento angolare in meccanica quantistica

Poichè nella definizione di momento angolare classico $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times \mathbf{p}$ non compaiono prodotti tra una componente della posizione e la stessa componente dell'impulso, le relazioni di commutazioni canoniche non creano problemi nel passaggio alla meccanica quantistica, quindi si può definire come momento angolare l'operatore (useremo $\hbar = 1$)

$$\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (1.46)$$

Condieriamo ora una rotazione infinitesima e vediamo l'effetto che questa produce sulla funzione d'onda. Si ha $\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$ e consideriamo una rotazione “attiva”: si ruota il sistema mantenendo fissi gli assi coordinati, quindi il punto che era in precedenza in \mathbf{r} si troverà dopo la rotazione in $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Di conseguenza il valore della funzione d'onda ruotata ψ_R calcolata nel punto \mathbf{r} coinciderà con quello della funzione d'onda originale nel punto $\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}$:

$$\psi_R(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}) \simeq \psi(\mathbf{r}) - \delta\mathbf{r} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - (\delta\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - \delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \psi(\mathbf{r}) \quad (1.47)$$

quindi l'operatore di rotazione infinitesima è

$$I - \delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) = I - i\delta\boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = I - i\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{L} \quad (1.48)$$

e procedendo analogamente a quanto fatto all'inizio di Sez. (1.2) si vede anche che l'operatore di rotazione finita di un angolo ϕ intorno all'asse $\hat{\mathbf{n}}$ della funzione d'onda è dato da

$$D_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \exp(-i\phi\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}) \quad (1.49)$$

quindi il momento angolare è il generatore delle rotazioni nello spazio delle funzioni d'onda. Si noti la analogia con Eq. (1.32), tuttavia è importante ricordare che $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ è la matrice di rotazione nello spazio tridimensionale, mentre $D_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ è l'operatore di rotazione nello spazio di Hilbert infinito dimensionale delle funzioni d'onda. Non è difficile verificare tramite calcolo diretto che si hanno le seguenti relazioni di commutazione tra le diverse componenti del momento angolare \mathbf{L}

$$[L_a, L_b] = i\epsilon_{abc}L_c, \quad (1.50)$$

e queste relazioni, identiche a Eq. (1.31), fanno in modo che l'algebra degli operatori di rotazione $D_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ sia la stessa dell'algebra degli operatori di rotazione $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ nello spazio tridimensionale.

Più in generale (ad esempio nel caso che la funzione d'onda non sia uno scalare sotto rotazioni) si può introdurre il momento angolare \mathbf{J} come l'operatore autoaggiunto che è il generatore

(nello spazio di Hilbert che descrive il sistema di interesse) degli operatori che implementano le trasformazioni associate alle rotazioni

$$D_{\hat{n}}(\phi) = \exp(-i\phi\hat{n} \cdot \mathbf{J}) \quad (1.51)$$

e, affinché l'algebra di questi operatori sia la stessa di quella delle rotazioni tridimensionali, si deve imporre che

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c . \quad (1.52)$$

In questo contesto più generale le relazioni di commutazione Eq. (1.52) definiscono il momento angolare ed il caso specifico dell'operatore $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ si chiama momento angolare orbitale.

Mentre l'operatore \mathbf{L} è naturalmente definito in uno spazio infinito dimensionale, non è difficile trovare matrici di dimensione finita che soddisfano le relazioni Eq. (1.52). Un esempio esplicito è quello che era stato usato in Sez. (1.2) per le matrici di rotazione tridimensionali:

$$[J_a^{(1)}]_{\alpha\beta} = i\epsilon_{\alpha a\beta} , \quad (1.53)$$

come si può controllare tramite verifica diretta, infatti

$$\begin{aligned} [J_a^{(1)}J_b^{(1)} - J_b^{(1)}J_a^{(1)}]_{\alpha\gamma} &= -\epsilon_{\alpha a\beta}\epsilon_{\beta b\gamma} + \epsilon_{\alpha b\beta}\epsilon_{\beta a\gamma} = \delta_{a,\alpha}\delta_{b,\gamma} - \delta_{a,\gamma}\delta_{b,\alpha} = \\ &= \epsilon_{cab}\epsilon_{c\alpha\gamma} = i\epsilon_{abc}(i\epsilon_{\alpha c\gamma}) = i\epsilon_{abc}[J_c^{(1)}]_{\alpha\gamma} . \end{aligned} \quad (1.54)$$

La forma generale delle matrici che soddisfano Eq. (1.52) sarà trovata nella sezione successiva, tuttavia è facile capire che la dimensione minima delle matrici è 2×2 (nel caso 1×1 prendendo la traccia si avrebbe $\text{Tr}([J_a, J_b]) = 0$ e quindi $J_c = \text{Tr}(J_c) = 0$; usando l'invarianza per permutazioni cicliche di Eq. (1.52) si ottiene poi $J_a = J_b = 0$) ed in particolare la rappresentazione minimale è

$$J_a^{(1/2)} = \frac{1}{2}\sigma_a \quad (1.55)$$

dove σ_a ($a = 1, 2, 3$) sono le matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Queste matrici costituiscono una base per le matrici 2×2 hermitiane a traccia nulla e soddisfano le seguenti proprietà di semplice verifica:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= I \quad \text{per ogni valore di } i \text{ (no somma!)} \\ \sigma_i\sigma_j &= -\sigma_j\sigma_i = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{se } i \neq j \end{aligned} \quad (1.57)$$

che si possono riassumere nella equazione più generale $\sigma_i\sigma_j = \delta_{i,j}I + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, che copre entrambi i casi. Mostriamo ora la seguente proprietà: se \mathbf{a} e \mathbf{b} sono due vettori allora

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma} , \quad (1.58)$$

dove come di consueto si sottintende la matrice identità I . Si ha infatti

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \sigma_j\sigma_k a_j b_k = a_j b_k (\delta_{j,k}I + i\epsilon_{jkl}\sigma_l) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) , \quad (1.59)$$

da cui in particolare si ottiene

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})^2 = \mathbf{a}^2 . \quad (1.60)$$

Utilizzando la formula precedente si può scrivere in forma esplicita $\exp(i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})$: separando la somma di Taylor dell'esponenziale in termini pari e dispari si trova

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})^k = \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k)!} |\mathbf{a}|^{2k} + i \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \sum_k \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} |\mathbf{a}|^{2k+1} = \\ &= \cos |\mathbf{a}| + i \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \boldsymbol{\sigma} \sin |\mathbf{a}| . \end{aligned} \quad (1.61)$$

In particolare si ha quindi

$$D_{\hat{\mathbf{n}}}^{(1/2)}(\phi) = \exp\left(-i\phi\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}^{(1/2)}\right) = \exp\left(-\frac{i\phi}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) = \cos\frac{\phi}{2} - i(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma})\sin\frac{\phi}{2}. \quad (1.62)$$

2 Lo spettro del momento angolare

2.1 Il caso generale

In questa sezione si determineranno quali vincoli le relazioni di commutazione Eq. (1.52) impongono sulla forma degli operatori e sul loro spettro.

Notiamo innanzitutto che l'operatore \mathbf{J}^2 commuta con tutte le componenti di \mathbf{J} :

$$[\mathbf{J}^2, J_a] = [J_b J_b, J_a] = J_b [J_b, J_a] + [J_b, J_a] J_b = i\epsilon_{bac}(J_b J_c + J_c J_b) = 0 \quad (2.1)$$

in quanto $J_b J_c + J_c J_b$ è simmetrico per scambio $b \leftrightarrow c$ mentre ϵ_{bac} è antisimmetrico per lo stesso scambio. Esiste quindi una base di autovettori comune di \mathbf{J}^2 e J_z (ovviamente la scelta di J_z è puramente convenzionale) e indichiamo con $|a, b\rangle$ un insieme di vettori ortonormali che abbiano le proprietà

$$\mathbf{J}^2 |a, b\rangle = a |a, b\rangle \quad J_z |a, b\rangle = b |a, b\rangle . \quad (2.2)$$

È a questo punto comodo introdurre gli operatori di salita e discesa definiti da

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y ; \quad (2.3)$$

questi operatori non sono autoaggiunti ed è semplice verificare che soddisfano le relazioni

$$J_- = J_+^\dagger; \quad J_+ = J_-^\dagger; \quad [\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0; \quad [J_+, J_-] = 2J_z; \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (2.4)$$

Usando queste relazioni si ottiene

$$J_z J_{\pm} |a, b\rangle = (J_{\pm} J_z + [J_z, J_{\pm}]) |a, b\rangle = (b \pm 1) J_{\pm} |a, b\rangle \quad (2.5)$$

e analogamente

$$\mathbf{J}^2 J_{\pm} |a, b\rangle = J_{\pm} \mathbf{J}^2 |a, b\rangle = a J_{\pm} |a, b\rangle . \quad (2.6)$$

Nel caso in cui non siano presenti degenerazioni si ha quindi

$$J_{\pm} |a, b\rangle = c_{\pm}(a, b) |a, b \pm 1\rangle \quad (2.7)$$

dove $c_{\pm}(a, b)$ è un coefficiente funzione di a e b , mentre se lo stato $|a, b\rangle$ fosse degenere (e si mostrerà più avanti che si può assumere che non lo sia) si potrebbe solo affermare che $J_{\pm} |a, b\rangle$ è un autostato di J_z con autovalore $b \pm 1$.

Utilizzando gli operatori J_+ e J_- è semplice vedere che si ha la relazione

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2 = \frac{1}{2}(J_-^\dagger J_- + J_+^\dagger J_+) + J_z^2 \quad (2.8)$$

quindi si ha

$$2\langle a, b | (\mathbf{J}^2 - J_z^2) |a, b\rangle = \langle a, b | J_-^\dagger J_- |a, b\rangle + \langle a, b | J_+^\dagger J_+ |a, b\rangle = \|J_- |a, b\rangle\|^2 + \|J_+ |a, b\rangle\|^2 \geq 0 \quad (2.9)$$

e di conseguenza si deve avere

$$0 \leq \langle a, b | (\mathbf{J}^2 - J_z^2) |a, b\rangle = a - b^2 \quad (2.10)$$

Sia ora $|a, b\rangle$ un generico punto dello spettro; applicando n volte l'operatore J_+ si ottiene un multiplo di $|a, b + n\rangle$ e in particolare si può applicare J_+ un numero sufficiente di volte da fare in modo che la disuguaglianza Eq. (2.10) non sia più soddisfatta, quindi deve esistere $|a, b_M\rangle \neq 0$ tale che $J_+ |a, b_M\rangle = 0$; utilizzando la relazione

$$J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z \quad (2.11)$$

si ha allora

$$(a - b_M^2 - b_M) |a, b_M\rangle = (\mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z) |a, b_M\rangle = J_- J_+ |a, b_M\rangle = 0 \quad (2.12)$$

quindi

$$a = b_M(b_M + 1) \quad (2.13)$$

Se si applica n volte l'operatore J_- allo stato $|a, b_M\rangle$ si ottiene uno stato proporzionale a $|a, b_M - n\rangle$, quindi nuovamente per Eq. (2.10) deve esistere un N tale che $|a, b_M - N\rangle \neq 0$ e $J_-|a, b_M - N\rangle = 0$. Utilizzando la relazione

$$J_+J_- = \mathbf{J}^2 - J_z^2 + J_z \quad (2.14)$$

si ottiene quindi (chiamando $b_m \equiv b_M - N$)

$$(a - b_m^2 + b_m)|a, b_m\rangle = (\mathbf{J}^2 - J_z^2 + J_z)|a, b_m\rangle = J_+J_-|a, b_m\rangle \quad (2.15)$$

cioè

$$a = b_m(b_m - 1) . \quad (2.16)$$

Dalle equazioni Eq. (2.13) e Eq. (2.16) si ottiene $(b_m + b_M)(b_M - b_m + 1) = 0$, che usando la definizione di b_m si riscrive $(N + 1)(b_m + b_M) = 0$ e quindi (poichè per costruzione $N \geq 0$)

$$0 = b_m + b_M = 2b_M - N . \quad (2.17)$$

Siamo quindi arrivati a

$$b_M = N/2 , \quad b_m = -N/2 \quad \text{con } N \in \mathbb{N} \quad (2.18)$$

e se ora si pone $j = N/2$ si ottiene $b_M = j$, $b_m = -j$ e (da Eq. (2.13)) $a = j(j + 1)$. Inoltre, per come sono stati costruiti b_m e b_M si vede che appartengono allo spettro anche i punti $b = b_m + n$, con $n \in \mathbb{N}$ e $b_m \leq b \leq b_M$ (quindi $N + 1 = 2j + 1$ punti in totale).

Abbiamo quindi identificato gli stati $|j, m\rangle$ (con $2j \in \mathbb{N}$ e $m \in \{-j, -j + 1, \dots, j - 1, j\}$), che soddisfano le relazioni

$$\mathbf{J}^2|j, m\rangle = j(j + 1)|j, m\rangle , \quad J_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle . \quad (2.19)$$

Poichè questa struttura di autostati è stata ottenuta costruttivamente a partire dalla semplice esistenza di un singolo autostato non possono esistere altri punti dello spettro al di fuori di quelli trovati: a qualunque autostato $|a, b\rangle$ di \mathbf{J}^2, J_z si potrebbe riapplicare la procedure precedentemente descritta per identificare i possibili valori di a e b .

Resta da discutere la possibilità di degenerazioni e supponiamo ad esempio che l'autospazio corrispondente agli autovalori j e m abbia dimensione d . Si potrebbe quindi applicare la procedura descritta in precedenza a d vettori linearmente indipendenti di questo autospazio ed è facile capire che per tutti i valori ammissibili di m si otterrebbe la stessa degenerazione d . Questo fatto è semplice da interpretare: abbiamo ottenuto lo spettro e gli autostati a partire semplicemente dalle relazioni di commutazione Eq. (1.52), quindi non siamo in grado di distinguere ad esempio tra una rappresentazione delle matrici \mathbf{J} che agisce su uno spazio di dimensione N e la rappresentazione che agisce sullo spazio di dimensione $2N$ definita dalle matrici \mathbf{J}'

$$\mathbf{J}' = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{J} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{J} \end{array} \right) . \quad (2.20)$$

Le matrici \mathbf{J}' soddisfano la stessa algebra di commutazione delle \mathbf{J} ma nel caso di \mathbf{J}' tutti gli autovalori sono doppiamente degeneri. Se ci si limita a considerare le rappresentazioni non riducibili (ovvero senza sottospazi invarianti) allora tutti gli autovalori sono non degeneri.

Calcoliamo ora gli elementi di matrice di J_x, J_y e J_z . Per la convenzione usata di scegliere una base di autovettori di \mathbf{J}^2 e J_z , gli elementi di matrice di J_z seguono direttamente dalla seconda delle relazioni Eq. (2.19):

$$\langle j, m | J_z | j', m' \rangle = m \delta_{j,j'} \delta_{m,m'} \quad (2.21)$$

Per calcolare gli elementi di matrice di J_x e J_y è nuovamente conveniente passare agli operatori J_+ e J_- : usando la relazione

$$\mathbf{J}^2 = J_+J_- + J_z^2 - J_z \quad (2.22)$$

la relazione di completezza $\sum_{j',m'} |j', m'\rangle \langle j' m'| = I$ e il fatto che J_{\pm} non cambia il valore di j si trova

$$\begin{aligned}
j(j+1) &= \langle j, m | \mathbf{J}^2 | j, m \rangle = \langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle + m^2 - m = \\
&= \sum_{j', m'} \langle j, m | J_+ | j', m' \rangle \langle j', m' | J_- | j, m \rangle + m^2 - m = \\
&= \sum_{m'} \langle j, m | J_+ | j, m' \rangle \langle j, m' | J_- | j, m \rangle + m^2 - m = \\
&= \langle j, m | J_+ | j, m-1 \rangle \langle j, m-1 | J_- | j, m \rangle + m^2 - m
\end{aligned} \tag{2.23}$$

inoltre dal fatto che $J_+ = J_-^\dagger$ segue che $\langle j, m | J_+ | j, m-1 \rangle = \langle j, m-1 | J_- | j, m \rangle^*$ e quindi l'equazione precedente diventa

$$|\langle j, m-1 | J_- | j, m \rangle|^2 = j(j+1) - m^2 + m = (j+m)(j-m+1) \tag{2.24}$$

A questo punto possiamo scegliere arbitrariamente le fasi associate agli elementi della base e seguendo la convenzione di Condon e Shortley (vedi Sez. (4.2)) si impone che gli elementi di matrice di J_+ siano reali e positivi, ottenendo quindi

$$\langle j, m-1 | J_- | j, m \rangle = \langle j, m | J_+ | j, m-1 \rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \tag{2.25}$$

Utilizzando le relazioni $J_x = (J_+ + J_-)/2$ e $J_y = (J_+ - J_-)/2i$ si ottiene infine

$$\begin{aligned}
\langle j', m' | J_x | j, m \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{j',j} \delta_{m',m+1} + \frac{1}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{j',j} \delta_{m',m-1} \\
\langle j', m' | J_y | j, m \rangle &= \frac{i}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{j',j} \delta_{m',m+1} - \frac{i}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{j',j} \delta_{m',m-1}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Usando $j = 1/2$ e $j = 1$ si riottengono le rappresentazioni $\mathbf{J}^{(1/2)}$ e $\mathbf{J}^{(1)}$ che erano state introdotte in Sez. (1.3).

2.2 Il caso del momento angolare orbitale

Si è visto in Sez. (1.3) che nella rappresentazione di Schrödinger l'operatore momento angolare orbitale è $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$. Usando le coordinate polari definite da

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \theta \cos \phi, & y &= r \sin \theta \sin \phi, & z &= r \cos \theta \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, & \phi &= \arctan \frac{y}{x}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

e la chain-rule, le componenti cartesiane di \mathbf{L} assumono la forma

$$\begin{aligned}
L_x &= i \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
L_y &= i \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\
L_z &= -i \frac{\partial}{\partial \phi}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Dall'ultima equazione si vede chiaramente che L_z è il generatore delle rotazioni intorno a \hat{z} , in quanto è l'operatore traslazione nell'angolo ϕ . L'operatore \mathbf{L}^2 diventa

$$\mathbf{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \tag{2.29}$$

da cui si ottiene anche la formula

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} . \quad (2.30)$$

Poichè \mathbf{L} non coinvolge la parte radiale della funzione d'onda si cercheranno delle autofunzioni della forma $Y_{lm}(\theta, \phi)$.

L'equazione agli autovalori per L_z , cioè $L_z Y_{lm} = m Y_{lm}$ diventa

$$-i \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = m Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.31)$$

da cui si ottiene

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \psi_{lm}(\theta) \exp(im\phi) . \quad (2.32)$$

Poichè la funzione d'onda deve essere una funzione ad un singolo valore, si deve avere, nel caso del momento angolare orbitale azimutale, $m \in \mathbb{Z}$, mentre nel caso generale si era trovato $2m \in \mathbb{Z}$. Poichè il valore massimo di m coincide con j , se ne deduce che si deve anche avere $j \in \mathbb{N}$.

Per gli operatori di salita e discesa Eq. (2.3) si ottengono le espressioni

$$\begin{aligned} L_+ &= e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_- &= e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

e dalla relazione Eq. (2.25) si ottiene

$$\begin{aligned} L_+ |l, m\rangle &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle \\ L_- |l, m\rangle &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Consideriamo ora lo stato $|l, -l\rangle$, per il quale si deve avere $L_- |l, -l\rangle = 0$; usando l'espressione Eq. (2.33) e $|l, -l\rangle = \psi_{l-l}(\theta) e^{-il\phi}$, si arriva all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \psi_{l-l}(\theta) - l \cot \theta \psi_{l-l}(\theta) = 0 \quad (2.35)$$

che ha come soluzione

$$\psi_{l-l}(\theta) = a(\sin \theta)^l . \quad (2.36)$$

A questo punto si può applicare allo stato $|l, m\rangle = \psi_{lm}(\theta) e^{im\phi}$ l'operatore L_+ nella forma Eq. (2.33) ed uguagliare il risultato con quanto previsto dalla relazione Eq. (2.34), ottenendo la relazione ricorsiva

$$\psi_{l, m+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{(l-m)(l+m+1)}} \left(\frac{d}{d\theta} - m \cot \theta \right) \psi_{lm}(\theta) \quad (2.37)$$

Verifichiamo ora per induzione che si ha la seguente formula esplicita (il fattore moltiplicativo $(-1)^l$ è convenzionale):

$$\psi_{lm}(\theta) = a(-1)^{l+m} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!(l+m)!}} \sin^m \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{l+m} \sin^{2l} \theta \quad (2.38)$$

Per $m = -l$ questa espressione coincide con con la funzione Eq. (2.36) precedentemente trovata; applicando la relazione ricorsiva Eq. (2.37) a Eq. (2.38) si ottiene

$$\psi_{l, m+1}(\theta) = a(-1)^{l+m} \sqrt{\frac{(l-[m+1])!}{(2l)!(l+[m+1])!}} \left(\frac{d}{d\theta} - m \cot \theta \right) \left[\sin^m \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{l+m} \sin^{2l} \theta \right] \quad (2.39)$$

ed esplicitamente

$$\left(\frac{d}{d\theta} - m \cot \theta\right) \left[\sin^m \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta}\right)^{l+m} \sin^{2l} \theta \right] = -\sin^{m+1} \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta}\right)^{l+m+1} \sin^{2l} \theta. \quad (2.40)$$

Si ha quindi

$$\psi_{lm+1} = a(-1)^{l+m+1} \sqrt{\frac{(l-[m+1])!}{(2l)!(l+[m+1])!}} \sin^{m+1} \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta}\right)^{l+m+1} \sin^{2l} \theta \quad (2.41)$$

che conclude la dimostrazione per induzione.

Determiniamo ora la costante a imponendo la condizione di normalizzazione $\langle l, -l | l, -l \rangle = 1$, cioè

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta |Y_{l,-l}(\theta, \phi)|^2 \sin \theta = 2\pi |a|^2 \int_0^\pi \sin^{2l+1} \theta d\theta = \\ &\stackrel{x=\cos \theta}{=} 2\pi |a|^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx \equiv 2\pi |a|^2 I_l. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Integrando per parti si trova

$$I_l = \int_{-1}^1 (1-x^2)^l dx = 2l \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{l-1} dx = 2l I_{l-1} - 2l I_l \quad (2.43)$$

e quindi (usando $I_0 = 2$)

$$I_l = \frac{2l}{2l+1} I_{l-1} = 2 \frac{2^l l!}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots 1} = 2 \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}, \quad (2.44)$$

da cui si ottiene (ovviamente la fase di a è scelta in modo convenzionale)

$$a = \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \quad (2.45)$$

e quindi infine sostituendo in Eq. (2.38) si trova la forma

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = e^{im\phi} \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l-m)!(2l+1)}{(l+m)!4\pi}} \sin^m \theta \left(\frac{d}{d \cos \theta}\right)^{l+m} \sin^{2l} \theta \quad (2.46)$$

per le autofunzioni di \mathbf{L}^2 e L_z . Queste funzioni sono dette funzioni armoniche sferiche e soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) \sin \theta = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (2.47)$$

che sono l'equivalente nella rappresentazione di Schrödinger delle relazioni $\langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$ e formano una base dello spazio di Hilbert $\mathbb{L}^2(S^2)$, dove S^2 è la sfera in 3 dimensioni (vedi [6] §29.2 per una dimostrazione diretta). Per rendere più esplicita la relazione tra $|l, m\rangle$ e le armoniche sferiche si usa talvolta anche la notazione $Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \hat{\mathbf{n}} | l, m \rangle$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore corrispondente agli angoli θ e ϕ .

È possibile riscrivere l'espressione di $Y_{lm}(\theta, \phi)$ in termini delle coordinate cartesiane x, y, z usando

$$r e^{i\phi} \sin \theta = x + iy, \quad r \cos \theta = z, \quad (2.48)$$

ottenendo

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto r^{-l} (x + iy)^m \left(\frac{d}{dz}\right)^{l+m} (r^2 - z^2)^l, \quad (2.49)$$

dove d/dz deve essere considerata come una derivata a r costante. Si vede quindi, risostituendo $r^2 - z^2 = x^2 + y^2$ dopo aver effettuato le derivate, che $r^l Y_{lm}(\theta, \phi)$ è un polinomio omogeneo di grado l nelle coordinate cartesiane e da Eq. (2.30) si vede inoltre che soddisfa l'equazione di Laplace, da cui il termine armoniche usato per le armoniche sferiche (questa è la definizione usata in [6] §29 e [8] §II.4 per le armoniche sferiche).

Per ottenere la forma esplicita di Y_{lm} siamo partiti dall'autostato $|l, -l\rangle$ e si è poi usato L_+ ; si sarebbe potuto procedere in modo identico partendo da $|l, l\rangle$ ed applicando L_- . La autofunzione di partenza sarebbe stata $\psi_{ll}(\theta) = a(\sin \theta)^l$ e si sarebbe arrivati alla forma finale

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = e^{im\phi} \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(l+m)!(2l+1)}{(l-m)!4\pi}} \frac{1}{\sin^m \theta} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{l-m} \sin^{2l} \theta \quad (2.50)$$

e si verifica facilmente che le fasi sono state scelte in modo consistente in Eq. (2.46) e in Eq. (2.50) studiando il caso $m = 0$.

Dal confronto di Eq. (2.46) con Eq. (2.50) si vede subito che

$$Y_{l-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) . \quad (2.51)$$

Dalla espressione esplicita per le Y_{lm} si vede inoltre che

$$Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.52)$$

che può essere scritta come

$$Y_{lm}(-\hat{\mathbf{n}}) = (-1)^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) , \quad (2.53)$$

dalla quale segue che gli stati Y_{lm} sono stati con parità $(-1)^l$. Nel caso particolare $m = 0$, la forma Eq. (2.50) si riduce a

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^l (1 - \cos^2 \theta)^l \quad (2.54)$$

ovvero

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) , \quad (2.55)$$

dove $P_l(\cos \theta)$ sono i polinomi di Legendre. Utilizzando l'espressione precedente (che corrisponde alla formula di Rodriguez per i polinomi di Legendre) è inoltre semplice calcolare $P_l(1)$, infatti si ha

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} [(z-1)^l (z+1)^l] \quad (2.56)$$

e l'unico contributo a $z = 1$ è quello che si ottiene derivando l volte il termine $(z-1)^l$, quindi si vede subito che $P_l(1) = 1$ per tutti i valori di l . In modo analogo (o usando Eq. (2.53)) si vede che $P_l(-1) = (-1)^l$.

3 Le matrici di rotazione

3.1 Gli angoli di Eulero ed alcune proprietà generali

Una generica rotazione tridimensionale dipende da tre parametri ed una scelta conveniente di questi parametri sono gli angoli di Eulero α , β e γ definiti tramite la seguente procedura¹ che permette di passare da un dato sistema di assi S ad un generico altro sistema S''' :

- si effettua una rotazione di un angolo α ($0 \leq \alpha < 2\pi$) intorno all'asse \hat{z} del sistema S , ottenendo il sistema S' ,
- si effettua una rotazione di un angolo β ($0 \leq \beta < \pi$) intorno all'asse \hat{y}' del sistema S' , ottenendo il sistema S'' ,
- si effettua una rotazione di un angolo γ ($0 \leq \gamma < 2\pi$) intorno all'asse \hat{z}'' del sistema S'' , ottenendo il sistema finale S''' .

Una generica rotazione viene quindi parametrizzata nella forma $R_{\hat{z}''}(\gamma)R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}}(\alpha)$.

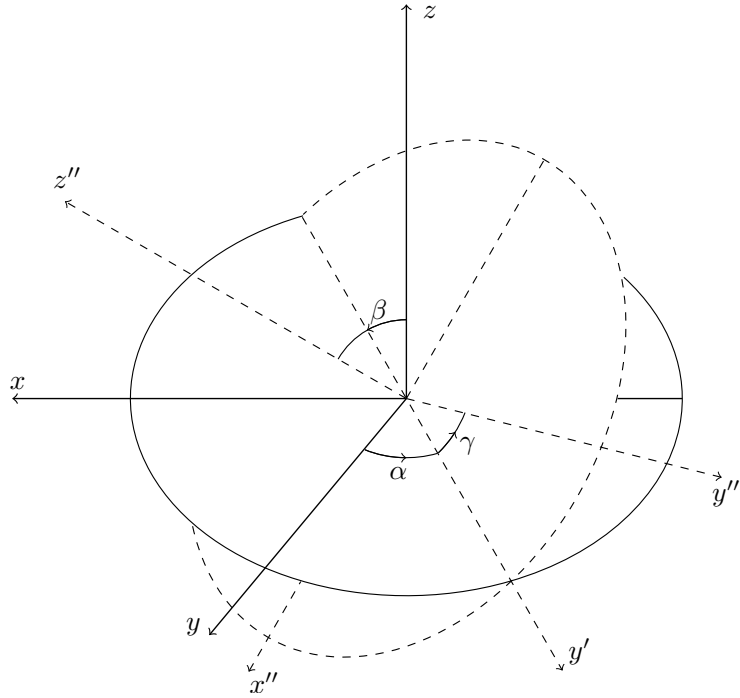


Figura 1: Rappresentazione grafica degli angoli di Eulero.

Per scrivere la matrice di rotazione quantistica è necessario riscrivere le rotazioni usate nella definizione degli angoli di Eulero in termini di rotazioni rispetto agli assi coordinati del sistema fisso di partenza, in quanto il momento angolare è il generatore delle rotazioni intorno a questi assi. A questo proposito si possono usare le seguenti relazioni:

$$R_{\hat{y}'}(\beta) = R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}}(-\alpha) , \quad R_{\hat{z}''}(\gamma) = R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}''}(\gamma)R_{\hat{y}'}(-\beta) . \quad (3.1)$$

¹Normalmente in meccanica classica nel secondo passaggio si effettua una rotazione intorno a \hat{x}' e non rispetto a \hat{y}' ; il vantaggio di usare \hat{y}' in meccanica quantistica è che così facendo la matrice $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ che si introdurrà a breve ha componenti reali, in quanto J_y ha elementi di matrice puramente immaginari (vedi Eq. (2.26)).

Dimostriamo la prima identità: $R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(-\alpha)$ è una rotazione e per identificare l'asse di rotazione è sufficiente identificare un vettore che viene lasciato invariato dalla rotazione. È immediato vedere che un tale vettore è ad esempio $\hat{y}' = R_{\hat{z}}(\alpha)\hat{y}$:

$$R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(-\alpha)\hat{y}' = R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)\hat{y} = R_{\hat{z}}(\alpha)\hat{y} = \hat{y}' \quad (3.2)$$

e per mostrare che l'angolo di rotazione attorno a \hat{y}' è proprio β basta considerare ad esempio l'azione di $R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(-\alpha)$ su \hat{z} . La seconda delle identità in Eq. (3.1) si mostra in modo analogo.

Utilizzando le identità Eq. (3.1) si può allora riscrivere la matrice di rotazione come segue

$$\begin{aligned} R_{\hat{z}''}(\gamma)R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}}(\alpha) &= R_{\hat{y}'}(\beta)R_{\hat{z}'}(\gamma)R_{\hat{z}}(\alpha) = R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(-\alpha)R_{\hat{z}'}(\gamma)R_{\hat{z}}(\alpha) = \\ &= R_{\hat{z}}(\alpha)R_{\hat{y}}(\beta)R_{\hat{z}}(\gamma) \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $\hat{z}' = \hat{z}$.

Se si indica con $D(\alpha, \beta, \gamma)$ l'operatore di rotazione nello spazio di Hilbert del sistema corrispondente ad una rotazione caratterizzata dagli angoli di Eulero α, β, γ , usando Eq. (1.51) si ha allora

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_{\hat{z}}(\alpha)D_{\hat{y}}(\beta)D_{\hat{z}}(\gamma) = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\gamma J_z) \quad (3.4)$$

e notiamo esplicitamente che, poichè le relazioni di commutazione del momento angolare \mathbf{J} sono le stesse di quelle dei generatori delle rotazioni tridimensionali, l'operatore D associato alla composizione di due rotazioni tridimensionali R_1 e R_2 non è altro che la composizione dei due operatori D_1 e D_2 associati rispettivamente a R_1 e R_2 , come si vede ad esempio usando le relazioni di Backer-Campbell-Hausdorff Eq. (1.45). Questo fatto era stato già implicitamente usato nella definizione di D in Eq. (3.4), in cui si mantiene la struttura di Eq. (3.3). Per gli elementi di matrice dell'operatore di rotazione si ha

$$\langle j', m' | D(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle = e^{-i\alpha m'} \langle j', m' | \exp(-i\beta J_y) | j, m \rangle e^{-im\gamma} . \quad (3.5)$$

e poichè $[\mathbf{J}^2, J_y] = 0$ si ha anche $[\mathbf{J}^2, \exp(-i\beta J_y)] = 0$, quindi

$$0 = \langle j', m' | [\mathbf{J}^2, \exp(-i\beta J_y)] | j, m \rangle = (j'(j' + 1) - j(j + 1)) \langle j', m' | \exp(-i\beta J_y) | j, m \rangle , \quad (3.6)$$

dunque $\langle j', m' | \exp(-i\beta J_y) | j, m \rangle \propto \delta_{j,j'}$, da cui si ottiene infine

$$\langle j', m' | D(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle = \delta_{j,j'} e^{-i(m\gamma + m'\alpha)} \langle j, m' | \exp(-i\beta J_y) | j, m \rangle \quad (3.7)$$

Gli elementi di matrice $\langle j, m' | D(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle$ sono indicati con la notazione $D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ mentre l'elemento di matrice a secondo membro dell'equazione precedente si indica con $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$, quindi si ha

$$D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i(m'\alpha + m\gamma)} d_{m'm}^{(j)}(\beta) . \quad (3.8)$$

Consideriamo ora l'effetto di una rotazione sulla base $|j, m\rangle$: usando la relazione di completezza

$$\sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} |j', m'\rangle \langle j', m'| = I \quad (3.9)$$

si ha

$$\begin{aligned} D(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle &= \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} |j', m'\rangle \langle j', m'| D(\alpha, \beta, \gamma) | j, m \rangle = \\ &= \sum_{j'=0}^{\infty} \sum_{m'=-j'}^{j'} |j', m'\rangle \delta_{j,j'} D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m'=-j}^j |j, m'\rangle D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) , \end{aligned} \quad (3.10)$$

quindi si vede che per j fissato l'insieme degli stati $|j, m\rangle$ trasforma linearmente in se stesso sotto rotazioni e costituisce quindi una rappresentazione del gruppo² delle rotazioni, indicata generalmente con il simbolo $\mathfrak{D}^{(j)}$. Vediamo ora che questa rappresentazione è irriducibile, cioè non esistono in essa sottospazi invarianti non banali. Se X è un sottospazio invariante non banale degli stati a j fissato, allora deve esistere almeno un vettore \mathbf{v} non nullo del sottospazio a j fissato tale che per ogni rotazione $D(R^{-1})$ e ogni vettore $\mathbf{w} \in X$ si abbia

$$0 = \langle D(R^{-1})\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \langle D(R)^\dagger\mathbf{w}|\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{w}|D(R)\mathbf{v}\rangle \quad (3.11)$$

Se consideriamo rotazioni della forma $D(0, \beta, 0)$, con $\beta \ll 1$, allora si ha

$$D(0, \beta, 0) = \exp(-i\beta J_y) \simeq I - i\beta J_y = I - \frac{\beta}{2}J_+ + \frac{\beta}{2}J_- \quad (3.12)$$

da cui (usando Eq. (2.25))

$$\begin{aligned} D(0, \beta, 0)|j, m\rangle &\simeq |j, m\rangle - \frac{\beta}{2}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}|j, m+1\rangle + \\ &+ \frac{\beta}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

da cui si vede che l'immagine di $|j, m\rangle$ tramite una rotazione ha anche componenti dirette lungo $|j, m+1\rangle$ e $|j, m-1\rangle$ (ovviamente a parte i casi $m = \pm j$, in cui vi è solo una di queste due componenti). Esiste quindi un vettore non nullo ortogonale a tutto il sottospazio invariante X della forma $\mathbf{v} = \sum_{m=-j}^j a_m |j, m\rangle$ in cui tutti i coefficienti a_m sono non nulli. Considerando una rotazione della forma $D(0, 0, \gamma)$ si vede allora che tutti i vettori $\mathbf{v}_\gamma = \sum_{m=-j}^j a_m e^{-im\gamma} |j, m\rangle$ sono ortogonali a X per ogni γ . Poichè gli esponenziali complessi sono linearmente indipendenti, da $\langle \mathbf{w}|\mathbf{v}_\gamma\rangle = 0$ segue (poichè $a_m \neq 0$) $\langle \mathbf{w}|j, m\rangle = 0$ per ogni m e quindi $\mathbf{w} = 0$, che contraddice l'ipotesi di partenza che il sottospazio X sia non banale.

Nel caso particolare $j = 1/2$, il calcolo delle matrici di rotazione risulta particolarmente semplice: dalla formula Eq. (1.62) si ha infatti

$$d_{m'm}^{(1/2)}(\beta) = \langle 1/2, m'|\exp(-i\beta\sigma_y/2)|1/2, m\rangle = \langle 1/2, m'|(\cos(\beta/2) - i\sigma_y \sin(\beta/2))|1/2, m\rangle \quad (3.14)$$

per cui si ha (usando la formula esplicita Eq. (1.56) di σ_y)

$$d_{m'm}^{(1/2)}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

e usando la relazione Eq. (3.8) si ottiene

$$D_{m'm}^{(1/2)}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) & -e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) \\ e^{i(\alpha-\gamma)/2} \sin(\beta/2) & e^{i(\alpha+\gamma)/2} \cos(\beta/2) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

3.2 La forma esplicita di $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ e le sue simmetrie

Per il calcolo degli elementi di matrice $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ è conveniente introdurre una nuova rappresentazione per gli stati con $j = 1/2$, tramite la quale si otterrà poi una espressione per gli stati $|j, m\rangle$ generici. Introduciamo quindi i simboli χ_+ e χ_- (corrispondenti agli stati $|1/2, 1/2\rangle$ e $|1/2, -1/2\rangle$ rispettivamente) e

$$\partial_+ = \frac{\partial}{\partial \chi_+}, \quad \partial_- = \frac{\partial}{\partial \chi_-}, \quad (3.17)$$

²Più precisamente: dell'algebra del gruppo delle rotazioni. Le rappresentazioni $\mathfrak{D}^{(j)}$ per generici valori di j sono rappresentazioni del gruppo SU(2), che ha la stessa algebra del gruppo delle rotazioni SO(3). Le rappresentazioni del gruppo SO(3) sono quelle associate ai valori interi di j .

dove i simboli χ_- , χ_+ devono essere considerati indipendenti, cioè $\partial_+\chi_- = 0$ e $\partial_-\chi_+ = 0$. Questa è una rappresentazione differenziale del formalismo degli operatori di creazione e annichilazione di Schwinger [4, 5].

A questo punto si possono riscrivere gli operatori momento angolare in questa rappresentazione:

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(\chi_-\partial_+ + \chi_+\partial_-), & J_y &= \frac{i}{2}(\chi_-\partial_+ - \chi_+\partial_-), \\ J_z &= \frac{1}{2}(\chi_+\partial_+ - \chi_-\partial_-), & J_+ &= \chi_+\partial_-, & J_- &= \chi_-\partial_+, \end{aligned} \quad (3.18)$$

ed è immediato verificare che questi operatori soddisfano le regole di commutazione Eq. (1.52) e Eq. (2.4), inoltre ovviamente $J_z\chi_+ = \chi_+/2$ e $J_z\chi_- = -\chi_-/2$. Utilizzando questi operatori si ottiene infine per \mathbf{J}^2

$$\mathbf{J}^2 = K(K+1), \quad K = \frac{1}{2}(\chi_+\partial_+ + \chi_-\partial_-). \quad (3.19)$$

Utilizzando queste espressioni è immediato verificare che $\chi_+^x\chi_-^y$ è autovalore di J_z e \mathbf{J}^2 con autovalori rispettivamente

$$\frac{1}{2}(x-y), \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}+1\right), \quad (3.20)$$

quindi usando $x = j+m$ e $y = j-m$ si ottiene $|j, m\rangle$ a meno di coefficienti di proporzionalità che possono dipendere sia da j che da m . Per verificare che la corretta normalizzazione (a meno di fattori moltiplicativi che possono dipendere solo da j e che saranno irrilevanti nel seguito) è

$$u(j, m) = \frac{\chi_+^{j+m}\chi_-^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \quad (3.21)$$

basta verificare che siano valide le relazioni Eq. (2.25):

$$\begin{aligned} J_+u(j, m) &= \chi_+\partial_-u(j, m) = (j-m)\frac{\chi_+^{j+m+1}\chi_-^{j-m-1}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} = \\ &= (j-m)\frac{\sqrt{j+m+1}}{\sqrt{j-m}}u(j, m+1) = \sqrt{(j+m+1)(j-m)}u(j, m+1). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nonostante nel seguito di questa sezione non si userà esplicitamente questo fatto, notiamo che si può introdurre uno spazio di Hilbert nel quale le funzioni $u(j, m)$ definite in Eq. (3.21) risultano essere ortonormali: questo è lo spazio di Bargmann-Segal e si ottiene interpretando χ_{\pm} come variabili complesse (per questo motivo questa rappresentazione è anche spesso chiamata rappresentazione olomorfa o analitica ed è legata agli stati coerenti, vedi ad es. [2] §7.2D) ed usando il prodotto scalare

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi^2} \int f(\chi_+, \chi_-)^* g(\chi_+, \chi_-) \exp(-|\chi_+|^2 - |\chi_-|^2) d\chi_+ d\chi_- \quad (3.23)$$

dove l'integrazione su $d\chi_+$ (e $d\chi_-$) è estesa a tutto \mathbb{C} .

Consideriamo a questo punto l'effetto di una rotazione $D(0, \beta, 0)$: da Eq. (3.10) si deve avere

$$D(0, \beta, 0)u(j, m) = \sum_{m'=-j}^j d_{m'm}^{(j)}(\beta) \frac{\chi_+^{j+m'}\chi_-^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}, \quad (3.24)$$

inoltre è immediato vedere che $D(0, \beta, 0)|j, m\rangle$ è un autostato con autovalori j , m del momento angolare ruotato $D(0, \beta, 0)\mathbf{J}D(0, -\beta, 0)$. Poichè i momenti angolari "ruotati" soddisfano la stessa algebra dei momenti angolari di partenza, anche per loro si può ripetere la costruzione fatta all'inizio di questa sezione e scrivere il generico autostato del momento angolare "ruotato" tramite gli stati $\chi'_+ = |1/2, 1/2\rangle$ e $\chi'_- = |1/2, -1/2\rangle$ del sistema ruotato. Questo equivale ad usare l'espressione

Eq. (3.21) con la sostituzione $\chi_{\pm} \rightarrow \chi'_{\pm}$, dove χ'_{\pm} sono gli stati ottenuti ruotando χ_{\pm} tramite la matrice $d_{m'm}^{(1/2)}(\beta)$ che è già stata calcolata in precedenza, vedi Eq. (3.15). Quindi

$$\begin{aligned}\chi'_+ &= \chi_+ \cos \frac{\beta}{2} + \chi_- \sin \frac{\beta}{2} \\ \chi'_- &= -\chi_+ \sin \frac{\beta}{2} + \chi_- \cos \frac{\beta}{2}\end{aligned}\quad (3.25)$$

e gli elementi di matrice $d_{m'm}^{(j)}(\beta)$ devono soddisfare l'equazione

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \left(\chi_+ \cos \frac{\beta}{2} + \chi_- \sin \frac{\beta}{2} \right)^{j+m} \left(-\chi_+ \sin \frac{\beta}{2} + \chi_- \cos \frac{\beta}{2} \right)^{j-m} &= \\ &= \sum_{m'=-j}^j d_{m'm}^{(j)}(\beta) \frac{\chi_+^{j+m'} \chi_-^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Il primo membro è uguale (a meno dalla costante moltiplicativa comune) a

$$\begin{aligned}\left[\sum_{\rho=0}^{j+m} \binom{j+m}{\rho} \chi_+^{j+m-\rho} \chi_-^{\rho} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{j+m-\rho} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{\rho} \right] \times \\ \times \left[\sum_{\xi=0}^{j-m} \binom{j-m}{\xi} \chi_+^{j-m-\xi} \chi_-^{\xi} \left(-\sin \frac{\beta}{2} \right)^{j-m-\xi} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{\xi} \right]\end{aligned}\quad (3.27)$$

i termini di questo prodotto che risultano proporzionali a $\chi_+^{j+m'} \chi_-^{j-m'}$ sono quelli per cui $\rho + \xi = j - m'$ e uguagliando in Eq. (3.26) i termini con le stesse potenze di χ_+ e χ_- si ottiene

$$\begin{aligned}d_{m'm}^{(j)}(\beta) &= \sum_{\xi} (-1)^{j-m-\xi} \sqrt{\frac{(j+m')!(j-m)!}{(j+m)!(j-m)!}} \binom{j+m}{j-m'-\xi} \binom{j-m}{\xi} \times \\ &\times \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2\xi+m+m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{2j-2\xi-m-m'}\end{aligned}\quad (3.28)$$

dove la somma deve essere estesa a tutti i valori interi di ξ per i quali sono soddisfatte le disuguaglianze $0 \leq \xi \leq j - m$ e $0 \leq j - m' - \xi \leq j + m$. In particolare se $m = j$ l'unico valore accettabile di ξ è 0 e si ottiene

$$d_{m'j}^{(j)}(\beta) = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m')!(j-m')!}} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{j+m'} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{j-m'} \quad (3.29)$$

Se usiamo $\beta = \pi$ nell'espressione Eq. (3.28) gli unici termini della somma che possono dare un risultato non nullo sono quelli per i quali $\xi = -\frac{m+m'}{2}$, inoltre si deve avere $\xi \geq 0$ (quindi $m' \leq -m$) e $j - m' - \xi \leq j + m$ (quindi $m' \geq -m$) e di conseguenza questo è possibile solo nel caso in cui si abbia $m = -m'$ e dunque $\xi = 0$. Si trova quindi

$$d_{m'm}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m',-m} \quad (3.30)$$

e

$$d_{m'm}^{(j)}(2\pi) = d_{m'm}^{(j)}(\pi + \pi) = \sum_{m''} d_{m'm''}^{(j)}(\pi) d_{m''m}^{(j)}(\pi) = (-1)^{2j} \delta_{m',m} . \quad (3.31)$$

Analogamente

$$\begin{aligned}d_{m'm}^{(j)}(\beta + \pi) &= \sum_{m''} d_{m'm''}^{(j)}(\beta) d_{m''m}^{(j)}(\pi) = (-1)^{j-m} d_{m',-m}^{(j)}(\beta) \\ &= \sum_{m''} d_{m'm''}^{(j)}(\pi) d_{m''m}^{(j)}(\beta) = (-1)^{j+m'} d_{-m',m}^{(j)}(\beta)\end{aligned}\quad (3.32)$$

da cui si trova in particolare

$$d_{m' -m}^{(j)}(\beta) = (-1)^{m'+m} d_{-m' m}^{(j)}(\beta) \quad (3.33)$$

Inoltre $d_{m' m}^{(j)}(\beta)$ è una matrice unitaria reale (quindi la sua inversa è uguale alla sua trasposta) e la sua inversa si ottiene semplicemente con la sostituzione $\beta \rightarrow -\beta$, quindi

$$d_{m' m}^{(j)}(-\beta) = d_{m' m}^{(j)}(\beta) . \quad (3.34)$$

Infine se in Eq. (3.28) si sostituisce $\beta \rightarrow -\beta$ l'unico termine che si modifica è il termine con $\sin(\beta/2)$ ed ogni termine della sommatoria cambia di una quantità $(-1)^{2j-2\xi-m-m'}$. Tuttavia ξ è un numero naturale quindi si trova (usando il fatto che $m' - j$ è un numero intero e quindi $(-1)^{2m'-2j} = 1$)

$$d_{m' m}^{(j)}(-\beta) = (-1)^{2j-m-m'} d_{m' m}^{(j)}(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{m' m}^{(j)}(\beta) \quad (3.35)$$

e infine usando Eq. (3.33) con $m \rightarrow -m$ e notando che $(-1)^{2m'-2m} = +1$ si trova

$$d_{m' m}^{(j)}(-\beta) = d_{-m' -m}^{(j)}(\beta) . \quad (3.36)$$

3.3 Le matrici di rotazione come autovettori del momento angolare

Per studiare la relazione tra le matrici di rotazione $D_{m' m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$ e gli autostati del momento angolare è innanzitutto conveniente riscrivere gli operatori del momento angolare in funzione degli angoli di Eulero. Poichè J_x , J_y e J_z sono i generatori delle rotazioni intorno agli assi coordinati, si può scrivere

$$J_x = -i \frac{\partial}{\partial \phi_x} , \quad J_y = -i \frac{\partial}{\partial \phi_y} , \quad J_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi_z} , \quad (3.37)$$

dove ϕ_x rappresenta l'angolo di rotazione intorno all'asse \hat{x} ed analogamente per ϕ_y e ϕ_z . Serve ora riscrivere questi operatori in termini di α , β e γ ; a questo proposito si può usare il fatto notato in Sez. (1.1) che le rotazioni infinitesime si compongono come vettori, quindi

$$\delta \phi_x \hat{x} + \delta \phi_y \hat{y} + \delta \phi_z \hat{z} = \delta \alpha \hat{z} + \delta \beta \hat{y}' + \delta \gamma \hat{z}'' . \quad (3.38)$$

Proiettando su \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} (vedi Fig. (1)) si trovano subito le relazioni

$$\begin{aligned} \delta \phi_x &= -\delta \beta \sin \alpha + \delta \gamma \sin \beta \cos \alpha \\ \delta \phi_y &= \delta \beta \cos \alpha + \delta \gamma \sin \beta \sin \alpha \\ \delta \phi_z &= \delta \alpha + \delta \gamma \cos \beta \end{aligned} \quad (3.39)$$

e da cui invertendo si trova

$$\begin{aligned} \delta \alpha &= -\delta \phi_x \cot \beta \cos \alpha - \delta \phi_y \cot \beta \sin \alpha + \delta \phi_z \\ \delta \beta &= -\delta \phi_x \sin \alpha + \delta \phi_y \cos \alpha \\ \delta \gamma &= \delta \phi_x \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} + \delta \phi_y \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Utilizzando queste equazione per cambiare variabile nelle derivate $\partial/\partial \phi_a$ si trova

$$\begin{aligned} J_x &= -i \left(-\cos \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \\ J_y &= -i \left(-\sin \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \\ J_z &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (3.41)$$

e

$$\mathbf{J}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right). \quad (3.42)$$

Usando le forme esplicite Eq. (3.8) e Eq. (3.28) si potrebbe a questo punto mostrare per verifica diretta che il complesso coniugato della matrice di rotazione $[D_{m' m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)]^*$ è autostato di \mathbf{J}^2 con autovalore $j(j+1)$ e autostato di J_z con autovalore m' (e autostato di J_z'' con autovalore m , vedi [1] §4.8 e [3] §103 per la relazione con la quantizzazione della trottole). È inoltre immediato verificare che le equazioni Eq. (3.41) si riducono a Eq. (2.28) per $m = 0$ (che elimina la dipendenza da γ) e con le identificazioni $\alpha \leftrightarrow \phi$ e $\beta \leftrightarrow \theta$, quindi per l intero abbiamo

$$D_{m' 0}^{(l)}(\alpha, \beta, \gamma) \propto Y_{l m'}^*(\beta, \alpha), \quad (3.43)$$

con la costante di proporzionalità che può dipendere solo da l , in quanto la dipendenza da m segue dagli operatori di salita e discesa, che sono i soliti in entrambi i casi. Per fissare la costante di proporzionalità si può usare il caso $m' = l$: in Eq. (3.28) si vede che per $m' = j$ è presente solo il termine $\xi = 0$ e si ha

$$d_{l 0}^{(l)}(\beta) = (-1)^l \frac{\sqrt{(2l)!}}{l! 2^l} \sin^l \beta \quad (3.44)$$

e confrontando con Eq. (2.50) si ottiene

$$D_{m' 0}^{(l)}(\alpha, \beta, 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l m'}^*(\beta, \alpha). \quad (3.45)$$

In particolare da Eq. (2.55) segue $d_{0 0}^{(l)}(\beta) = P_l(\cos(\beta))$.

Esponiamo ora un metodo elementare e particolarmente diretto di ottenere la relazione tra matrici di rotazione e armoniche sferiche, che non usa le forme esplicite [4]: indichiamo con $|\hat{\mathbf{n}}\rangle$ un autostato direzionale orientato lungo $\hat{\mathbf{n}}$ (intendiamo in pratica un autostato della posizione in cui la parte radiale è stata fattorizzata) e con $|\hat{\mathbf{z}}\rangle$ il caso specifico orientato lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. Si ha allora

$$|\hat{\mathbf{n}}\rangle = D(\phi, \theta, 0)|\hat{\mathbf{z}}\rangle, \quad (3.46)$$

dove ϕ e θ sono le coordinate polari che identificano la direzione $\hat{\mathbf{n}}$. Inserendo una relazione di completezza $I = \sum_{l, m} |l, m\rangle \langle l, m|$ prima di $|\hat{\mathbf{z}}\rangle$ e moltiplicando poi a sinistra per $\langle l, m'|$ si ottiene

$$\langle l, m' | \hat{\mathbf{n}} \rangle = \sum_m D_{m' m}^{(l)}(\phi, \theta, 0) \langle l, m | \hat{\mathbf{z}} \rangle. \quad (3.47)$$

Usiamo ora quella che è sostanzialmente la definizione delle armoniche sferiche, cioè $Y_{l m'}(\theta, \phi) = \langle \hat{\mathbf{n}} | l, m' \rangle$: nel caso specifico di $\hat{\mathbf{z}}$ si ha $\theta = 0$ e dalla formula esplicita delle armoniche sferiche Eq. (2.46) si vede che $Y_{l m}(0, \phi)$ si annulla se $m \neq 0$, mentre per $m = 0$ si ha $Y_{l 0}(0, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ (vedi Eq. (2.55), dopo la quale si è mostrato anche che $P_l(1) = 1$). Di conseguenza

$$\langle l, m | \hat{\mathbf{z}} \rangle = \delta_{m 0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \quad (3.48)$$

e quindi

$$Y_{l m'}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m' 0}^{(l)}(\phi, \theta, 0), \quad (3.49)$$

che è equivalente a Eq. (3.45).

Un modo completamente diverso di procedere è il seguente [5]: partendo da

$$D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \exp(i\gamma J_z) \exp(i\beta J_y) \exp(i\alpha J_z) \quad (3.50)$$

si trova subito

$$\begin{aligned}
-i \frac{\partial}{\partial \alpha} D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) &= D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) J_z \\
-i \frac{\partial}{\partial \beta} D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) &= D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) J'_y \\
-i \frac{\partial}{\partial \gamma} D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) &= D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) J'_z
\end{aligned} \tag{3.51}$$

dove

$$J'_y = e^{-i\alpha J_z} J_y e^{i\alpha J_z}, \quad J'_z = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} J_z e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z}. \tag{3.52}$$

Gli operatori J'_y e J'_z possono essere scritti in termini di J_x , J_y , J_z applicando la relazione Eq. (1.34). Partiamo da J'_y : si ha

$$J'_y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} [J_z^{(n)}, J_y] \tag{3.53}$$

inoltre

$$[J_z^{(0)}, J_y] = J_y, \quad [J_z^{(1)}, J_y] = [J_z, J_y] = -iJ_x, \quad [J_z^{(2)}, J_y] = [J_z, -iJ_x] = J_y, \dots \tag{3.54}$$

quindi si ottiene

$$J'_y = J_y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^{2n}}{2n!} - iJ_x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} = J_y \cos \alpha - J_x \sin \alpha. \tag{3.55}$$

In modo completamente analogo si ottiene con due passaggi

$$J'_z = \sin \beta \cos \alpha J_x + \sin \beta \sin \alpha J_y + \cos \beta J_z. \tag{3.56}$$

Le espressioni di J'_y e J'_z si possono facilmente comprendere una volta realizzato che J'_y è il generatore delle rotazioni attorno all'asse \hat{y}' (vedi Fig. (1)), mentre J'_z è il generatore delle rotazioni attorno a \hat{z}'' ; di conseguenza si ha $J'_y = -i \frac{\partial}{\partial \beta}$ e $J'_z = -i \frac{\partial}{\partial \gamma}$ ed usando Eq. (3.39) per cambiare variabile nelle derivate si riottengono le equazioni precedenti.

Usando le precedenti espressioni si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 &= J_z^2 + J_y^2 + J_x^2 = J_z^2 + (J_x \cos \alpha + J_y \sin \alpha)^2 + (J_y \cos \alpha - J_x \sin \alpha)^2 = \\
&= J_z^2 + \frac{1}{\sin^2 \beta} (J'_z - J_z \cos \beta)^2 + J_y'^2 = \frac{1}{\sin^2 \beta} [J_z'^2 + J_z^2 - 2 \cos \beta J'_z J_z] - i \cot \beta J'_y + J_y'^2
\end{aligned} \tag{3.57}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $[J'_z, J_z] = -i \sin \beta J'_y$. Sostituendo le espressioni di Eq. (3.51) si arriva a

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right\} D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \\
& = D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \mathbf{J}^2
\end{aligned} \tag{3.58}$$

da cui, moltiplicando a sinistra per $\langle j, m |$, a destra per $|j, m' \rangle$ e sfruttando l'unitarietà della matrice di $D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right\} [D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)]^* = \\
& = j(j+1) [D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)]^*
\end{aligned} \tag{3.59}$$

e dal confronto con Eq. (3.42) si vede che $[D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)]^*$ è autostato di \mathbf{J}^2 con autovalore $j(j+1)$; inoltre dalla prima di Eq. (3.51) e Eq. (3.41) segue che $[D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma)]^*$ è autostato di J_z con autovalore m' .

Introduciamo ora l'elemento di volume

$$d\tilde{\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} \sin\beta d\alpha d\beta d\gamma, \quad (3.60)$$

dove la costante di normalizzazione è scelta per fare in modo che $\int d\tilde{\Omega} = 1$ quando l'integrale è esteso a

$$(0 \leq \alpha < 4\pi) \cup (0 \leq \beta < \pi) \cup (0 \leq \gamma < 4\pi). \quad (3.61)$$

La ragione di questo dominio è che $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)$ è periodica di periodo 4π in α e γ , cosa che si userà subito: se consideriamo l'integrale in $d\tilde{\Omega}$ dell'equazione Eq. (3.58), utilizzando le periodicità appena enunciate si vede subito che gli integrali di tutti i termini contenenti derivate rispetto a γ o rispetto ad α si annullano e l'integrale del primo membro risulta essere proporzionale a

$$\begin{aligned} & \int d\beta \left(\sin\beta \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \cos\beta \frac{\partial}{\partial\beta} \right) \int d\alpha \int d\gamma D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ & \int d\beta \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} \right) \int d\alpha \int d\gamma D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) = \\ & = \left[\left(\sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} \right) \int d\alpha \int d\gamma D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) \right]_{\beta=0}^{\beta=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

quindi

$$0 = \int D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} \mathbf{J}^2. \quad (3.63)$$

Da questa equazione segue che se $|j, m\rangle$ è uno stato con $j \neq 0$, allora $\int D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} |j, m\rangle = 0$, mentre sullo stato $|0, 0\rangle$ l'azione della matrice $D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)$ si riduce all'identità, quindi in particolare $\int D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} |0, 0\rangle = |0, 0\rangle$. Si ha quindi in generale

$$\int D^{-1}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = |0, 0\rangle \langle 0, 0| \quad (3.64)$$

e considerando l'aggiunto

$$\int D(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = |0, 0\rangle \langle 0, 0|. \quad (3.65)$$

Moltiplicando a sinistra per $\langle j, m'|$ ed a destra per $|j, m\rangle$ si ottiene infine

$$\int D_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = \delta_{j,0} \delta_{m',0} \delta_{m,0}. \quad (3.66)$$

L'elemento di volume $d\tilde{\Omega}$ è, a parte un fattore numerico irrilevante, la misura invariante (anche nota come misura di Haar) dei gruppi SU(2) e SO(3), vedi [7] §8.2 per un approccio elementare. Usando questo fatto il risultato precedente ha una semplice interpretazione. Indichiamo per semplicità di notazione con g l'elemento del gruppo identificato dagli angoli di Eulero α, β, γ e con g_0 un altro elemento del gruppo. L'invarianza della misura implica che

$$\int D(g) d\tilde{\Omega}_g = \int D(g_0 g) d\tilde{\Omega}_{g_0 g} = \int D(g_0 g) d\tilde{\Omega}_g \quad (3.67)$$

inoltre si ha $D(g_0 g) = D(g_0) D(g)$, quindi

$$\int D(g) d\tilde{\Omega}_g = D(g_0) \int D(g) d\tilde{\Omega}_g \quad (3.68)$$

per ogni rotazione R_{g_0} . Di conseguenza, dato un qualunque stato $|\psi\rangle$, lo stato $\int D(g) d\tilde{\Omega}_g |\psi\rangle$ è invariante per rotazioni. Da questo fatto si vede subito che $\int D(g) d\tilde{\Omega}_g$ deve essere proporzionale al proiettore sull'unico stato invariante per rotazioni $|0, 0\rangle$ (nel caso specifico le normalizzazioni sono state scelte per fare in modo che la costante di proporzionalità valga 1).

3.4 Il teorema di addizione delle armoniche sferiche

Vediamo ora come dalla relazione Eq. (3.43) si possa ottenere la formula di addizione per le armoniche sferiche: consideriamo due rotazioni successive

$$D(\alpha'', \beta'', \gamma'') = D(\alpha', \beta', \gamma')^{-1} D(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.69)$$

e moltiplichiamo a sinistra per $\langle j, m' |$ e a destra per $| j, m \rangle$. Usando la relazione di completezza e l'unitarietà di $D(\alpha', \beta', \gamma')$ si trova quindi

$$D_{m' m}^{(j)}(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \sum_{m''} D_{m'' m'}^{(j)}(\alpha', \beta', \gamma')^* D_{m'' m}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.70)$$

e consideriamo in particolare il caso $m = m' = 0$, quindi si può anche usare $\gamma' = \gamma = 0$ e $\alpha'' = \gamma'' = 0$:

$$D_{00}^{(j)}(0, \beta'', 0) = \sum_{m''} D_{m'' 0}^{(j)}(\alpha', \beta', 0)^* D_{m'' 0}^{(j)}(\alpha, \beta, 0) . \quad (3.71)$$

Per determinare il valore di β'' in funzione di $\alpha', \beta', \alpha, \beta$ da usare in questa espressione si può studiare

$$D_{m' m}^{(1/2)}(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \sum_{m''} D_{m'' m'}^{(1/2)}(\alpha', \beta', 0)^* D_{m'' m}^{(1/2)}(\alpha, \beta, 0) \quad (3.72)$$

usando la forma esplicita delle matrici di rotazione per spin 1/2 in Eq. (3.16). Considerando l'elemento $(1/2, 1/2)$ si ottiene l'equazione

$$e^{-i(\alpha'' + \gamma'')/2} \cos \frac{\beta''}{2} = e^{-i(\alpha - \alpha')/2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta'}{2} + e^{i(-\alpha' + \alpha)/2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta'}{2} \quad (3.73)$$

da cui si ricava

$$\cos \beta'' = \cos \beta \cos \beta' + \sin \beta \sin \beta' \cos(\alpha - \alpha') , \quad (3.74)$$

che non è altro che il prodotto scalare dei due vettori

$$(\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta) , \quad (\sin \beta' \cos \alpha', \sin \beta' \sin \alpha', \cos \beta') , \quad (3.75)$$

quindi β'' è l'angolo tra i due vettori caratterizzati dagli angoli polari (α, β) e (α', β') . Per $j = l$ intero si può ora usare Eq. (3.45) in Eq. (3.71) e si ottiene il teorema di addizione

$$Y_{l0}(\beta'', 0) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m''} Y_{lm''}(\beta', \alpha') Y_{lm''}(\beta, \alpha)^* , \quad (3.76)$$

che usando la relazione Eq. (2.55) si può anche riscrivere come

$$P_l(\cos \beta'') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m''} Y_{lm''}(\beta', \alpha') Y_{lm''}(\beta, \alpha)^* . \quad (3.77)$$

Da questa relazione e $P_l(1) = 1$ (vedi fine di Sez. (2.2)) si trova infine anche

$$\sum_m |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} . \quad (3.78)$$

Una applicazione notevole del teorema di addizione delle armoniche sferiche si ha nel calcolo dei momenti di multipolo elettrostatici. Consideriamo l'espressione

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} , \quad (3.79)$$

in cui supporremo $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$, e vediamo come riscriverla in modo da fattorizzare le dipendenze angolari di \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Se usiamo il vettore fisso \mathbf{r} come asse \hat{z} per la quantizzazione del momento

angolare, poichè $\psi(\mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ è invariante per rotazioni di \mathbf{r}' attorno a \mathbf{r} nella sua espansione in onde sferiche possono comparire solo termini con $m = 0$ (e usiamo Eq. (2.55)):

$$\psi(\mathbf{r}') = \sum_l \psi_l(r') P_l(\cos \beta'') , \quad (3.80)$$

dove β'' è l'angolo tra \mathbf{r} e \mathbf{r}' . Inoltre è facile vedere che $\psi(\mathbf{r}')$ è una funzione armonica di \mathbf{r}' regolare in $\mathbf{r}' = 0$ e quindi si deve avere $\psi_l(r') = a_l (r')^l$ (le armoniche solide $r^l Y_{lm}$ sono una base per funzioni armoniche regolari). Per fissare i coefficienti a_l si può a questo punto usare il caso specifico $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}$, ottenendo

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r - r'} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^l} (r')^l \quad (\text{per } \mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}) . \quad (3.81)$$

Quindi (poichè $P_l(1) = 1$) si ha in generale

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \beta'') \quad (3.82)$$

e usando il teorema di addizione delle armoniche sferiche si trova

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right)^* . \quad (3.83)$$

Nel caso del potenziale elettrostatico generato da una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r}')$ si ha quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Q_{lm} \\ Q_{lm} &= \frac{4\pi}{2l+1} \int (r')^l \rho(\mathbf{r}') Y_{lm} \left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right)^* d\mathbf{r}' . \end{aligned} \quad (3.84)$$

4 Somma di momenti angolari

4.1 Aspetti generali

Supponiamo di considerare una sistema fisico composto da due sottosistemi, aventi rispettivamente momenti angolari \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 , che trasformano nelle rappresentazioni $\mathfrak{D}^{(j_1)}$ e $\mathfrak{D}^{(j_2)}$ del gruppo delle rotazioni. Lo spazio delle configurazioni del sistema completo è dato dal prodotto tensore degli spazi delle configurazione dei due sottosistemi e su di esso agisce la rappresentazione del gruppo delle rotazioni data dal prodotto diretto delle due rappresentazioni precedenti, indicata con il simbolo $\mathfrak{D}^{(j_1)} \otimes \mathfrak{D}^{(j_2)}$. Usando il fatto che se A, B, C e D sono operatori si ha

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C, \quad (AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D) \quad (4.1)$$

si vede facilmente che

$$\exp(-i\phi \cdot \mathbf{J}_1) \otimes \exp(-i\phi \cdot \mathbf{J}_2) = \exp\left(-i\phi(\mathbf{J}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathbf{J}_2)\right), \quad (4.2)$$

dove con I_1 e I_2 si è indicato l'operatore identità sul sottospazio 1 e sul sottospazio 2 rispettivamente. Si introduce quindi l'operatore momento angolare totale

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathbf{J}_2, \quad (4.3)$$

che si vede subito soddisfare le relazioni di commutazione Eq. (1.52) e

$$[\mathbf{J}, I_1 \otimes \mathbf{J}_2] = [\mathbf{J}^2, I_1 \otimes \mathbf{J}_2] = [\mathbf{J}, \mathbf{J}_1 \otimes I_2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1 \otimes I_2] = 0. \quad (4.4)$$

A questo punto si hanno due modi per descrivere gli stati del sistema completo: si può usare una base degli operatori commutanti

$$\mathbf{J}_1^2 \otimes I_2, \quad J_{z1} \otimes I_2, \quad I_1 \otimes \mathbf{J}_2^2, \quad I_1 \otimes J_{z2}, \quad (4.5)$$

base che ha quindi la forma $|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$, oppure si può usare una base comune degli operatori commutanti

$$\mathbf{J}_1^2 \otimes I_2, \quad I_1 \otimes \mathbf{J}_2^2, \quad \mathbf{J}^2, \quad J_z, \quad (4.6)$$

ottenendo una base della forma $|j_1, j_2, j, m\rangle$, dove $j(j+1)$ e m sono gli autovalori associati rispettivamente a \mathbf{J}^2 e J_z . Dato che i valori di j_1 e j_2 saranno tipicamente fissati una volta per tutte, introduciamo per semplicità la notazione compatta

$$|M(m_1, m_2)\rangle \equiv |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle, \quad |J(j, m)\rangle \equiv |j_1, j_2, j, m\rangle, \quad (4.7)$$

mentre indicheremo gli stati con $|M(j_1, m_1, j_2, m_2)\rangle$ e $|J(j_1, j_2, j, m)\rangle$ nel caso sia necessario rendere esplicito anche j_1 e j_2 .

Poichè sia $|J(j, m)\rangle$ che $|M(m, m)\rangle$ formano una base ortogonale (che si può supporre ortonormale senza perdita di generalità) dello spazio delle configurazioni, si può scrivere

$$|J(j, m)\rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle M(m_1, m_2)|J(j, m)\rangle |M(m_1, m_2)\rangle. \quad (4.8)$$

I coefficienti $\langle M(m_1, m_2)|J(j, m)\rangle$ sono detti coefficienti di Clebsch-Gordan (o di riaccoppiamento, di accoppiamento vettoriale, di Wigner, ...) e costituiscono gli elementi di matrice di una trasformazione unitaria, in quanto entrambe le basi $|M(m_1, m_2)\rangle$ e $|J(j, m)\rangle$ sono ortonormali.

In generale, fissati j_1 e j_2 , non tutti i valori di j sono ammissibili (ciò sarà visto meglio tra poco) e porremo per definizione i coefficienti di Clebsch-Gordan di uno stato non permesso eguali a 0, quindi

$$\langle M(m_1, m_2)|J(j, m)\rangle \propto \delta(j_1, j_2, j), \quad (4.9)$$

m						
$j_1 + j_2$	$M(j_1, j_2)$					
$j_1 + j_2 - 1$	$M(j_1 - 1, j_2)$	$M(j_1, j_2 - 1)$				
$j_1 + j_2 - 2$	$M(j_1 - 2, j_2)$	$M(j_1 - 1, j_2 - 1)$	$M(j_1, j_2 - 2)$			
\vdots						
$j_2 - j_1$	$M(-j_1, j_2)$	$M(-j_1 + 1, j_2 - 1)$	$M(-j_1 + 2, j_2 - 2)$	\cdots	$M(j_1, j_2 - 2j_1)$	
$j_2 - j_1 - 1$		$M(-j_1, j_2 - 1)$	$M(-j_1 + 1, j_2 - 2)$	\cdots	$M(j_1 - 1, j_2 - 2j_1)$	$M(j_1, j_2 - 2j_1 - 1)$
\vdots						
\vdots						

Tabella 1: Lista degli stati $|M(m_1, m_2)\rangle$ a fissato valore di $m = m_1 + m_2$, supponendo $j_1 \leq j_2$.

dove $\delta(j_1, j_2, j)$ è uguale a 0 per gli stati non permessi ed uguale a 1 altrimenti. La proprietà di unitarietà si esprime allora tramite le equazioni

$$\begin{aligned} \delta_{m,m'} \delta_{j,j'} \delta(j_1, j_2, j) &= \sum_{m_1, m_2} \langle J(j', m') | M(m_1, m_2) \rangle \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \\ \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} &= \sum_{j, m} \langle M(m'_1, m'_2) | J(j, m) \rangle \langle J(j, m) | M(m_1, m_2) \rangle, \end{aligned} \quad (4.10)$$

che si ottengono inserendo una rappresentazione dell'identità nelle equazioni

$$\delta_{m,m'} \delta_{j,j'} \delta(j_1, j_2, j) = \langle J(j', m') | J(j, m) \rangle, \quad \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} = \langle M(m'_1, m'_2) | M(m_1, m_2) \rangle. \quad (4.11)$$

Dato che $J_z = I_1 \otimes J_{z2} + J_{z1} \otimes I_2$ si ha inoltre

$$m \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle = \langle M(m_1, m_2) | J_z | J(j, m) \rangle = (m_1 + m_2) \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \quad (4.12)$$

quindi

$$\langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \propto \delta_{m, m_1 + m_2} \quad (4.13)$$

e le relazioni di unitarietà Eq. (4.10) possono essere ristrette al sottospazio con $m = m_1 + m_2$ fissato, ottenendo nella forma

$$\begin{aligned} \delta_{j,j'} \delta(j_1, j_2, j) &= \sum_{m_1} \langle J(j', m) | M(m_1, m - m_1) \rangle \langle M(m_1, m - m_1) | J(j, m) \rangle \\ \delta_{m_1, m'_1} &= \sum_j \langle M(m'_1, m - m'_1) | J(j, m) \rangle \langle J(j, m) | M(m_1, m - m_1) \rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vediamo ora, fissati j_1 e j_2 , che limitazioni si hanno sui valori possibili di j : poichè m assume tutti i valori tra $-j$ e j ed inoltre si è appena visto che $m = m_1 + m_2$ per ogni elemento della base $|M(m_1, m_2)\rangle$, si deve avere $j \leq \max(m_1 + m_2) = j_1 + j_2$. È inoltre semplice verificare la seguente identità:

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathbf{J}_2^2 + J_{+1} \otimes J_{-2} + J_{-1} \otimes J_{+2} + 2J_{z1} \otimes J_{z2} \quad (4.15)$$

da cui segue in particolare

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |M(j_1, j_2)\rangle &= \left(j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2j_1 j_2 \right) |M(j_1, j_2)\rangle = \\ &= (j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1) |M(j_1, j_2)\rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

quindi lo stato $|M(j_1, j_2)\rangle$ è autostato di \mathbf{J}^2 con $j = j_1 + j_2$, inoltre è l'unico stato con il valore massimo di m , quindi si deve avere

$$|M(j_1, j_2)\rangle = e^{i\phi} |J(j_1 + j_1, j_1 + j_2)\rangle. \quad (4.17)$$

Uno stato con $m < j_1 + j_2$ può essere composto in diversi modi nella base $|M(m_1, m_2)\rangle$, come mostrato in Tab. (1) in cui si suppone per semplicità $j_1 \leq j_2$; la tabella proseguirebbe come schematicamente mostrato in Fig. (2). Tramite Tab. (1) si ottiene una classificazione degli stati

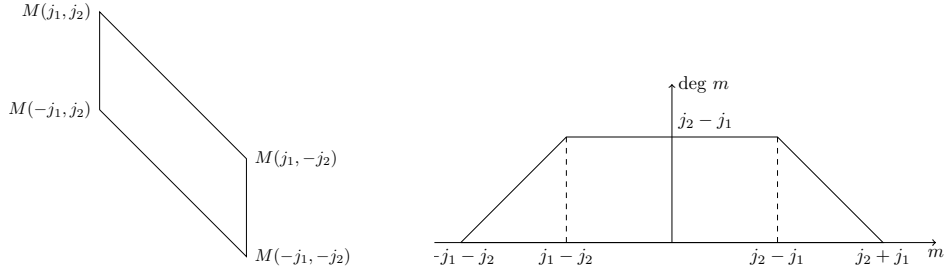


Figura 2: Rappresentazione schematica di Tab. (1) (sinistra) e del numero di stati a m fissato (destra), supponendo $j_1 \leq j_2$.

possibili in funzione di m e per stabilire una corrispondenza tra le rappresentazioni $|M(m_1, m_2)\rangle$ e $|J(j, m)\rangle$ resta solo da determinare j in funzione delle altre variabili. Un primo passo in questa direzione è dato da Eq. (4.17) e per andare oltre si può applicare ripetutamente l'operatore

$$J_- = J_{-1} \otimes I_2 + I_1 \otimes J_{-2} \quad (4.18)$$

allo stato $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle$ ottenendo stati proporzionali (a meno di una fase) a $|J(j_1 + j_2, m)\rangle$. In particolare dopo la prima applicazione di J_- si ottiene uno stato proporzionale a $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1)\rangle$, tuttavia da Tab. (1) si vede che devono esistere due stati con $m = j_1 + j_2 - 1$. Indichiamo con $|J(j', j_1 + j_2 - 1)\rangle$ lo stato con $m = j_1 + j_2 - 1$ ortogonale a $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1)\rangle$ (definito a meno di una fase). Poichè $j \geq |m|$ si deve avere $j' \geq j_1 + j_2 - 1$, d'altra parte si è visto che può esistere solo uno stato con $j = j_1 + j_2$ e che questo è il massimo valore possibile di j , quindi si deve avere $j' = j_1 + j_2 - 1$. Si è così trovato lo stato $|J(j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1)\rangle$ e applicando J_- ad esso si ottengono tutti gli stati $|J(j_1 + j_2 - 1, m)\rangle$.

Dal Tab. (1) segue che si può in modo analogo continuare a costruire stati con valori di j via via più piccoli fino a che non si giunge allo stato con $j = j_2 - j_1$ (si ricordi che si era supposto $j_2 \geq j_1$), infatti per $m \leq j_2 - j_1$ il numero dei valori permessi di m (e quindi il numero degli stati) non aumenta più (vedi anche Fig. (2)), quindi con questa costruzione si riescono a determinare tutti gli stati possibili, che risultano essere quelli con i seguenti valori del numero quantico j (in cui lasciamo ora cadere l'ipotesi semplificativa $j_2 \geq j_1$):

$$|j_2 - j_1|, |j_2 - j_1| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 \quad (4.19)$$

Da questo risultato segue in particolare che la rappresentazione $\mathfrak{D}^{(j_1)} \otimes \mathfrak{D}^{(j_2)}$ del gruppo delle rotazioni è (come tutte le rappresentazioni unitarie) completamente riducibile e si ha

$$\mathfrak{D}^{(j_1)} \otimes \mathfrak{D}^{(j_2)} = \mathfrak{D}^{(|j_2 - j_1|)} \oplus \mathfrak{D}^{(|j_2 - j_1| + 1)} \oplus \dots \oplus \mathfrak{D}^{(j_1 + j_2 - 1)} \oplus \mathfrak{D}^{(j_1 + j_2)} \quad (4.20)$$

risultato talvolta noto come serie di Clebsch-Gordan. Si può verificare facilmente che le dimensioni complessive delle rappresentazioni sono le stesse nel lato sinistro e destro dell'equazione, infatti la somma delle dimensioni delle rappresentazioni a secondo membro è (considerando per semplicità $j_2 \geq j_1$, in modo che siano presenti $2j_1 + 1$ termini)

$$\begin{aligned} & [2(j_2 - j_1) + 1] + [2(j_2 - j_1) + 3] + \dots + [2(j_2 - j_1) + 2(2j_1) + 1] = \\ & = 2(j_2 - j_1)(2j_1 + 1) + \sum_{n=0}^{2j_1} (2n + 1) = \\ & = 2(j_2 - j_1)(2j_1 + 1) + (2j_1 + 1)^2 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \end{aligned} \quad (4.21)$$

che coincide con la dimensione della rappresentazione a primo membro.

4.2 Convenzioni di Condon-Shortley

Come in parte già visto, nel porre in relazione le due basi $|M(m_1, m_2)\rangle$ e $|J(j, m)\rangle$ è necessario specificare alcune fasi e la convenzione universalmente usata è quella di Condon e Shortley, che sarà esposta nella presente sezione.

La prima scelta è quella che consiste nel porre $\phi = 0$ in Eq. (4.17), cioè

$$|M(j_1, j_2)\rangle = |J(j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle . \quad (4.22)$$

Partendo da uno stato $|J(j, j)\rangle$ ed applicando J_- si ottengono gli stati $|J(j, m)\rangle$ e le fasi tra gli stati a j fissato sono scelte consistentemente con le convenzioni precedentemente stabilite per gli elementi di matrice di J_\pm tra stati di fissato momento angolare (elementi di matrice di J_- e J_+ non negativi). Per fissare le fasi relative delle espressioni di $|J(j, m)\rangle$ e $|J(j', m')\rangle$ fissiamo le fasi degli elementi di matrice di³ J_{+1} , che non commuta con \mathbf{J}^2 e pertanto può avere elementi di matrice non nulli tra stati di diverso momento angolare.

Da $[J_z, J_{+1}] = J_{+1}$ è semplice vedere che l'elemento di matrice $\langle J(j, m)|J_{+1}|J(j', m')\rangle$ può essere non nullo solo se $m = m' + 1$. Vediamo ora che tutti gli elementi di matrice di J_{+1} tra due stati di momento angolare totale j e j' hanno la stessa fase: innanzitutto è semplice vedere che si ha $[J_+, J_{+1}] = 0$, quindi si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle J(j, m+1)|[J_+, J_{+1}]|J(j', m-1)\rangle = \\ &= \langle J(j, m+1)|J_+J_{+1}|J(j', m-1)\rangle - \langle J(j, m+1)|J_{+1}J_+|J(j', m-1)\rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

e utilizzando la relazione di completezza $1 = \sum_{j,m} |J(j, m)\rangle\langle J(j, m)|$ e le regole di selezione degli elementi di matrice di J_+ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle J(j, m+1)|J_+|J(j, m)\rangle\langle J(j, m)|J_{+1}|J(j', m-1)\rangle \\ &\quad - \langle J(j, m+1)|J_{+1}|J(j', m)\rangle\langle J(j', m)|J_+|J(j', m-1)\rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

Si era già usato in precedenza (vedi Eq. (2.25)) il fatto che si può assumere che tutti gli elementi di matrice di J_+ tra gli stati a j fissato siano reali e non negativi. Dall'equazione precedente segue allora che tutti gli elementi di matrice di J_{+1} tra stati della forma $|J(j, m)\rangle$ e $|J(j', m')\rangle$ hanno la stessa fase per tutti i valori di m e m' . Usando questo fatto si può imporre il vincolo che tutti gli elementi di matrice della forma $\langle J(j, m+1)|J_{+1}|J(j+1, m)\rangle$ siano numeri reali non negativi, fissando in questo modo le fasi relative tra gli stati di momento angolare j, j' . Un ragionamento analogo può essere effettuato per gli elementi di matrice di J_{+2} , ottenendo che gli elementi di matrice di J_{+2} tra gli stati $|J(j, m)\rangle$ e $|J(j', m')\rangle$ hanno la stessa fase per tutti i valori di m e m' . Tuttavia da $J_+ = J_{+1} + J_{+2}$ e dal fatto che $[\mathbf{J}^2, J_+] = 0$ segue che se $j \neq j'$ l'elemento di matrice di J_+ tra $|J(j, m)\rangle$ e $|J(j', m')\rangle$ è nullo e di conseguenza i segni degli elementi di matrice di J_{+1} e J_{+2} sono opposti.

Consideriamo ora la relazione di commutazione $[J_{z1}, J_+] = J_{+1}$; procedendo come nel caso precedente si arriva a

$$\begin{aligned} \langle J(j, m+1)|J_{+1}|J(j+1, m)\rangle &= \\ &= \langle J(j, m+1)|J_{z1}|J(j+1, m+1)\rangle\langle J(j+1, m+1)|J_+|J(j+1, m)\rangle - \\ &\quad - \langle J(j, m+1)|J_+|J(j, m)\rangle\langle J(j, m)|J_{z1}|J(j+1, m)\rangle . \end{aligned} \quad (4.25)$$

A questo punto poniamo $m = -(j+1)$ nell'equazione precedente: in questo modo la terza riga si annulla poichè vi compare $|J(j, -(j+1))\rangle$, quindi dalla scelta di fase per J_+ precedentemente effettuata (reale e non negativa) segue che $\langle J(j, -j)|J_{z1}|J(j+1, -j)\rangle$ ha la stessa fase degli elementi di matrice di J_{+1} tra stati di momento angolare j e $j+1$. Usando l'equazione precedente per scrivere l'elemento di matrice $\langle J(j, m+1)|J_{z1}|J(j+1, m+1)\rangle$ in funzione di $\langle J(j, m)|J_{z1}|J(j+1, m)\rangle$ si trova infine che tutti questi elementi di matrice sono reali e non negativi.

³Per evitare di appesantire troppo la notazione è uso comune sopprimere i prodotti diretti con le matrici identiche, quindi ad esempio si scrive J_{+1} invece di $J_{+1} \otimes I_2$ oppure $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ invece di $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes \mathbf{J}_2$.

Da quanto appena visto si ha che le seguenti convenzioni (convenzioni di Condon-Shortley) sono compatibili tra loro e determinano univocamente tutte le fasi degli elementi di matrice di \mathbf{J} , \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 :

1. gli elementi di matrice degli operatori di salita e di discesa all'interno delle rappresentazioni $\mathfrak{D}^{(j)}$ sono reali e non negativi
2. $|M(j_1, j_2)\rangle = |J(j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle$
3. gli elementi di matrice $\langle J(j, m + 1)|J_{+1}|J(j + 1, m)\rangle$ sono reali e non negativi

La prima convenzione è indipendente dal fatto che si stia considerando la somma di momenti angolari e serve anche nel caso di un singolo momento angolare. Si è inoltre visto che come conseguenza di queste convenzioni gli elementi di matrice $\langle J(j, m)|J_{z1}|J(j + 1, m)\rangle$ sono reali e non negativi, convenzione che viene talvolta imposta in alternativa alla 3). Che le due convenzioni siano equivalenti si vede ripercorrendo a ritroso il ragionamento usato in precedenza.

Mostriamo ora che usando queste convenzioni tutti i coefficienti di Clebsch-Gordan risultano essere reali. Per fare ciò è sufficiente mostrare che ogni stato della rappresentazione $|J(j, m)\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di stati $|M(m_1, m_2)\rangle$ a coefficienti reali. Prendiamo nuovamente in considerazione la costruzione degli stati $|J(j, m)\rangle$ che si è effettuata in Sez. (4.1): se si usa la convenzione di Condon-Shortley si ha $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle = |M(j_1, j_1)\rangle$ e gli altri stati con $j = j_1 + j_2$ si ottengono a partire da $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle$ utilizzando l'operatore di discesa J_- , che secondo la convenzione di Condon-Shortley ha elementi di matrice reali, quindi tutti gli stati che si ottengono in questo modo sono combinazioni lineari a coefficienti reali di stati della rappresentazione $|M(m_1, m_2)\rangle$. Consideriamo ora gli stati con $j = j_1 + j_2 - 1$: come si è visto in precedenza lo stato $|J(j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1)\rangle$ è fissato a meno di una fase $e^{i\psi}$ dalle proprietà di essere ortogonale a $|J(j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1)\rangle$ e di avere $m = j_1 + j_2 - 1$. Applicando nuovamente l'operatore di discesa si ottengono tutti gli stati con $j = j_1 + j_2 - 1$ e, poichè gli elementi di matrice degli operatori di discesa sono tutti reali, la fase $e^{i\psi}$ rimarrà invariata in tutta la torre di stati così formata. In particolare si ottiene

$$\begin{aligned}
& \langle J(j_1 + j_2 - 1, -j_1 - j_2 + 1)|J_{z1}|J(j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1)\rangle = \\
& = \sum_{m_1, m_2} \sum_{m'_1, m'_2} \langle J(j_1 + j_2 - 1, -j_1 - j_2 + 1)|M(m_1, m_1)\rangle \langle M(m_1, m_2)|J_{z1}|M(m'_1, m'_1)\rangle \times \\
& \quad \times \langle M(m'_1, m'_2)|J(j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1)\rangle = \\
& = \sum_{m_1, m_2} m_1 \langle J(j_1 + j_2 - 1, -j_1 - j_2 + 1)|M(m_1, m_1)\rangle \langle M(m_1, m_2)|J(j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1)\rangle
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Nell'ultima somma, i termini $\langle M(m_1, m_2)|J(j_1 + j_2, -j_1 - j_2 + 1)\rangle$ sono i coefficienti di Clebsch-Gordan degli stati con $j = j_1 + j_2$ che si sono appena visti essere reali; i termini $\langle J(j_1 + j_2 - 1, -j_1 - j_2 + 1)|M(m_1, m_2)\rangle$ sono i complessi coniugati dei coefficienti di Clebsch-Gordan associati agli stati $j = j_1 + j_2 - 1$, che per quanto visto hanno tutti la fase stessa $e^{i\psi}$. Per la convenzione di Condon-Shortley la prima espressione della catena di uguaglianze deve però essere reale, quindi anche i coefficienti di Clebsch-Gordan con $j = j_1 + j_2 - 1$ devono essere reali. Il ragionamento può ovviamente essere iterato, ottenendo la realtà di tutti i coefficienti di Clebsch-Gordan. Si ha quindi

$$\langle M(m_1, m_2)|J(j, m)\rangle = \langle J(j, m)|M(m_1, m_2)\rangle . \tag{4.27}$$

Mostriamo ora le relazioni di ricorrenza per i coefficienti di Clebsch-Gordan: introduciamo per semplicità di notazione la funzione

$$A(j, m) = \sqrt{(j + m)(j - m + 1)} , \tag{4.28}$$

tramite la quale si possono scrivere gli elementi di matrice di J_{\pm} (vedi Eq. (2.25)) e che evidentemente soddisfa le relazioni

$$A(j, m + 1) = A(j, -m) = \sqrt{(j + m + 1)(j - m)} , \quad A(j, -m + 1) = A(j, m) . \tag{4.29}$$

Usando la proprietà di completezza e le regole di selezione di J_- si vede che

$$J_-|J(j, m)\rangle = \langle J(j, m-1)|J_-|J(j, m)\rangle |J(j, m-1)\rangle \quad (4.30)$$

ed espandendo $|J(j, m-1)\rangle$ sulla base $|M(m_1, m_2)\rangle$ usando i coefficienti di Clebsch-Gordan si ottiene quindi

$$J_-|J(j, m)\rangle = \langle J(j, m-1)|J_-|J(j, m)\rangle \sum_{m_1, m_2} \langle M(m_1, m_2)|J(j, m-1)\rangle |M(m_1, m_2)\rangle . \quad (4.31)$$

D'altra parte si può anche usare la completezza sugli stati $|M(m_1, m_2)\rangle$ quindi

$$\begin{aligned} J_-|J(j, m)\rangle &= \sum_{m_1, m_2} \langle M(m_1, m_2)|J_-|J(j, m)\rangle |M(m_1, m_2)\rangle = \\ &= \sum_{m_1, m_2} \sum_{m'_1, m'_2} \langle M(m_1, m_2)|J_-|M(m'_1, m'_2)\rangle \langle M(m'_1, m'_2)|J(j, m)\rangle |M(m_1, m_2)\rangle . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Uguagliando i coefficienti dei termini $|M(m_1, m_2)\rangle$, usando nella seconda forma $J_- = J_{-1} + J_{-2}$ ed esplicitando gli elementi di matrice con Eq. (2.25) si ottiene

$$\begin{aligned} A(j, m)\langle M(m_1, m_2)|J(j, m-1)\rangle &= A(j_1, m_1+1)\langle M(m_1+1, m_2)|J(j, m)\rangle + \\ &+ A(j_2, m_2+1)\langle M(m_1, m_2+1)|J(j, m)\rangle . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando J_+ al posto di J_- si ottiene la relazione analoga

$$\begin{aligned} A(j, m+1)\langle M(m_1, m_2)|J(j, m+1)\rangle &= A(j_1, m_1)\langle M(m_1-1, m_2)|J(j, m)\rangle + \\ &+ A(j_2, m_2)\langle M(m_1, m_2-1)|J(j, m)\rangle . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Queste relazioni potrebbero essere utilizzate per il calcolo ricorsivo dei coefficienti di Clebsch-Gordan, vedi ad es. [1] §3.6.

Terminiamo questa sezione calcolando il segno di una specifica classe di coefficienti di Clebsch-Gordan, che segue direttamente dalle convenzioni di Condon-Shortley e sarà usato in seguito per verificare che la corretta scelta delle fasi sia stata implementata nel calcolo esplicito dei coefficienti di Clebsch-Gordan. Procedendo analogamente a quanto fatto altre volte partiamo dalla relazione di commutazione $[J_{z1}, J_+] = J_{+1}$ e prendiamo l'elemento di matrice di questa relazione tra gli stati $\langle J(j+1, j+1)|$ e $|J(j, j)\rangle$. Poichè $J_+|J(j, j)\rangle = 0$ si trova

$$\begin{aligned} \langle J(j+1, j+1)|J_+J_{z1}|J(j, j)\rangle &= \langle J(j+1, j+1)|J_+|J(j+1, j)\rangle \langle J(j+1, j)|J_{z1}|J(j, j)\rangle = \\ &= -\langle J(j+1, j+1)|J_{+1}|J(j, j)\rangle \end{aligned} \quad (4.35)$$

dove nella seconda uguaglianza si è inserita una risoluzioni dell'identità e si sono usate le regole di selezione di J_+ . Poichè gli elementi di matrice di J_+ tra stati a j costante sono non negativi e si è mostrato che la stessa cosa è vera per $\langle J(j, m)|J_{z1}|J(j+1, m)\rangle = \langle J(j+1, m)|J_{z1}|J(j, m)\rangle$ (J_z è hermitiano), si deduce che l'ultima riga della precedente equazione deve essere non negativa. Usando nuovamente delle risoluzioni dell'identità troviamo quindi

$$-\sum_{m_1} \langle J(j+1, j+1)|M(m_1, m_2)\rangle \langle j_1, m_1|J_{+1}|j_1, m'_1\rangle \langle M(m'_1, m_2)|J(j, j)\rangle > 0 \quad (4.36)$$

dove si è usato $\langle M(m_1, m_2)| = \langle j_1, m_1|\langle j_1, m_2|$ e $|M(m'_1, m'_2)\rangle = |j_1, m'_1\rangle|j_2, m'_2\rangle$ per semplificare l'elemento di matrice e imporre $m_2 = m'_2$; il valore di m_2 è inoltre fissato da $m_1 + m_2 = j + 1$ e analogamente $m'_1 + 1 = m_1$. Se ora usiamo Eq. (4.34) con $m = j$ il primo membro si annulla, quindi si vede che il segno dei coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle M(m_1, m_2)|J(j, j)\rangle$ si alterna se m_1 cambia di una unità, quindi

$$\text{sgn}[\langle M(m_1, m_2)|J(j, j)\rangle] = (-1)^{j_1 - m_1} \text{sgn}[\langle M(j_1, m_2)|J(j, j)\rangle] , \quad (4.37)$$

dove m_2 è di volta in volta fissato dal vincolo che il coefficiente di Clebsch-Gordan non si annulli: $m_1 + m_2 = m$. Poichè $(-1)^{j_1 - m_1} (-1)^{j_1 - m'_1} = -(-1)^{2(j_1 - m_1)} = -1$ ($j_1 - m_1$ è un intero), usando questa identità nella disuguaglianza precedente otteniamo

$$\begin{aligned} & \text{sgn}[\langle M(j_1, m_2) | J(j+1, j+1) \rangle] \text{sgn}[\langle M(j_1, m_2) | J(j, j) \rangle] \times \\ & \times \sum_{m_1} |\langle J(j+1, j+1) | M(m_1, m_2) \rangle| |\langle j_1, m_1 | J_{+1} | j_1, m'_1 \rangle| |\langle M(m'_1, m_2) | J(j, j) \rangle| > 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

e dal fatto che l'elemento di matrice è non negativo si trova (sostituendo i valori appropriati di m_2)

$$\text{sgn}[\langle M(j_1, j+1-j_1) | J(j+1, j+1) \rangle] \text{sgn}[\langle M(j_1, j-j_1) | J(j, j) \rangle] = 1, \quad (4.39)$$

quindi tutti i coefficienti di Clebsch-Gordan non nulli del tipo $\langle M(j_1, j-j_2) | J(j, j) \rangle$ hanno lo stesso segno indipendentemente dal valore di j . Poichè dalle convenzioni di Condon-Shortley sappiamo che $\langle M(j_1, j_2) | J(j_1+j_2, j_1+j_2) \rangle = 1$ si ha quindi

$$\text{sgn}[\langle M(j_1, j-j_1) | J(j, j) \rangle] = 1 \quad (4.40)$$

per tutti i valori ammissibili di j , ovvero usando la notazione completa

$$\langle M(j_1, j_1, j_2, j-j_1) | J(j_1, j_2, j, j) \rangle > 0 \quad (4.41)$$

per $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$.

4.3 Calcolo dei coefficienti di Clebsch-Gordan

Si procederà ora alla deduzione di una formula esplicita per i coefficienti di Clebsch-Gordan⁴. In questa sezione si utilizzerà nuovamente la rappresentazione introdotta per il calcolo delle matrici di rotazione in Sez. (3.2): in questa base si ha (vedi Eq. (3.21))

$$\langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) \rangle = \frac{\chi_{+1}^{j_1+m_1} \chi_{-1}^{j_1-m_1}}{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}} \frac{\chi_{+2}^{j_2+m_2} \chi_{-2}^{j_2-m_2}}{\sqrt{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}} \quad (4.42)$$

dove come al solito si variabili relative alla i -esima particella sono indicate con il suffisso i . Nel seguito avrà fondamentale importanza l'operatore

$$T = \chi_{+1} \chi_{-2} - \chi_{-1} \chi_{+2} \quad (4.43)$$

che si vede facilmente soddisfare le relazioni di commutazione (vedi and Eq. (3.18) e Eq. (3.19) per la definizione dell'operatore K)

$$[K_i, T] = \frac{1}{2} T, \quad [\mathbf{J}_i^2, T] = T K_i + \frac{3}{4} T, \quad [J_3, T] = 0, \quad [J_{\pm}, T] = 0. \quad (4.44)$$

Utilizzando la relazione $\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2$ e le relazioni precedenti si vede subito che

$$[\mathbf{J}^2, T] = 0. \quad (4.45)$$

Consideriamo ora l'effetto dell'operatore T sullo stato $|J(j_1, j_2, j, m)\rangle$: usando le relazioni di commutazione precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i^2 T |J(j_1, j_2, j, m)\rangle &= \left(T K_i + \frac{3}{4} T + T \mathbf{J}_i^2 \right) |J(j_1, j_2, j, m)\rangle = \\ &= T \left(j_i + \frac{3}{4} + j_i(j_i + 1) \right) |J(j_1, j_2, j, m)\rangle = \left(j_i + \frac{1}{2} \right) \left(j_i + \frac{1}{2} + 1 \right) T |J(j_1, j_2, j, m)\rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

⁴La strategia di dimostrazione utilizzata segue, pur con alcune piccole varianti, la strada tracciata nelle note "Notes on Quantum Mechanics" di K. Schulten (2000), che molto probabilmente si basa a sua volta su J. Bellissard, R. Holtz "Composition of coherent spin states" J. Math. Phys. **15**, 1275 (1974).

quindi $T|J(j_1, j_2, j, m)\rangle$ è autostato di \mathbf{J}_i^2 con autovalore $j_i + 1/2$. Se si considerano anche le relazioni $[\mathbf{J}^2, T] = 0$ e $[J_z, T] = 0$ si ottiene

$$T|J(j_1, j_2, j, m)\rangle \propto |J(j_1 + 1/2, j_2 + 1/2, j, m)\rangle \quad (4.47)$$

Applicando questa formula n volte si trova quindi

$$T^n|J(j_1, j_2, j, m)\rangle \propto |J(j_1 + n/2, j_2 + n/2, j, m)\rangle \quad (4.48)$$

e nel caso $j = j_1 + j_2$ e $m = j_1 + j_2$ utilizzando la convenzione di Condon Shortley $|J(j_1, j_2, j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle = |M(j_1, j_1, j_2, j_2)\rangle$ si ottiene

$$|J(j_1 + n/2, j_2 + n/2, j_1 + j_2, j_1 + j_2)\rangle = N(n, j_1 + n/2, j_2 + n/2)T^n|M(j_1, j_1, j_2, j_2)\rangle \quad (4.49)$$

dove $N(n, j_1 + n/2, j_2 + n/2)$ è una costante di normalizzazione che vale

$$N\left(n, j_1 + \frac{n}{2}, j_2 + \frac{n}{2}\right) = \sqrt{\frac{(2j_1 + 2j_2 + 1)!}{(2j_1 + 2j_2 + n + 1)!n!}}. \quad (4.50)$$

Verifichiamo che questa sia la corretta normalizzazione: usando l'espressione esplicita di T abbiamo

$$\begin{aligned} |J\rangle &= N \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} (\chi_{+1}\chi_{-2})^{n-s} (-\chi_{-1}\chi_{+2})^s \frac{\chi_{+1}^{2j_1}}{\sqrt{(2j_1)!}} \frac{\chi_{+2}^{2j_2}}{\sqrt{(2j_2)!}} = \\ &= \frac{n!N}{\sqrt{(2j_1)!(2j_2)!}} \sum_{s=0}^n (-1)^s \sqrt{\frac{(2j_1 + n - s)!(2j_2 + s)!}{s!(n-s)!}} \frac{\chi_{+1}^{2j_1 - n - s} \chi_{-1}^s}{\sqrt{(2j_1 + n - s)!s!}} \frac{\chi_{+2}^{2j_2 + s} \chi_{-2}^{n-s}}{\sqrt{(2j_2 + s)!(n-s)!}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

quindi usando l'ortonormalità delle funzioni Eq. (4.42) si deve avere

$$1 = |N|^2 \frac{(n!)^2}{(2j_1)!(2j_2)!} \sum_{s=0}^n \frac{(2j_1 + n - s)!(2j_2 + s)!}{s!(n-s)!} = |N|^2 (n!)^2 \sum_{s=0}^n \binom{2j_1 + n - s}{2j_1} \binom{2j_2 + s}{2j_2} \quad (4.52)$$

Per calcolare questa espressione notiamo innanzitutto che si ha

$$\frac{d^\nu}{d\lambda^\nu} \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}^{n_1+1} = (n_1 + 1) \cdots (n_1 + \nu) = \frac{(n_1 + \nu)!}{n_1!} \quad (4.53)$$

quindi, sviuppando la prima espressione in serie di Taylor, si ottiene

$$\left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^{n_1+1} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} \frac{(n_1 + m_1)!}{n_1!} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \binom{n_1 + m_1}{n_1} \lambda^{m_1}. \quad (4.54)$$

Applicando due volte questa espressione si trova

$$\left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^{n_1+1} \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^{n_2+1} = \sum_{m_1, m_2=0}^{\infty} \binom{n_1 + m_1}{n_1} \binom{n_2 + m_2}{n_2} \lambda^{m_1+m_2} \quad (4.55)$$

e ponendo $m_1 + m_2 = r$ e $m_2 = s$ si ottiene

$$\left(\frac{1}{1-\lambda} \right)^{n_1+n_2+2} = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^r \binom{n_1 + r - s}{n_1} \binom{n_2 + s}{n_2} \right] \lambda^r \quad (4.56)$$

e confrontando questa espressione con l'equazione ottenuta da Eq. (4.54) con la sostituzione $n_1 \rightarrow n_1 + n_2 + 1$ si ottiene

$$\sum_{s=0}^r \binom{n_1 + r - s}{n_1} \binom{n_2 + s}{n_2} = \binom{n_1 + n_2 + r + 1}{n_1 + n_2 + 1}. \quad (4.57)$$

Usando questa espressione l'equazione per la normalizzazione diventa

$$1 = |N|^2 \frac{n!(2j_1 + 2j_2 + n + 1)!}{(2j_1 + 2j_2 + 1)!} \quad (4.58)$$

da cui Eq. (4.50) (si verificherà alla fine del calcolo che con questa scelta di segno di N si riproduce Eq. (4.41)).

Torniamo ora all'equazione Eq. (4.49): con il cambio di variabili

$$\begin{cases} j = j_1 + j_2 \\ \ell_1 = j_1 + n/2 \\ \ell_2 = j_2 + n/2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} n = \ell_1 + \ell_2 - j \\ j_1 = \frac{1}{2}(j + \ell_1 - \ell_2) \\ j_2 = \frac{1}{2}(j + \ell_2 - \ell_1) \end{cases} \quad (4.59)$$

si ha allora (usando l'espressione esplicita per $|M(j_1, j_1, j_2, j_2)\rangle$ ottenuta da Eq. (4.42))

$$|J(\ell_1, \ell_2, j, j)\rangle = N(\ell_1 + \ell_2 - j, \ell_1, \ell_2) T^{\ell_1 + \ell_2 - j} \frac{\chi_{+1}^{j + \ell_1 - \ell_2}}{\sqrt{(j + \ell_1 - \ell_2)!}} \frac{\chi_{+2}^{j + \ell_2 - \ell_1}}{\sqrt{(j + \ell_2 - \ell_1)!}} . \quad (4.60)$$

e la costante di normalizzazione si riscrive come

$$N(\ell_1 + \ell_2 - j, \ell_1, \ell_2) = \sqrt{\frac{(2j + 1)!}{(\ell_1 + \ell_2 - j)!(\ell_1 + \ell_2 + j + 1)!}} . \quad (4.61)$$

Se si considerano le espressioni esplicite degli elementi di matrice degli operatori di discesa Eq. (2.25) è semplice vedere che si ha

$$|J(\ell_1, \ell_2, j, m)\rangle = \Delta(j, m) J_-^{j-m} |J(\ell_1, \ell_2, j, j)\rangle , \quad \Delta(j, m) = \sqrt{\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!}} \quad (4.62)$$

quindi

$$\begin{aligned} |J(\ell_1, \ell_2, j, m)\rangle &= \\ &= N(\ell_1, \ell_2 - j, \ell_1, \ell_2) \Delta(j, m) T^{\ell_1 + \ell_2 - j} J_-^{j-m} \frac{\chi_{+1}^{j + \ell_1 - \ell_2}}{\sqrt{(j + \ell_1 - \ell_2)!}} \frac{\chi_{+2}^{j + \ell_2 - \ell_1}}{\sqrt{(j + \ell_2 - \ell_1)!}} \end{aligned} \quad (4.63)$$

e il resto del calcolo consisterà nell'esplicitare questa formula.

Definiamo innanzitutto

$$G^{r,s,t} = J_-^r \chi_{+1}^s \chi_{+2}^t , \quad (4.64)$$

per il cui calcolo è comodo introdurre la funzione generatrice

$$I(\lambda, x, y) = \exp(\lambda J_-) \exp(x \chi_{+1}) \exp(y \chi_{+2}) , \quad (4.65)$$

infatti sviluppando in serie il secondo membro di questa definizione si vede subito che

$$I(\lambda, x, y) = \sum_{r,s,t} \frac{\lambda^r x^s y^t}{r!s!t!} G^{r,s,t} . \quad (4.66)$$

Ricordiamo ora che $J_- = \chi_{-1} \partial_{+1} + \chi_{-2} \partial_{+2}$; poichè $[\chi_{-1} \partial_{+1}, \chi_{-2} \partial_{+2}] = 0$ si ha

$$\exp(\lambda \chi_{-1} \partial_{+1} + \lambda \chi_{-2} \partial_{+2}) = \exp(\lambda \chi_{-1} \partial_{+1}) \exp(\lambda \chi_{-2} \partial_{+2}) \quad (4.67)$$

e di conseguenza per generiche funzioni analitiche f e g si ha

$$\begin{aligned} \exp(\lambda J_-) f(\chi_{+1}) g(\chi_{+2}) &= \exp(\lambda \chi_{-1} \partial_{+1}) f(\chi_{+1}) \exp(\lambda \chi_{-2} \partial_{+2}) g(\chi_{+2}) = \\ &= f(\chi_{+1} + \lambda \chi_{-1}) g(\chi_{+2} + \lambda \chi_{-2}) . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Quindi in particolare si ha

$$\begin{aligned}
I(\lambda, x, y) &= \exp[x(\chi_{+1} + \lambda\chi_{-1})] \exp[y(\chi_{+2} + \lambda\chi_{-2})] = \\
&= \sum_{s,t} \frac{x^s y^t}{s!t!} (\chi_{+1} + \lambda\chi_{-1})^s (\chi_{+2} + \lambda\chi_{-2})^t = \\
&= \sum_{s,t} \frac{x^s y^t}{s!t!} \sum_{u=0}^s \sum_{v=0}^t \binom{s}{u} \binom{t}{v} \lambda^{u+v} \chi_{+1}^{s-u} \chi_{-1}^u \chi_{+2}^{t-v} \chi_{-2}^v = \\
&= \sum_{s,t,r} \frac{x^s y^t \lambda^r}{s!t!} \sum_q \binom{s}{q} \binom{t}{r-q} \chi_{+1}^{s-q} \chi_{-1}^q \chi_{+2}^{t-r+q} \chi_{-2}^{r-q}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

da cui, confrontando con Eq. (4.66), si trova

$$G^{r,s,t} = r! \sum_q \binom{s}{q} \binom{t}{r-q} \chi_{+1}^{s-q} \chi_{-1}^q \chi_{+2}^{t-r+q} \chi_{-2}^{r-q} \tag{4.70}$$

Nella relazione Eq. (4.63) interviene $G^{r,s,t}$ con $r = j - m$, $s = j + \ell_1 - \ell_2$, $t = j + \ell_2 - \ell_1$, cioè

$$\begin{aligned}
G^{j-m, j+\ell_1-\ell_2, j+\ell_2-\ell_1} &= \sum_q \frac{(j-m)!(j+\ell_1-\ell_2)!(j+\ell_2-\ell_1)!}{q!(j+\ell_1-\ell_2-q)!(j-m-q)!(m+\ell_2-\ell_1+q)!} \times \\
&\quad \times \chi_{+1}^{j+\ell_1-\ell_2-q} \chi_{-1}^q \chi_{+2}^{m+\ell_2-\ell_1+q} \chi_{-2}^{j-m-q}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

usando la definizione $T = \chi_{+1}\chi_{-2} - \chi_{-1}\chi_{+2}$ si ottiene

$$T^{\ell_1+\ell_2-j} = \sum_s \binom{\ell_1 + \ell_2 - j}{s} (-1)^s (\chi_{+1}\chi_{-2})^{\ell_1+\ell_2-j-s} (\chi_{-1}\chi_{+2})^s \tag{4.72}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
T^{\ell_1+\ell_2-j} G^{j-m, j+\ell_1-\ell_2, j+\ell_2-\ell_1} &= \\
&= \sum_{s,q} (-1)^s \frac{(\ell_1 + \ell_2 - j)!(j-m)!(j+\ell_1-\ell_2)!(j+\ell_2-\ell_1)!}{s!(\ell_1 + \ell_2 - j - s)!q!(j+\ell_1-\ell_2-q)!(j-m-q)!(m+\ell_2-\ell_1+q)!} \times \\
&\quad \times \chi_{+1}^{2\ell_1-q-s} \chi_{-1}^{q+s} \chi_{+2}^{m+\ell_2-\ell_1+q+s} \chi_{-2}^{\ell_1+\ell_2-m-q-s}
\end{aligned} \tag{4.73}$$

inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\chi_{+1}^{2\ell_1-q-s} \chi_{-1}^{q+s} &= \sqrt{(2\ell_1 - q - s)!(q + s)!} |\ell_1, \ell_1 - q - s\rangle \\
\chi_{+2}^{m+\ell_2-\ell_1+q+s} \chi_{-2}^{\ell_1+\ell_2-m-q-s} &= \\
&= \sqrt{(m + \ell_2 - \ell_1 + q + s)!(\ell_1 + \ell_2 - m - q - s)!} |\ell_2, m - \ell_1 + q + s\rangle.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Rimettendo insieme i pezzi si trova

$$\begin{aligned}
|J(\ell_1, \ell_2, j, m)\rangle &= \frac{N(\ell_1 + \ell_2 - j, \ell_1, \ell_2) \Delta(j, m)}{\sqrt{(j + \ell_1 - \ell_2)!(j + \ell_2 - \ell_1)!}} \sum_{s,q} (-1)^s \times \\
&\times \frac{(\ell_1 + \ell_2 - j)!(j-m)!(j+\ell_1-\ell_2)!(j+\ell_2-\ell_1)!}{s!(\ell_1 + \ell_2 - j - s)!q!(j+\ell_1-\ell_2-q)!(j-m-q)!(m+\ell_2-\ell_1+q)!} \times \\
&\times \sqrt{(2\ell_1 - q - s)!(q + s)!(m + \ell_2 - \ell_1 + q + s)!(\ell_1 + \ell_2 - m - q - s)!} \times \\
&\times |M(\ell_1, \ell_1 - q - s, \ell_2, m - \ell_1 + q + s)\rangle
\end{aligned} \tag{4.75}$$

da cui ponendo $m_1 = \ell_1 - q - s$, $m_2 = m - \ell_1 + q + s$ (e quindi $m_1 + m_2 = m$), si ottiene infine l'espressione esplicita per i coefficienti di Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} \langle M(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2) | J(\ell_1, \ell_2, j, m) \rangle &= \sqrt{2j+1} \sqrt{\frac{(\ell_1 + \ell_2 - j)! (\ell_1 - \ell_2 + j)! (-\ell_1 + \ell_2 + j)!}{(\ell_1 + \ell_2 + j + 1)!}} \times \\ &\times \sqrt{(\ell_1 + m_1)! (\ell_1 - m_1)! (\ell_2 + m_2)! (\ell_2 - m_2)! (j + m)! (j - m)!} \times \\ &\times \sum_s \frac{(-1)^s}{s! (\ell_1 - m_1 - s)! (\ell_2 + m_2 - s)! (\ell_1 + \ell_2 - j - s)! (j - \ell_1 - m_2 + s)! (j - \ell_2 + m_1 + s)!} , \end{aligned} \quad (4.76)$$

dove la somma su s è estesa a tutti i valori per i quali i fattoriali sono non negativi.

È ora immediato verificare la relazione Eq. (4.41), che dice che il coefficiente di Clebsch-Gordan è non negativo se $m_1 = \ell_1$, $m = j$ e di conseguenza $m_2 = j - \ell_1$: dai primi due termini del denominatore della sommatoria si vede che solo $s = 0$ è ammissibile e in questo caso a vista il risultato è non negativo. Questo assicura che le scelte effettuate dei segni nelle normalizzazioni erano consistenti con le convenzioni di Condon-Shortley.

4.4 Simmetrie dei coefficienti di Clebsch-Gordan

Le principali simmetrie dei coefficienti di Clebsch-ordan sono le seguenti:

$$\langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) | J(j_1, j_2, j, m) \rangle = (-1)^{j_1+j_2-j} \langle M(j_2, m_2, j_1, m_1) | J(j_1, j_2, j, m) \rangle \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} \langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) | J(j_1, j_2, j, m) \rangle &= \\ &= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle M(j_1, -m_1, j_2, -m_2) | J(j_1, j_2, j, -m) \rangle \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) | J(j_1, j_2, j, m) \rangle &= \\ &= (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \langle M(j_2, -m_2, j, m) | J(j_2, j, j_1, m_1) \rangle \end{aligned} \quad (4.79)$$

e dimostreremo queste simmetrie utilizzando l'espressione generale Eq. (4.76) derivata nella sezione precedente.

Consideriamo innanzitutto la proprietà Eq. (4.77): analizzando l'espressione Eq. (4.76) si vede che l'unica parte di questa espressione che cambia per lo scambio $(j_1, m_1) \leftrightarrow (j_2, m_2)$ è il termine di somma

$$\begin{aligned} S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m) &= \sum_s \frac{(-1)^s}{s! (j_1 - m_1 - s)! (j_2 + m_2 - s)!} \times \\ &\times \frac{1}{(j_1 + j_2 - j - s)! (j - j_1 - m_2 + s)! (j - j_2 + m_1 + s)!} . \end{aligned} \quad (4.80)$$

Cambiamo a questo punto la variabile della sommatoria, introducendo s' tramite la relazione $s = j_1 + j_2 - j - s'$. In questo modo si ha

$$\begin{aligned} S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m) &= (-1)^{j_1+j_2-j} \sum_{s'} \frac{(-1)^{s'}}{s'! (j_2 - m_2 - s')! (j_1 + m_1 - s')!} \times \\ &\times \frac{1}{(j_1 + j_2 - j - s')! (j - j_2 - m_1 + s')! (j - j_1 + m_2 + s')!} = \\ &= (-1)^{j_1+j_2-j} S(j_2, m_2, j_1, m_1 | j, m) \end{aligned} \quad (4.81)$$

che è equivalente alla relazione 4.77.

Anche nel caso dello scambio $(m_1, m_2, m) \leftrightarrow -(m_1, m_2, m)$ l'unica parte dell'espressione Eq. (4.76) che cambia è l'espressione $S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m)$ e considerando nuovamente lo scambio $s = j_1 + j_2 - j - s'$ si ottiene, procedendo analogamente a come fatto prima, l'equazione

$$S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m) = (-1)^{j_1+j_2-j} S(j_1, -m_1, j_2, -m_2 | j, -m) \quad (4.82)$$

che è equivalente alla relazione Eq. (4.78). Consideriamo infine Eq. (4.79): da Eq. (4.76) si vede semplicemente che essa è equivalente a

$$S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m) = (-1)^{j_2 + m_2} S(j_2, m_2, j, m | j_1, m_1) \quad (4.83)$$

quindi basterà mostrare questa ultima. Per fare ciò basta effettuare il cambio di variabile $s' = j_2 + m_2 - s$ nella somma che definisce $S(j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m)$ e procedere analogamente a prima.

4.5 Applicazione alle matrici di rotazione

Utilizzando i coefficienti di Clebsch-Gordan, si dimostra la seguente relazione per il prodotto di due matrici di rotazione:

$$\begin{aligned} D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \\ &= \sum_{j m m'} \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \langle M(m'_1, m'_2) | J(j, m') \rangle D_{m m'}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Indichiamo con \mathbf{J} il momento angolare totale ottenuto sommando i momenti angolari \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 ; sia inoltre $D(\alpha, \beta, \gamma)$ l'operatore di rotazione del sistema complessivo e $D_1(\alpha, \beta, \gamma)$ e $D_2(\alpha, \beta, \gamma)$ gli operatori di rotazione dei due sottosistemi aventi rispettivamente momento angolare \mathbf{J}_1 e \mathbf{J}_2 . È semplice mostrare che si ha

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = D_1(\alpha, \beta, \gamma) \otimes D_2(\alpha, \beta, \gamma) , \quad (4.85)$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) | D | M(j_1, m'_1, j_2, m'_2) \rangle &= \langle j_1, m_1 | D_1 | j_1, m'_1 \rangle \langle j_2, m_2 | D_2 | j_2, m'_2 \rangle = \\ &= D_{m_1 m'_1}^{(j_1)} D_{m_2 m'_2}^{(j_2)} . \end{aligned} \quad (4.86)$$

D'altra parte si ha anche

$$\begin{aligned} \langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) | D | M(j_1, m'_1, j_2, m'_2) \rangle &= \\ &= \sum_{j m j' m'} \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \langle J(j, m) | D | J(j', m') \rangle \langle J(j', m') | M(m_1, m_2) \rangle = \\ &= \sum_{j m m'} \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle \langle J(j, m) | D | J(j, m') \rangle \langle J(j, m') | M(m_1, m_2) \rangle = \\ &= \sum_{j m m'} \langle M(m_1, m_2) | J(j, m) \rangle D_{m m'}^{(j)} \langle J(j, m') | M(m_1, m_2) \rangle \end{aligned} \quad (4.87)$$

e dal confronto con l'equazione precedente si ottiene Eq. (4.84). Per j_1 e j_2 interi, ricordando Eq. (3.45), si ottiene una analoga relazione per le armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) &= \sum_{l, m} \left(\sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)}} \langle M(l_1, m_1, l_2, m_2) | J(l_1, l_2, l, m) \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle M(l_1, 0, l_2, 0) | J(l_1, l_2, l, 0) \rangle Y_{l m}(\theta, \phi) \right) . \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dimostriamo ora una relazione di ortogonalità per le matrici di rotazione: si era visto in precedenza (vedi Eq. (3.65)) che $\int D(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega}$ è il proiettore sullo stato invariante per rotazioni, quindi se si integra Eq. (4.85) e si moltiplica il risultato a sinistra per $\langle M(j_1, m_1, j_2, m_2) |$ e a destra per $| M(j_1, m'_1, j_2, m'_2) \rangle$ si ottiene

$$\int D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = \langle M(m_1, m_2) | J(0, 0) \rangle \langle J(0, 0) | M(m'_1, m'_2) \rangle \quad (4.89)$$

Usando Eq. (4.76) si vede che

$$\langle J(j_1, j_2, 0, 0) | M(j_1, m_1, j_2, m_2) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j_1 + 1}} (-1)^{j_1 - m_1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{-m_1 m_2} \quad (4.90)$$

e quindi

$$\int D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) D_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{-m_1 m_2} \delta_{-m'_1 m'_2} (-1)^{2j_1 - m_1 - m'_1} . \quad (4.91)$$

D'altra parte, usando la forma esplicita Eq. (3.8) ed il fatto che gli elementi di matrice $d_{m m'}^{(j)}(\beta)$ sono reali, si ha la relazione

$$D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma)^* = D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(-\alpha, \beta, -\gamma) \quad (4.92)$$

e usando Eq. (3.35) e Eq. (3.36) si trova

$$D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(-\alpha, \beta, -\gamma) = (-1)^{m_1 - m'_1} D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(-\alpha, -\beta, -\gamma) = (-1)^{m_1 - m'_1} D_{-m_1, -m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma) , \quad (4.93)$$

da cui segue (poichè $(-1)^{2j_1 + 2m_1} = +1$)

$$\int D_{m_1 m'_1}^{(j_1)}(\alpha, \beta, \gamma)^* D_{m_2 m'_2}^{(j_2)}(\alpha, \beta, \gamma) d\tilde{\Omega} = \frac{1}{2j_1 + 1} \delta_{j_1 j_2} \delta_{m_1 m_2} \delta_{m'_1 m'_2} . \quad (4.94)$$

Nel caso particolare di j_1, j_2 interi, usando l'equazione Eq. (3.45) e la periodicità di 2π in α per passare da $d\tilde{\Omega}$ a $d\Omega$ (angolo solido tridimensionale), si ottiene l'ortonormalità delle armoniche sferiche, che in precedenza non era stata dimostrata direttamente. Dall'ortonormalità e da Eq. (4.88) segue l'integrale notevole

$$\begin{aligned} & \int Y_{l m}^*(\theta, \phi) Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) d\Omega = \\ & = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)}} \langle M(l_1, m_1, l_2, m_2) | J(l_1, l_2, l, m) \rangle \langle M(l_1, 0, l_2, 0) | J(l_1, l_2, l, 0) \rangle . \end{aligned} \quad (4.95)$$

5 Operatori tensoriali

5.1 Tensori cartesiani e tensori sferici

In meccanica classica un tensore cartesiano di rango n è definito come un insieme di componenti $T_{ij\dots k}$ associate ad n indici che sotto una rotazione trasforma come

$$T'_{i'j'\dots k'} = \sum_{ij\dots k} R_{i'i} R_{j'j} \cdots R_{k'k} T_{ij\dots k} \quad (5.1)$$

dove R è la matrice che rappresenta la rotazione tridimensionale. Un tensore cartesiano ad n indici è quindi un insieme di 3^n componenti che costituiscono una rappresentazione (in generale riducibile) del gruppo delle rotazioni.

Dalla relazione Eq. (5.1) è semplice verificare che le proprietà di simmetria/antisimmetria del tensore restano invariate sotto rotazioni: ad esempio se $T_{ij\dots k}$ è simmetrico per scambio dei primi due indici anche $T'_{i'j'\dots k'}$ lo sarà. Si è quindi ottenuta una prima decomposizione della rappresentazione dei tensori cartesiani in tensori cartesiani con preassegnate simmetrie per scambio di indici. Per trovare il numero di componenti indipendenti di un tensore cartesiano completamente simmetrico ad n indici si può procedere nel seguente modo: il numero di modi indipendenti in cui si possono assegnare i valori 1, 2, 3 a ciascun indice è, a causa della completa simmetria, uguale al numero di modi in cui si possono disporre n indici in 3 scatole, che è

$$\frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} . \quad (5.2)$$

Notiamo che dalla relazione Eq. (5.1) e dalla ortogonalità della matrice R segue che una altra proprietà di $T_{ij\dots k}$ resta invariata sotto rotazioni: il fatto di avere traccia nulla per la contrazione di due indici. Se ad esempio $\sum_i T_{iik\dots l} = 0$ si avrà anche

$$\begin{aligned} \sum_{i'} T'_{i'i'k'\dots l'} &= \sum_{i'ijk\dots l} R_{i'i} R_{i'j} R_{k'k} \cdots R_{l'l} T_{ijk\dots l} = \\ &= \sum_{ijl\dots l} \delta_{ij} R_{k'k} \cdots R_{l'l} T_{ijk\dots l} = \sum_{k'\dots l'} \left(R_{k'k} \cdots R_{l'l} \sum_i T_{iik\dots l} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Consideriamo ora i tensori cartesiani irriducibili di rango n , che sono i tensori cartesiani di rango n completamente simmetrici e per i quali si annulla la traccia per contrazione di ogni coppia di indici. A causa della completa simmetria basta si annulli la traccia per una coppia qualunque di indici affinché si annulli per ogni coppia; il numero di contrazioni indipendenti che si possono effettuare è quindi legato al numero di componenti indipendenti per i restanti $n-2$ indici (quindi il numero di componenti indipendenti di un tensore simmetrico a $n-2$ indici):

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (5.4)$$

quindi il numero di componenti indipendenti di un tensore cartesiano irriducibile è

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1 \quad (5.5)$$

che è anche la dimensione della rappresentazione irriducibile $\mathfrak{D}^{(n)}$ del gruppo delle rotazioni.

La relazione con le rappresentazioni del gruppo delle rotazioni è più evidente per i tensori sferici di rango l , che sono definiti come un insieme di $2l+1$ elementi $T_m^{(l)}$ (con $m = -l, -l+1, \dots, l-1, l$) che sotto rotazioni trasformano secondo la relazione

$$T'_{m'}^{(l)} = \sum_{m=-l}^l T_m^{(l)} D_{m m'}^{(l)}(R^{-1}) . \quad (5.6)$$

Per capire l'origine della definizione Eq. (5.6) mostriamo che questa è proprio la legge con cui trasformano sotto rotazioni le armoniche sferiche, cosa che tornerà anche utile per collegare i tensori sferici con i tensori cartesiani irriducibili. Si userà la relazione Eq. (3.45) che lega le armoniche sferiche alle matrici di rotazione e partiamo da $D(RR_1) = D(R)D(R_2)$, che moltiplicato a sinistra per $\langle l, m' |$ e a destra per $|l, m'' \rangle$ diventa

$$D_{m' m''}^{(l)}(RR_1) = \sum_m D_{m' m}^{(l)}(R)D_{m m''}^{(l)}(R_2) . \quad (5.7)$$

e consideriamo ora il caso $m'' = 0$. Indicando con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore in cui viene ruotato l'asse \hat{z} dalla rotazione R_2 ed usando Eq. (3.45) si trova

$$Y_{l m'}(R\hat{\mathbf{n}})^* = \sum_m D_{m' m}^{(l)}(R)Y_{l m}(\hat{\mathbf{n}})^* \quad (5.8)$$

che non è altro, usando l'unitarietà di $D_{m m'}^{(l)}(R)$, che il complesso coniugato di Eq. (5.6). Allo stesso risultato si può arrivare anche senza usare esplicitamente la relazione tra le matrici di rotazione e le armoniche sferiche, usando gli autostati direzionali analogamente a come fatto in Sez. (3.3) seguendo [4]: se $\hat{\mathbf{n}}' = R\hat{\mathbf{n}}$, dove $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{n}}'$ sono due versori e R è una rotazione tridimensionale, allora

$$|\hat{\mathbf{n}}'\rangle = D(R)|\hat{\mathbf{n}}\rangle \quad (5.9)$$

e moltiplicando a sinistra per $\langle l, m' |$ e inserendo una risoluzione dell'identità si ottiene

$$\langle l, m' | \hat{\mathbf{n}}'\rangle = D_{m' m}^{(l)}(R)\langle l, m | \hat{\mathbf{n}}\rangle \quad (5.10)$$

che ricordando che $Y_{l m}(\hat{\mathbf{n}}) = \langle \hat{\mathbf{n}} | l, m \rangle$ è equivalente a Eq. (5.8) e quindi a Eq. (5.6).

Per costruire tensori sferici di rango generico a partire da un vettore o per associare ad un tensore cartesiano irriducibile un tensore sferico è utile usare le armoniche solide

$$\mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{r}) = r^l Y_{l m}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) , \quad (5.11)$$

che ricordiamo (vedi Sez. (2.2)) sono dei polinomi omogenei di grado l nelle componenti cartesiane di \mathbf{r} che soddisfano l'equazione di Laplace $\Delta \mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{r}) = 0$. Usando $\mathcal{Y}_{l m}$ è immediato costruire tensori sferici a partire da un dato vettore cartesiano \mathbf{V} : poichè \mathbf{V} trasforma sotto rotazioni come \mathbf{r} si vede subito che $\mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{V})$ è un tensore sferico di rango l . Per procedere con la identificazione tra tensori cartesiani irriducibili e tensori sferici è invece necessario scrivere $\mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{r})$ in modo un poco più esplicito: dall'omogeneità segue che si può scrivere

$$\mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{r}) = \sum_{i_1 i_2 \dots i_l} a_{i_1 i_2 \dots i_l}^{(l m)} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_l} , \quad (5.12)$$

dove $i_k \in \{1, 2, 3\}$ e si può assumere che i coefficienti siano completamente simmetrici. Dal fatto che $\mathcal{Y}_{l m}$ è una funzione armonica segue inoltre

$$0 = \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial r_i} (r^l Y_{l m}(\hat{\mathbf{n}})) = \frac{l(l-1)}{2} \sum_{i_3 \dots i_l} \left(\sum_i a_{i i i_3 \dots i_l}^{(l m)} \right) r_{i_3} \dots r_{i_l} , \quad (5.13)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la completa simmetria dei coefficienti $a^{(l m)}$; si vede quindi che i coefficienti $a^{(l m)}$ devono essere non solo simmetrici ma anche a traccia nulla. A questo punto, dato il tensore cartesiano $T_{i_1 i_2 \dots i_l}$ si può associare ad esso l'espressione

$$T_m^{(l)} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_l} a_{i_1 i_2 \dots i_l}^{(l m)} T_{i_1 i_2 \dots i_l} . \quad (5.14)$$

Poichè le componenti $T_{i_1 i_2 \dots i_l}$ di un tensore cartesiano trasformano sotto rotazioni come il prodotto $r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_l}$ e $\mathcal{Y}_{l m}(\mathbf{r})$ è un tensore sferico di rango l si vede che anche $T_m^{(l)}$ è un tensore sferico di

rango l , inoltre a causa delle proprietà dei coefficienti $a^{(lm)}$ solo la componente irriducibile di $T_{i_1 i_2 \dots i_l}$ contribuisce a $T_m^{(l)}$.

Ad esempio per $l = 1$ si ha

$$\mathcal{Y}_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x - iy), \quad \mathcal{Y}_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z, \quad \mathcal{Y}_{1+1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x + iy) \quad (5.15)$$

quindi al vettore \mathbf{V} si può associare il tensore sferico (a meno di costanti irrilevanti)

$$V_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 - iV_2), \quad V_0^{(1)} = V_3, \quad V_{+1}^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 + iV_2). \quad (5.16)$$

Analogamente per $l = 2$ si ha (i casi non riportati si ottengono usando $\mathcal{Y}_{l-m}(\mathbf{r}) = (-1)^m \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{r})^*$)

$$\mathcal{Y}_{20} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2), \quad \mathcal{Y}_{21} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(x + iy)z, \quad \mathcal{Y}_{22} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}(x + iy)^2 \quad (5.17)$$

quindi a partire dal tensore cartesiano simmetrico T_{ij} si può costruire il tensore sferico $T^{(2)}$ le cui componenti valgono (di nuovo a meno di costanti di proporzionalità irrilevanti)

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2T_{33} - T_{11} - T_{22}), \quad T_1^{(2)} = -\sqrt{3}(T_{13} + iT_{23}), \quad (5.18)$$

$$T_2^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}).$$

In meccanica quantistica un modo naturale per definire un operatore tensoriale cartesiano è imporre che il suo valore di aspettazione sia un tensore cartesiano classico. Consideriamo l'operatore $T_{ij\dots k}$: il suo valore di aspettazione sullo stato $|s\rangle$ è $\langle s|T_{ij\dots k}|s\rangle$ e se si effettua una rotazione R lo stato $|s\rangle$ diventa lo stato $D(R)|s\rangle$, quindi il nuovo valor medio risulta essere $\langle s|D^\dagger(R)T_{ij\dots k}D(R)|s\rangle$, quindi affinché il valor medio sia un tensore cartesiano si deve imporre che valga la condizione

$$D^\dagger(R)T_{i'j'\dots k'}D(R) = R_{i'i}R_{j'j}\dots R_{k'k}T_{ij\dots k} \quad (5.19)$$

Nel caso particolare di operatori vettoriali cartesiani, considerando rotazioni infinitesime ed usando la forma esplicita di $D(R)$ e R si ottiene

$$(1 + i\delta\phi J_n)V_{j'}(1 - i\delta\phi J_n) \simeq (\delta_{j'j} + \epsilon_{j'nj}\delta\phi)V_j \quad (5.20)$$

e quindi si trovano le relazioni di commutazione

$$[V_k, J_n] = i\epsilon_{knj}V_j. \quad (5.21)$$

Per gli operatori tensori sferici si può procedere in modo identico, arrivando a

$$D^\dagger(R)T_{q'}^{(k)}D(R) = \sum_{q=-k}^k T_q^{(k)}D_{qq'}^{(k)}(R^{-1}). \quad (5.22)$$

Anche in questo caso si può considerare l'effetto delle rotazioni infinitesime e vedere che la definizione precedente è equivalente alle relazioni di commutazione

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}T_{q\pm 1}^{(k)} \quad (5.23)$$

$$[J_z, T_q^{(k)}] = qT_q^{(k)}.$$

dove ovviamente sono state usate le relazioni Eq. (2.25).

Vediamo ora come trasformano gli hermitiani coniugati: è immediato verificare che l'hermitiano coniugato di un tensore cartesiano trasforma ancora come un tensore cartesiano dello stesso tipo,

mentre per i tensori sferici le cose sono leggermente più complicate poichè le matrici di rotazione $D_{qq'}^{(k)}$ sono complesse: considerando l'hermitiano coniugato di Eq. (5.22) si ha

$$D^\dagger(R)(T_{q'}^{(k)})^\dagger D(R) = \sum_{q=-k}^k (T_q^{(k)})^\dagger D_{qq'}^{(k)*}(R^{-1}) . \quad (5.24)$$

Usando l'espressione esplicita Eq. (3.8) della matrice di rotazione e le simmetrie Eq. (3.35), Eq. (3.36) si ha (indicando con α, β e γ i parametri di Eulero della rotazione R^{-1})

$$\begin{aligned} D_{qq'}^{(k)*}(R^{-1}) &= e^{i(q\alpha+q'\gamma)} d_{qq'}^{(k)}(\beta) = e^{i(q\alpha+q'\gamma)} (-1)^{q'-q} d_{qq'}^{(k)}(-\beta) = \\ &= e^{i(q\alpha+q'\gamma)} (-1)^{q'-q} d_{-q-q'}^{(k)}(\beta) = (-1)^{q'-q} D_{-q-q'}^{(k)}(R^{-1}) . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Di conseguenza l'operatore $(T^\dagger)_q^{(k)}$ definito da ⁵

$$(T^\dagger)_{-q}^{(k)} \equiv (-1)^{-q-k} (T_q^{(k)})^\dagger , \quad (T_q^{(k)})^\dagger = (-1)^{q+k} (T^\dagger)_{-q}^{(k)} \quad (5.26)$$

trasforma come un tensore sferico. Alla stessa conclusione si sarebbe potuti arrivare anche considerando l'hermitiano coniugato delle equazioni Eq. (5.23).

Per costruire espressioni invarianti per rotazioni tramite operatori tensoriali cartesiani è sufficiente contrarre tutti gli indici, è infatti immediato verificare che se $U_{i_1\dots i_n}$ e $V_{i_1\dots i_n}$ sono due tensori cartesiani allora $U_{i_1\dots i_n} V_{i_1\dots i_n}$ e $V_{i_1\dots i_n} U_{i_1\dots i_n}$ sono invarianti (in generale le due espressioni sono diverse se i due operatori non commutano). Nel caso di due tensori sferici dello stesso ordine $U_q^{(k)}$ e $V_p^{(k)}$ si ha che $\sum_q (-1)^{k-q} U_q^{(k)} V_{-q}^{(k)}$ e $\sum_q (-1)^{k-q} V_q^{(k)} U_{-q}^{(k)}$ sono invarianti, infatti

$$D^\dagger(R) \sum_q (-1)^{k-q} U_q^{(k)} V_{-q}^{(k)} D(R) = \sum_{qq'q''} (-1)^{k-q} U_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R^{-1}) V_{-q''}^{(k)} D_{-q''-q}^{(k)}(R^{-1}) \quad (5.27)$$

ed usando l'espressione esplicita Eq. (3.8) della matrice di rotazione e le simmetrie Eq. (3.34)-(3.35)-(3.36) si ha (indicando con α, β e γ i parametri di Eulero della rotazione R^{-1})

$$\begin{aligned} D_{-q''-q}^{(k)}(R^{-1}) &= e^{i(q''\alpha+q\gamma)} d_{-q''-q}^{(k)}(\beta) = e^{i(q''\alpha+q\gamma)} d_{-q-q''}^{(k)}(-\beta) = e^{i(q''\alpha+q\gamma)} d_{qq''}^{(k)}(\beta) = \\ &= (-1)^{q-q''} e^{i(q''\alpha+q\gamma)} d_{qq''}^{(k)}(-\beta) = (-1)^{q-q''} D_{qq''}^{(k)}(-\gamma, -\beta, -\alpha) = (-1)^{q-q''} D_{qq''}^{(k)}(R) \end{aligned} \quad (5.28)$$

quindi

$$\begin{aligned} D^\dagger(R) \sum_q (-1)^{k-q} U_q^{(k)} V_{-q}^{(k)} D(R) &= \sum_{qq'q''} (-1)^{k-q''} U_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R^{-1}) V_{-q''}^{(k)} D_{q'q''}^{(k)}(R) = \\ &= \sum_{q'} (-1)^{k-q'} U_{q'}^{(k)} V_{-q'}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ad esempio nel caso di due operatori vettoriali è immediato verificare usando le relazioni Eq. (5.16) che $\sum_q (-1)^{1-q} U_q^{(1)} V_{-q}^{(1)} = -\sum_i U_i V_i$.

Nel caso siano dati due operatori $U_{q_1}^{(k_1)}$ e $V_{q_2}^{(k_2)}$ e si voglia costruire un operatore tensoriale sferico di rango k si può utilizzare l'espressione generale (come al solito c'è anche la versione con U e V scambiati che in generale è diversa)

$$T_q^{(k)} = \sum_{q_1, q_2} U_{q_1}^{(k_1)} V_{q_2}^{(k_2)} \langle M(k_1, q_1, k_2, q_2) | J(k_1, k_2, k, q) \rangle , \quad (5.30)$$

che si può verificare trasforma nel modo corretto (la dimostrazione è identica a quella riportata in Sez. (5.2.1) per mostrare che Eq. (5.39) trasforma come deve). È facile convincersi che il "prodotto

⁵C'è parecchia arbitrarietà nella scelta delle fasi. Le cose importanti sono lo scambio $q \rightarrow -q$ e la fase $(-1)^q$.

scalare" descritto nel paragrafo precedente è un caso particolare di questa espressione, infatti usando l'espressione generale Eq. (4.76) per calcolare $\langle M(k, q, k, -q) | J(k, k, 0, 0) \rangle$ si vede che solo $s = k - q$ contribuisce alla somma e si ottiene $\langle M(k, q, k, -q) | J(k, k, 0, 0) \rangle = \frac{(-1)^{k-q}}{\sqrt{2k+1}}$. A meno di un irrilevante coefficiente di proporzionalità si riottiene quindi l'espressione precedente.

Terminiamo questa sezione mostrando una proprietà dei tensori sferici che è rilevante nei calcoli perturbativi: la traccia sul sottospazio a j costante di un qualunque elemento di un tensore sferico di rango non nullo si annulla; in formule

$$\sum_m \langle j, m | T_q^{(k)} | j, m \rangle \propto \delta_{k,0} . \quad (5.31)$$

Questo significa che una qualunque perturbazione che sia descritta da un elemento di un operatore tensoriale sferico non banale (cioè con $k \neq 0$) non sposta al primo ordine di teoria delle perturbazioni il baricentro dei multipletti in j . Per dimostrare questa proprietà usiamo la regola di trasformazione degli operatori sferici Eq. (5.22)

$$\begin{aligned} \sum_m \langle j, m | T_{q'}^{(k)} | j, m \rangle &= \sum_m \langle j, m | D(R) D^\dagger(R) T_{q'}^{(k)} D(R) D^\dagger(R) | j, m \rangle = \\ &= \sum_{m, q} \langle j, m | D(R) T_q^{(k)} D^\dagger(R) | j, m \rangle D_{q, q'}^{(k)}(R^{-1}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

e quella degli stati $|j, m\rangle$ Eq. (3.10)

$$D^\dagger(R) |j, m\rangle = D(R^{-1}) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle D_{m' m}^{(j)}(R^{-1}) . \quad (5.33)$$

Usando anche l'hermitiano coniugato di questa ultima equazione e l'unitarietà delle matrici di rotazione otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_m \langle j, m | T_{q'}^{(k)} | j, m \rangle &= \sum_{m, q} \langle j, m'' | T_q^{(k)} | j, m' \rangle D_{m'' m}^{(j)*}(R^{-1}) D_{m' m}^{(j)}(R^{-1}) D_{q, q'}^{(k)}(R^{-1}) = \\ &= \sum_{q, m, m', m''} \langle j, m'' | T_q^{(k)} | j, m' \rangle D_{m m''}^{(j)}(R) D_{m' m}^{(j)}(R^{-1}) D_{q, q'}^{(k)}(R^{-1}) = \\ &= \sum_{q, m'} \langle j, m' | T_q^{(k)} | j, m' \rangle D_{q, q'}^{(k)}(R^{-1}) . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definendo ora il vettore $X_q = \sum_m \langle j, m | T_q^{(k)} | j, m \rangle$, questa equazione si riscrive nella forma

$$X_{q'} = X_q D_{q, q'}^{(k)}(R^{-1}) = D_{q' q}^{(k)*}(R) X_q \quad (5.35)$$

da cui si vede che X_q^* è un vettore invariante per la rappresentazione irriducibile $\mathfrak{D}^{(k)}$, quindi a meno che non sia $k = 0$ si deve avere $X_q = 0$ (allo stesso risultato si arriva anche integrando in $d\tilde{\Omega}$ Eq. (3.60) e usando Eq. (3.66)). Dato che esiste una relazione lineare biunivoca tra gli elementi di un tensore sferico di rango k e gli elementi di un tensore cartesiano irriducibile a k indici, la proprietà di essere a traccia nulla sul sottospazio a j fissato è vera anche per i tensori cartesiani irriducibili.

5.2 Teorema di Wigner-Eckart

Il teorema di Wigner-Eckart è un importante teorema sugli elementi di matrice dei tensori sferici tra autostati del momento angolare, il cui enunciato è

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = \langle J(k, j, j', m') | M(k, q, j, m) \rangle \frac{\langle j' || T^{(k)} || j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} , \quad (5.36)$$

dove $\langle j' || T_q^{(k)} || j \rangle$ è detto elemento di matrice ridotto ed è indipendente dai valori di m e M' . Il teorema di Wigner-Eckart afferma cioè che tutta la dipendenza da m e m' dell'elemento di matrice $\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle$ può essere fattorizzata come un determinato coefficiente di Clebsch-Gordan. Altre convenzioni possono essere usate nella scrittura dei momenti angolari nel coefficiente di Clebsch-Gordan, che differiscono in sostanza per una fase globale (vedi Eq. (4.77)-(4.78)) che si può riassorbire nell'elemento di matrice ridotto, analogamente al fattore a denominatore, che se scritto esplicitamente in questa forma semplifica un poco la scrittura del caso aggiunto. Poichè in Eq. (5.36) i momenti angolari nel coefficiente di Clebsch-Gordan appaiono nello stesso ordine in cui entrano in $\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle$ questa sembra la forma mnemonicamente più conveniente.

Una conseguenza immediata del teorema di Wigner-Eckart è che $\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = 0$ se $m' \neq q + m$, poichè in questo caso si ha $\langle J(k, j, j', m') | M(k, q, j, m) \rangle = 0$. Questo fatto può anche essere dimostrato in modo diretto usando la seconda delle equazioni Eq. (5.23):

$$0 = \langle j', m' | \left([J_z, T_q^{(k)}] - q T_q^{(k)} \right) | j, m \rangle = (m' - m - q) \langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle, \quad (5.37)$$

da cui si vede che si può avere $\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle \neq 0$ solo se $m' = m + q$.

5.2.1 Prima dimostrazione

Come conseguenza di Eq. (5.22) e Eq. (3.10) si vede che lo stato $T_q^{(k)} | j, m \rangle$ trasforma sotto rotazioni secondo la rappresentazione $\mathfrak{D}^{(k)} \otimes \mathfrak{D}^{(j)}$, infatti

$$D(R) T_q^{(k)} | j, m \rangle = D(R) T_q^{(k)} D(R^{-1}) D(R) | j, m \rangle = D_{q'q}^{(k)}(R) D_{m'm}^{(j)}(R) T_{q'}^{(k)} | j, m' \rangle. \quad (5.38)$$

Dalla definizione dei coefficienti di Clebsch-Gordan segue allora che gli stati $|“J, M”\rangle$ definiti da

$$|“J, M”\rangle = \sum_{q,m} T_q^{(k)} | j, m \rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, J, M) \rangle, \quad (5.39)$$

nonostante non siano in generale normalizzati (le virgolette sono usate per ricordarlo), trasformano secondo la rappresentazione $\mathfrak{D}^{(J)}$, come si può vedere esplicitamente usando Eq. (4.84), che riscriviamo qui per comodità nella forma che serve:

$$D_{q'q}^{(k)}(R) D_{m'm}^{(j)}(R) = \sum_{j_1 m'_1 m_1} \langle M(q', m') | J(j_1, m'_1) \rangle \langle M(q, m) | J(j_1, m_1) \rangle D_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(R). \quad (5.40)$$

Si ha infatti usando Eq. (5.38)

$$\begin{aligned} D(R) |“J, M”\rangle &= \sum_{q,m} D(R) T_q^{(k)} | j, m \rangle \langle M(q, m) | J(J, M) \rangle = \\ &= \sum_{q m q' m' j_1 m'_1 m_1} \langle M(q', m') | J(j_1, m'_1) \rangle \langle M(q, m) | J(j_1, m_1) \rangle \times \\ &\quad \times D_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(R) T_{q'}^{(k)} | j, m' \rangle \langle M(q, m) | J(J, M) \rangle = \\ &= \sum_{q m j_1 m'_1 m_1} \langle M(q, m) | J(J, M) \rangle \langle M(q, m) | J(j_1, m_1) \rangle D_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(R) |“j_1, m'_1”\rangle = \\ &= \sum_{j_1 m'_1 m_1} \langle J(J, M) | J(j_1, m_1) \rangle D_{m'_1 m_1}^{(j_1)}(R) |“j_1, m'_1”\rangle = \sum_{m'_1} D_{m'_1 M}^{(J)}(R) |“J, m'_1”\rangle. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Considerando rotazioni infinitesime si ha quindi (usando Eq. (2.25) per calcolare $D_{M'M}^{(J)}(R)$)

$$\begin{aligned} J_z |“J, M”\rangle &= M |“J, M”\rangle, \quad J_+ |“J, M-1”\rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} |“J, M”\rangle, \\ J_- |“J, M”\rangle &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)} |“J, M-1”\rangle, \quad J^2 |“J, M”\rangle = J(J+1) |“J, M”\rangle \end{aligned} \quad (5.42)$$

da cui segue che $\langle j, m | "J, M" \rangle \propto \delta_j J \delta_m M$ e che

$$\begin{aligned} \langle J, M | "J, M" \rangle \sqrt{(J+M)(J-M+1)} &= \langle J, M | J_+ | "J, M-1" \rangle = \\ &= \langle J, M | J_-^\dagger | "J, M-1" \rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} \langle J, M-1 | "J, M-1" \rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

quindi $\langle J, M | "J, M" \rangle$ è indipendente dal valore di M .

Abbiamo ora tutti gli ingredienti per dimostrare il teorema di Wigner-Eckart: dalla unitarietà dei coefficienti di Clebsch-Gordan abbiamo

$$T_q^{(k)} |j, m\rangle = \sum_{J, M} \langle J(k, j, J, M) | M(k, q, j, m) \rangle | "J, M" \rangle \quad (5.44)$$

e moltiplicando per $\langle j', m' |$ troviamo

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} |j, m\rangle = \langle J(k, j, j', m') | M(k, q, j, m) \rangle \langle j', m' | "j', m'" \rangle . \quad (5.45)$$

Per quanto visto prima $\langle j', m' | "j', m'" \rangle$ non dipende dal valore di m' e quindi si può definire l'elemento di matrice ridotto

$$\langle j' || T^{(k)} || j \rangle = \sqrt{2j'+1} \langle j', m' | "j', m'" \rangle , \quad (5.46)$$

ottenendo Wigner-Eckart.

Le relazioni Eq. (5.42), che ai fini pratici sono la cosa che serve realmente per dimostrare Wigner-Eckart, avrebbero potuto essere dimostrate anche usando direttamente le regole di commutazione Eq. (5.23) come segue (il caso J_z è il più semplice, J_- è analogo):

$$\begin{aligned} J_+ | "J, M-1" \rangle &= J_+ \sum_{q, m} T_q^{(k)} |j, m\rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, J, M-1) \rangle = \\ &= \sum_{q, m} ([J_+, T_q^{(k)}] + T_q^{(k)} J_+) |j, m\rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, J, M-1) \rangle = \\ &= \sum_{q, m} \sqrt{(k-q)(k+q+1)} T_{q+1}^{(k)} |j, m\rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, J, M-1) \rangle + \\ &\quad + \sum_{q, m} \sqrt{(j-m)(j+m+1)} T_q^{(k)} |j, m+1\rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, J, M-1) \rangle = \\ &= \sum_{q, m} T_q^{(k)} |j, m\rangle \left(\sqrt{(k-q+1)(k+q)} \langle M(k, q-1, j, m) | J(k, j, J, M-1) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \langle M(k, q, j, m-1) | J(k, j, J, M-1) \rangle \right) = \\ &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)} | "J, M" \rangle \end{aligned} \quad (5.47)$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso della relazione di ricorrenza dei coefficienti di Clebsch-Gordan Eq. (4.34).

5.2.2 Seconda dimostrazione

Per l'unitarietà degli operatori di rotazione si può innanzitutto scrivere

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} |j, m\rangle = \langle j', m' | D^\dagger(R) D(R) T_q^{(k)} D^\dagger(R) D(R) |j, m\rangle \quad (5.48)$$

e usando le regole di trasformazione degli autostati del momento angolare Eq. (3.10) e la definizione di operatore sferico Eq. (5.22) il secondo membro può essere riscritto come

$$\sum_{n, n', q'} [D_{n' m'}^{(j')}(R)]^* D_{q' q}^{(k)}(R) D_{n m}^{(j)}(R) \langle j', n' | T_{q'}^{(k)} |j, n\rangle . \quad (5.49)$$

Utilizzando Eq. (4.84) si ha

$$D_{q'q}^{(k)}(R)D_{nm}^{(j)}(R) = \sum_{\omega \mu \mu'} \langle M(k, q', j, n) | J(k, j, \omega, \mu') \rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, \omega, \mu) \rangle D_{\mu'\mu}^{(\omega)}(R) \quad (5.50)$$

ottenendo quindi

$$\begin{aligned} \langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle &= \sum_{\omega \mu' \mu} \sum_{n n' q'} \langle M(k, q', j, n) | J(k, j, \omega, \mu') \rangle \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, \omega, \mu) \rangle \times \\ &\times [D_{n'm'}^{(j')}(R)]^* D_{\mu'\mu}^{(\omega)}(R) \langle j', n' | T_{q'}^{(k)} | j, n \rangle . \end{aligned} \quad (5.51)$$

Integrando questa equazione in $d\tilde{\Omega}$ (vedi Eq. (3.60)) e usando Eq. (4.94) si ottiene quindi (il primo membro resta invariato in quanto non dipende da R)

$$\begin{aligned} \langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle &= \frac{1}{2^{j'+1}} \sum_{n n' q'} \langle M(k, q', j, n) | J(k, j, j', n') \rangle \times \\ &\times \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, j', m') \rangle \langle j', n' | T_{q'}^{(k)} | j, n \rangle . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Definendo ora

$$\langle j' || T^{(k)} || j \rangle = \sum_{n n' q'} \langle M(k, q', j, n) | J(k, j, j', n') \rangle \frac{\langle j', n' | T_{q'}^{(k)} | j, n \rangle}{\sqrt{2^{j'+1}}} \quad (5.53)$$

si ottiene infine

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = \langle M(k, q, j, m) | J(k, j, j', m') \rangle \frac{\langle j' || T^{(k)} || j \rangle}{\sqrt{2^{j'+1}}} \quad (5.54)$$

che è il teorema di Wigner-Eckart.

5.2.3 Terza dimostrazione

Calcoliamo l'elemento di matrice di $[J_{\pm}, T_q^{(k)}]$ tra gli stati $\langle j_3, m_3 |$ e $|j_4, m_4\rangle$. Se si usano le relazioni di commutazione Eq. (5.23) si ottiene

$$\langle j_3, m_3 | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | j_4, m_4 \rangle = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle j_3, m_3 | T_{q \pm 1}^{(k)} | j_4, m_4 \rangle \quad (5.55)$$

se invece si usano le relazioni Eq. (2.25) per gli elementi di matrice di J_{\pm} si trova

$$\begin{aligned} \langle j_3, m_3 | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | j_4, m_4 \rangle &= \sqrt{(j_3 \pm m_3)(j_3 \mp m_3 + 1)} \langle j_3, m_3 \mp 1 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \rangle - \\ &- \sqrt{(j_4 \mp m_4)(j_4 \pm m_4 + 1)} \langle j_3, m_4 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \pm 1 \rangle \end{aligned} \quad (5.56)$$

Confrontando le due espressioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(j_3 \pm m_3)(j_3 \mp m_3 + 1)} \langle j_3, m_3 \mp 1 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \rangle &= \\ &= \sqrt{(j_4 \mp m_4)(j_4 \pm m_4 + 1)} \langle j_3, m_3 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \pm 1 \rangle + \\ &+ \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} \langle j_3, m_3 | T_{q \pm 1}^{(k)} | j_4, m_4 \rangle , \end{aligned} \quad (5.57)$$

che usando le funzioni A definite in Eq. (4.28) e prendendo i segni in alto si riscrivono nella forma

$$\begin{aligned} A(j_3, m_3) \langle j_3, m_3 - 1 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \rangle &= \\ &= A(j_4, m_4 + 1) \langle j_3, m_3 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 + 1 \rangle + \\ &+ A(k, q + 1) \langle j_3, m_3 | T_{q+1}^{(k)} | j_4, m_4 \rangle , \end{aligned} \quad (5.58)$$

Queste relazioni hanno la stessa forma delle relazioni di ricorrenza dei coefficienti di Clebsch-Gordan Eq. (4.33), come si vede dall'identificazione dei simboli

$$\begin{aligned} \langle j_3, m_3 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \rangle &\leftrightarrow \langle M(k, q, j_4, m_4) | J(k, j_4, j_3, m_3) \rangle \text{ in Eq. (4.33)} \\ j_3, m_3, j_4, m_4, k, q &\leftrightarrow j, m, j_1, m_1, j_2, m_2 \text{ in Eq. (4.33)} \end{aligned} \quad (5.59)$$

e poichè entrambe le relazioni di ricorrenza sono lineari ed omogenee, se ne deduce che si deve avere

$$\langle j_3, m_3 | T_q^{(k)} | j_4, m_4 \rangle = C(j_3, j_4, k) \langle M(k, q, j_4, m_4) | J(k, j_4, j_3, m_3) \rangle \quad (5.60)$$

Quest'ultima formula è equivalente al teorema di Wigner-Eckart, poichè si può definire

$$\langle j_3 || T^{(k)} || j_4 \rangle = C(j_3, j_4, k) \sqrt{2j_3 + 1} \quad (5.61)$$

5.2.4 Il teorema della proiezione

Dato un generico operatore vettoriale \mathbf{V} si ha la relazione

$$\langle j, m' | \mathbf{V} | j, m \rangle = \frac{\langle j, m | \mathbf{J} \cdot \mathbf{V} | j, m \rangle}{j(j+1)} \langle j, m' | \mathbf{J} | j, m \rangle, \quad (5.62)$$

risultato spesso noto come teorema della proiezione.

Per fissato valore di j , dal teorema di Wigner-Eckart segue che gli elementi di matrice delle componenti sferiche di \mathbf{V} , $\langle j, m' | V_q^{(1)} | j, m \rangle$, sono proporzionali agli elementi di matrice di $\langle j, m' | J_q^{(1)} | j, m \rangle$ dove \mathbf{J} è il momento angolare. Entrambi questi elementi di matrice sono infatti proporzionali allo stesso coefficiente di Clebsch-Gordan con un coefficiente di proporzionalità indipendente da m . Poichè la relazione Eq. (5.16) tra le componenti vettoriali e sferiche di un vettore è lineare, segue che anche gli elementi di matrice delle componenti cartesiane sono proporzionali quindi

$$\langle j, m' | \mathbf{V} | j, m \rangle = c_v \langle j, m' | \mathbf{J} | j, m \rangle. \quad (5.63)$$

Moltiplicando questa equazione per $\langle j, m | \mathbf{J} | j, m' \rangle$, sommando su m ed usando il fatto che la somma su m a j fisso $\sum_m |j, m\rangle \langle j, m|$ è la matrice identica nel sottospazio a j fisso, si ottiene

$$\langle j, m' | \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} | j, m' \rangle = c_v \langle j, m' | \mathbf{J}^2 | j, m' \rangle = c_v j(j+1), \quad (5.64)$$

quindi

$$c_v = \frac{\langle j, m' | \mathbf{V} \cdot \mathbf{J} | j, m' \rangle}{j(j+1)} \quad (5.65)$$

ed il teorema della proiezione è dimostrato.

Un ragionamento del tutto analogo si può estendere anche al caso di tensori irriducibili di rango più elevato. Supponiamo ad esempio di considerare il tensore sferico $T^{(k)}$. Usando la procedura descritta in Sez. (5.1) si può costruire tramite le armoniche solide un tensore sferico $J^{(k)}$ a partire dal vettore momento angolare; dal teorema di Wigner-Eckart segue allora che in un sottospazio a j fisso si ha

$$\langle j, m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = c_T \langle j, m' | J_q^{(k)} | j, m \rangle \quad (5.66)$$

e procedendo in modo identico a come fatto prima si può ad esempio ottenere

$$c_T = \frac{\langle j, m' | \sum_q (-1)^{k-q} T_q^{(k)} J_{-q}^{(k)} | j, m' \rangle}{\langle j, m' | \sum_q (-1)^{k-q} J_q^{(k)} J_{-q}^{(k)} | j, m' \rangle}. \quad (5.67)$$

5.2.5 Wigner-Eckart per l'hermitiano coniugato

Il teorema di Wigner-Eckart è stato scritto nella forma

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = \langle J(k, j, j', m') | M(k, q, j, m) \rangle \frac{\langle j' || T^{(k)} || j \rangle}{\sqrt{2j'+1}} \quad (5.68)$$

in cui si è fattorizzato a denominatore un $\sqrt{2j'+1}$. Questa convenzione permette di semplificare la relazione tra gli elementi di matrice di T e quelli di T^\dagger definito da Eq. (5.26). Si ha infatti

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = \langle j, m | (T_q^{(k)})^\dagger | j', m' \rangle^* = \langle j, m | (-1)^{q+k} (T_{-q}^\dagger)^{(k)} | j', m' \rangle^* \quad (5.69)$$

e quindi riusando il teorema di Wigner-Eckart

$$\langle j', m' | T_q^{(k)} | j, m \rangle = (-1)^{q+k} \frac{\langle j || (T^\dagger)^{(k)} || j' \rangle^*}{\sqrt{2j+1}} \langle J(k, j', j, m) | M(k, -q, j', m') \rangle . \quad (5.70)$$

Usando le simmetrie Eq. (4.77) e Eq. (4.79) dei coefficienti di Clebsch-Gordan si ha ora

$$\begin{aligned} \langle J(k, j, j', m') | M(k, q, j, m) \rangle &= (-1)^{k+j-j'} \langle J(j, k, j', m') | M(j, m, k, q) \rangle = \\ &= (-1)^{k+j-j'} (-1)^{k+q} \sqrt{\frac{2j'+1}{2j+1}} \langle J(k, j', j, m) | M(k, -q, j', m') \rangle \end{aligned} \quad (5.71)$$

che sostituito nella prima forma del teorema di Wigner-Eckart porta, per confronto con la seconda forma, alla conclusione

$$\langle j' || T^{(k)} || j \rangle = (-1)^{k+j-j'} \langle j || (T^\dagger)^{(k)} || j' \rangle^* . \quad (5.72)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] A. R. Edmonds *Angular Momentum in Quantum Mechanics* Princeton University Press (1957).
- [2] J. R. Klauder, E. C. G. Sudarshan *Fundamentals of quantum optics* Dover Publications (2006).
- [3] L. D. Landau, E. M. Lifshits *Meccanica quantistica. Teoria non relativistica* Editori Riuniti (2003).
- [4] J. J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics* Addison-Wesley (1994).
- [5] J. Schwinger *On Angular Momentum* Dover Publications (2015).
- [6] S. L. Sobolev *Partial Differential Equations of Mathematical Physics* Dover Publications (1989).
- [7] W.-K. Tung *Group theory in physics* World Scientific Publishing (1985).
- [8] H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* Dover Publications (1950).
- [9] R. M. Wilcox “Exponential Operators and Parameter Differentiation in Quantum Physics”
J. Math. Phys. **8**, 962 (1976).