

Alcune note per Fisica 3

Claudio Bonati

31 gennaio 2024

Indice

1	Complementi sulla geometria della relatività ristretta	3
1.1	Introduzione al concetto di tensore	3
1.2	Il caso della metrica lorentziana	5
2	Formulazione covariante dell'elettromagnetismo	9
2.1	Le equazioni fondamentali	9
2.2	Invarianza di gauge	12
2.3	Trasformazioni di Lorentz ed invarianti del campo elettromagnetico	13
2.4	Formalismo lagrangiano per il campo elettromagnetico	16
2.5	Equazioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico	19
2.6	Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico	19
3	Campo generato da cariche in moto	23
3.1	Il campo generato da una carica in moto rettilineo uniforme	23
3.2	I potenziali ritardati	24
3.3	I potenziali e i campi di Lienard-Wiechert	27
3.4	La potenza irraggiata	31
3.5	Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (1)	33
3.6	Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (2)	36
3.7	Il caso della accelerazione lineare ed il moto circolare uniforme	38
4	Reazione di radiazione	43
4.1	Argomento euristico non relativistico	43
4.2	Generalizzazione relativistica	43
4.3	Limite puntiforme di una carica estesa (Abraham-Lorentz)	45
4.4	Problemi e limiti della formulazione	46
5	Argomenti scelti di teoria della diffrazione	49
5.1	Richiami di radiazione di dipolo elettrico	49
5.2	Polarizzabilità di uno schermo opaco	51
5.3	Diffrazione da una apertura	53
5.4	Diffrazione da un ostacolo e teorema ottico	55
5.5	Diffrazione da un insieme discreto di punti e fattore di forma	59
5.5.1	Caso di un gas	60
5.5.2	Caso di un cristallo	61
5.6	Oltre la approssimazione di Born: la rifrazione	63
6	Interazione dei fotoni con la materia	67
6.1	Scattering Thompson	68
6.2	Scattering Rayleigh	72
6.3	Scattering Compton e produzione di coppie (considerazioni cinematiche)	75

7	Richiami e complementi di cinematica relativistica	77
7.1	Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$	77
7.2	La relazione $p_a p_b \geq m_a m_b$	79
7.3	Scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$	80
7.4	Invarianti cinematici del processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$	83
7.5	Trasformazione delle funzioni di distribuzione	88
7.6	Probabilità di transizione e spazio delle fasi	89
7.7	Spazio delle fasi a 2 e 3 corpi	92
7.8	Sezione d'urto in un generico sistema di riferimento	94
8	Radiazione Cherenkov	97
8.1	Richiami di elettromagnetismo nei mezzi	97
8.2	Il caso senza dispersione	100
8.3	Deduzione della formula di Frank-Tamm	103
8.4	Deduzione alla Fermi della formula di Frank-Tamm	105
9	Perdita di energia di particelle cariche nell'attraversamento della materia	109
9.1	La sezione d'urto Rutherford	109
9.2	Radiazione di frenamento (Bremsstrahlung)	110
9.2.1	Il caso non relativistico	111
9.2.2	Il caso relativistico	113
9.2.3	Emissione di radiazione elettromagnetica nei decadimenti β	115
9.3	Perdita di energia per collisioni	116
9.4	Scattering coulombiano multiplo	120
A	Appendici	125
A.1	Convenzioni	125
A.2	Alcune proprietà del tensore completamente antisimmetrico	126
A.3	Sistemi di unità di misura: SI e Gauss	127
A.4	Alcuni integrali singolari	129
A.5	Radiazione di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico	131
A.6	Gli integrali di Fresnel	133
A.7	Gli sviluppi asintotici degli integrali \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1	135
	Bibliografia	139

1 Complementi sulla geometria della relatività ristretta

In questa sezione si esporranno le idee di base del calcolo tensoriale, con particolare riguardo agli aspetti utili nello studio della relatività ristretta. Come referenze generali si possono vedere [1] §2.5 e [2] §16-19, le proprietà principali del gruppo di Lorentz sono discusse più o meno in ogni libro di teoria quantistica dei campi. Useremo $c = 1$ per semplicità di notazione, che è dal punto di vista pratico equivalente ad introdurre la variabile $x^0 = ct$ ed usare la variabile spaziale x^0 per misurare i tempi.

1.1 Introduzione al concetto di tensore

L'idea di base di tutto quanto segue sarà di cercare di distinguere le entità astratte (scalari, vettori, tensori), che rappresentano le quantità fisiche e sono indipendenti dal sistema di coordinate utilizzato, dalle loro componenti, che invece dipendono dal sistema usato, creando un formalismo (indici in alto, indici in basso) che renda algoritmiche il tipo di considerazioni che saranno svolte.

Un vettore p è una entità geometrica che, una volta fissata una base \vec{e}_μ si può scrivere come $p = p^\mu \vec{e}_\mu$. Se si effettua un cambio di coordinate $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ e denotiamo lo Jacobiano della trasformazione con

$$R^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \quad (1.1)$$

allora le componenti del vettore trasformano secondo la legge (trasformazione controvariante)

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = R^\mu{}_\nu p^\nu. \quad (1.2)$$

La motivazione di questa definizione è che si assume che gli spostamenti infinitesimi siano vettori e si ha $dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$. D'altra parte il vettore è sempre lo stesso nei due sistemi di coordinate, quindi $p = p^\mu \vec{e}_\mu = p'^\mu \vec{e}'_\mu$ e si deve avere

$$p^\alpha \vec{e}_\alpha = p'^\mu \vec{e}'_\mu = R^\mu{}_\alpha p^\alpha \vec{e}'_\mu \quad (1.3)$$

e poichè questa relazione deve essere soddisfatta per ogni vettore, cioè per ogni valore numerico assegnato alle componenti p^α , si ha (legge di trasformazione covariante)

$$\vec{e}_\mu \rightarrow \vec{e}'_\mu = (R^{-1})^\nu{}_\mu \vec{e}_\nu, \quad (1.4)$$

dove ovviamente si è usato

$$R^\mu{}_\alpha (R^{-1})^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu = (R^{-1})^\mu{}_\alpha R^\alpha{}_\nu. \quad (1.5)$$

Passiamo ora ad analizzare una forma lineare (o covettore), cioè una applicazione lineare dello spazio vettoriale nell'asse reale $q : V \rightarrow \mathbb{R}$. In coordinate si ha

$$q(p) = q(p^\mu \vec{e}_\mu) = p^\mu q(\vec{e}_\mu) \equiv p^\mu q_\mu. \quad (1.6)$$

Per determinare la regola di trasformazione dei coefficienti q_μ si può ragionare analogamente a come fatto in precedenza, imponendo l'invarianza di $q(p)$ sotto cambi di coordinate, o usare direttamente Eq. (1.4) e la linearità; il risultato che si ottiene è

$$q_\mu \rightarrow q'_\mu = (R^{-1})^\nu{}_\mu q_\nu \quad (1.7)$$

Consideriamo ora il caso che esista un prodotto scalare $(\cdot, \cdot) : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ (non degenerare ma non necessariamente definito positivo). In coordinate si ha allora

$$(p, s) = (p^\mu \vec{e}_\mu, s^\nu \vec{e}_\nu) = p^\mu s^\nu (\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) \equiv p^\mu s^\nu g_{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

Di nuovo la legge di trasformazione dei coefficienti $g_{\mu\nu}$ deve essere tale che (p, s) sia invariante, da cui si deduce

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = (R^{-1})^\alpha{}_\mu (R^{-1})^\beta{}_\nu g_{\alpha\beta} \quad (1.9)$$

cioè ogni indice in basso trasforma separatamente come un l'indice di un covettore. D'altra parte esiste un secondo modo di pensare il prodotto scalare: (p, s) è una forma lineare nel vettore p , quindi si può scrivere

$$(p, s) \equiv s(p) = s_\mu p^\mu . \quad (1.10)$$

Dal confronto con Eq. (1.8) si deduce che $s_\mu = g_{\mu\nu} s^\nu$ ed è un semplice esercizio verificare che entrambi i membri di questa relazione trasformano nello stesso modo sotto trasformazione di coordinate. Questo è un caso particolare di una relazione generale che sarà analizzata tra breve.

Si può ora considerare la matrice inversa di $g_{\mu\nu}$, che sarà indicata con $g^{\mu\nu}$ ed è definita da

$$g_{\nu\rho} g^{\rho\mu} = \delta_\nu^\mu = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} . \quad (1.11)$$

Richiedendo che $g'^{\mu\nu}$ sia la matrice inversa di $g'_{\mu\nu}$ si ottiene

$$\delta_\mu^\rho = g'_{\mu\nu} g'^{\nu\rho} = (R^{-1})^\alpha_\mu (R^{-1})^\beta_\nu g_{\alpha\beta} g'^{\nu\rho} \quad (1.12)$$

e quindi

$$g^{\mu\nu} \rightarrow g'^{\mu\nu} = R^\mu_\alpha R^\nu_\beta g^{\alpha\beta} , \quad (1.13)$$

cioè ogni indice in alto trasforma separatamente come un indice di un vettore.

In generale si definiscono componenti di un tensore di rango (n, m) un insieme di oggetti con n indici in alto ed m in basso, che trasforma secondo la regola

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} = R^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots R^{\mu_n}_{\alpha_n} (R^{-1})^{\beta_1}_{\nu_1} \dots (R^{-1})^{\beta_m}_{\nu_m} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_m} \quad (1.14)$$

quindi in particolare uno scalare (invariante) è un tensore di tipo $(0, 0)$, le componenti di vettore formano un tensore di tipo $(1, 0)$, le componenti di un covettore formano un tensore di tipo $(0, 1)$, le componenti della matrice $g_{\mu\nu}$ formano un tensore di tipo $(0, 2)$ ed infine le componenti della matrice $g^{\mu\nu}$ formano un tensore di tipo $(2, 0)$. È inoltre facile vedere che δ^α_β è un tensore di tipo $(1, 1)$ invariante:

$$\delta^\mu_\nu \rightarrow \delta'^\mu_\nu = R^\mu_\alpha (R^{-1})^\beta_\nu \delta^\alpha_\beta = R^\mu_\alpha (R^{-1})^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu . \quad (1.15)$$

È semplice verificare che le seguenti operazioni possono essere utilizzate per produrre nuovi tensori da tensori noti: il prodotto diretto $(n, m) \otimes (n', m') \rightarrow (n + n', m + m')$:

$$R^{\mu_1 \dots \mu_{n+n'}}_{\nu_1 \dots \nu_{m+m'}} \equiv T^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_m} S^{\mu_{n+1} \dots \mu_{n+n'}}_{\nu_{m+1} \dots \nu_{m+m'}} \quad (1.16)$$

e la contrazione $(n, m) \rightarrow (n - 1, m - 1)$:

$$R^{\mu_2 \dots \mu_n}_{\nu_2 \dots \nu_m} \equiv T^{\alpha \mu_2 \dots \mu_n}_{\alpha \nu_2 \dots \nu_m} . \quad (1.17)$$

Notiamo esplicitamente che l'operazione di contrazione degli indici è ben definita dal punto di vista tensoriale solo quando si contrae un indice covariante con uno controvariante. La contrazione, ad esempio, di due indici controvarianti in un tensore (n, m) non produce un tensore $(n - 2, m)$. Un caso particolare della combinazione di queste due operazioni è stato visto in precedenza: $s_\mu = g_{\mu\nu} s^\nu$. In modo analogo si possono alzare/abbassare indici in modo standard usando $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$. Da un punto di vista formale si stà usando una metrica non degenera per costruire un isomorfismo dello spazio vettoriale nel suo duale.

Fino ad ora non si è fatta nessuna assunzione sul tipo particolare di cambio di coordinate e proseguendo su questa strada si arriverebbe alla geometria differenziale e, dal punto di vista fisico, alla relatività generale. La difficoltà risiede nella legge di trasformazione delle derivate: è semplice vedere che ∂_μ trasforma come un covettore (basta usare la derivazione a catena), però per generiche trasformazioni di coordinate $\partial_\mu \partial_\nu$ non trasforma come un tensore covariante a due indici. Identifichiamo quindi alcuni particolari tipi di cambi di coordinate per cui le cose funzionano bene, che possono essere poi identificati con i cambi di sistemi di riferimento inerziali. L'assunzione che si richiederà è che le trasformazioni lascino invariata la forma della metrica, ovvero che siano isometrie dello spazio-tempo.

Se la metrica di partenza è quella euclidea, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, +1, +1, +1)$, le isometrie sono identificate dalla relazione $R^t R = I$, ovvero $R^t = R^{-1}$, quindi $(R^{-1})^\alpha_\beta = (R^t)^\alpha_\beta = R^\beta_\alpha$. Di conseguenza la legge di trasformazione degli indici controvarianti è la stessa degli indici covarianti: questo è il motivo per cui per i tensori euclidei non si distingue tra indici in alto ed indici in basso.

1.2 Il caso della metrica lorentziana

Se indichiamo ora con Λ la matrice di trasformazione R della sezione precedente (quindi $p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} p^{\nu}$), allora il gruppo delle isometrie della metrica pseudo-euclidea $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, comunemente indicato con la notazione $O(1, 3)$, corrisponde alle trasformazioni che lasciano la metrica invariata. Se la metrica rimane invariata anche la sua inversa rimane invariata, quindi si ha

$$\eta^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\beta} , \quad (1.18)$$

che si può riscrivere come $\eta^{-1} = \Lambda \eta^{-1} \Lambda^t$. Considerando l'inversa di questa equazione (nota che prendendo il trasposto di $\Lambda \Lambda^{-1} = 1$ si vede che $(\Lambda^t)^{-1} = (\Lambda^{-1})^t$) si trova $\eta = (\Lambda^{-1})^t \eta \Lambda^{-1}$, che non è altro che la legge di trasformazione della metrica con gli indici in basso:

$$\eta_{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\mu} \eta_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\nu} . \quad (1.19)$$

Moltiplicando a sinistra $\eta = (\Lambda^{-1})^t \eta \Lambda^{-1}$ per Λ^t e a destra per Λ si trova $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$, da cui si vede che se Λ è una isometria allora anche Λ^{-1} è una isometria. È inoltre immediato verificare che la composizione di due isometrie è ancora una isometria, da cui segue che il gruppo delle isometrie è effettivamente un gruppo.

Le componenti della matrice inversa Λ^{-1} possono essere ottenute da $\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^t \eta$, che in componenti assume la forma

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha} (\Lambda^t)_{\beta}^{\alpha} \eta_{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha} \Lambda^{\beta}_{\alpha} \eta_{\beta\nu} . \quad (1.20)$$

Vista la forma di questa equazione è talora usata per gli elementi della matrice $(\Lambda^{-1})^{\mu}_{\nu}$ la notazione Λ_{ν}^{μ} che non sarà però usata nel seguito per evitare di confondersi con le posizioni degli indici.

Prendendo il determinante dell'equazione $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ si ottiene subito $\det \Lambda = \pm 1$, inoltre, considerando la componente 00 dell'equazione definente, si ha

$$1 = \eta_{00} = \Lambda^{\mu}_0 \Lambda^{\nu}_0 \eta_{\mu\nu} = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 \quad (1.21)$$

e quindi

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + (\Lambda^i_0)^2 \geq 1 . \quad (1.22)$$

Esistono quindi almeno quattro componenti connesse del gruppo di Lorentz, che sono associate ai valori $\det \Lambda = \pm 1$ e $\Lambda^0_0 \leq 0$. La componente con determinante positivo ed ortocrona ($\Lambda^0_0 > 0$) è comunemente denominata gruppo di Lorentz proprio, le altre componenti connesse si ottengono componendo una trasformazione di Lorentz propria con la trasformazione di parità ($\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$) e/o l'operazione di inversione temporale $t \rightarrow -t$ (per una dimostrazione del fatto che queste componenti sono effettivamente connesse vedi ad es. [3] §2.1).

Una proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz (più in generale delle isometrie) è che sono lineari. Si può infatti mostrare che le uniche trasformazioni non singolari, derivabili almeno due volte ed il cui Jacobiano lascia la metrica di Lorentz invariata sono trasformazioni lineari. Questo risolve il problema notato alla fine della sezione precedente sulla non covarianza delle derivate seconde.

Per mostrare la linearità delle isometrie si può procedere come segue: derivando la relazione

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \quad (1.23)$$

rispetto a x^{ρ} si ottiene

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \quad (1.24)$$

e sommando a questa espressione quella ottenuta scambiando $\mu \leftrightarrow \rho$ e sottraendo quella ottenuta scambiando $\rho \leftrightarrow \nu$ si ottiene (usando il fatto che $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$)

$$\begin{aligned} 0 = & \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} - \\ & - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

e poichè il prodotto scalare è non degenere e per ipotesi la trasformazione è non singolare, si ottiene

$$\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} = 0 . \quad (1.26)$$

Si è visto in Sez. (1.1) che δ_ν^μ è un tensore invariante per generiche trasformazioni di coordinate, ovvero le sue componenti hanno gli stessi valori indipendentemente dalle coordinate usate. Se ci si limita alle trasformazioni di Lorentz anche $\eta_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu}$ sono invarianti per costruzione. Se ci si restringe a considerare il gruppo di Lorentz proprio (o, nel caso euclideo, $SO(4)$ o in tre dimensioni $SO(3)$), esiste un altro tensore invariante oltre a questi ed è il tensore completamente antisimmetrico (tensore di Levi-Civita) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, definito da

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{per permutazioni pari di } 1234 \\ -1 & \text{per permutazioni dispari di } 1234 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} . \quad (1.27)$$

Si ha infatti

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (1.28)$$

e l'espressione a secondo membro è chiaramente completamente antisimmetrica in $\mu\nu\rho\sigma$ (ad esempio scambiare $\mu \leftrightarrow \nu$ è equivalente a scambiare $\alpha \leftrightarrow \beta$, quindi si prende un segno meno a causa di $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$). Utilizzando questo fatto si può quindi scrivere

$$\Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta \Lambda^3_\gamma \Lambda^4_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Lambda = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} , \quad (1.29)$$

dove si è usata l'espressione $\det M = \sum_{\text{perm}} (-1)^\sigma M^1_{\sigma(1)} \cdots M^n_{\sigma(n)}$ per il determinante di una matrice $n \times n$. Abbassando gli indici si ottiene analogamente

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\eta) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} , \quad (1.30)$$

che è di nuovo un tensore invariante. Nel caso tridimensionale, in cui il gruppo di invarianza è $SO(3)$, il corrispondente tensore invariante è ϵ^{ijk} . Se non ci si limita alle trasformazioni di Lorentz si vede in modo analogo che il tensore $\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è invariante per le trasformazioni aventi Jacobiano positivo, dove g è la metrica.

Notiamo a questo punto che la proprietà di simmetria o antisimmetria per scambio di due indici (entrambi covarianti o entrambi controvarianti) è una proprietà intrinseca di un tensore, ovvero è conservata nei cambi di riferimento: se ad esempio $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, allora si ha

$$A'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu A^{\mu\nu} = \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\alpha_\mu A^{\nu\mu} = A'^{\beta\alpha} . \quad (1.31)$$

Usando le proprietà di simmetria/antisimmetria degli indici, si possono ottenere delle relazioni tra tensori apparentemente diversi. Consideriamo ad esempio il caso di un tensore a due indici antisimmetrico in tre dimensioni (ad esempio $M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$), un tale tensore ha 3 componenti indipendenti, cioè le stesse di un vettore, quindi non è sorprendente che possa essere riscritto in una forma "vettoriale". Per fare ciò basta considerare la sua contrazione con un tensore completamente antisimmetrico

$$v^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} M_{ij} , \quad (1.32)$$

(il fattore $1/2$ è convenzionale, per fare in modo che in questo caso specifico si ottenga $\vec{v} = \vec{x} \times \vec{p}$). È importante notare che, a causa delle proprietà di ϵ^{kij} , entrambi i membri di questa relazione trasformano nello stesso modo *solo se* la trasformazione di cambio di coordinate ha determinante $+1$. Il vettore v^k è cioè uno pseudo-vettore, che trasforma correttamente se $\det \Lambda = +1$ ma con un segno sbagliato se $\det \Lambda = -1$. Nel caso generale di uno spazio D -dimensionale, usando il tensore di Levi-Civita si può costruire in modo analogo il duale di un tensore completamente antisimmetrico di tipo $(0, n)$ (con $n \leq D$), ottenendo l'isomorfismo

$$\text{antisym}(0, n) \simeq \text{antisym}(D - n, 0) ; \quad (1.33)$$

il tensore duale di T è spesso indicato con le notazioni $\star T$ o \tilde{T} .

Consideriamo infine la trasformazione delle derivate parziali $\partial/\partial x^\mu$: usando la chain rule si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.34)$$

quindi le derivate rispetto alle coordinate trasformano in modo covariante, cioè $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$. Poichè Λ è una matrice costante, le regole di trasformazione degli operatori differenziali di grado più elevato seguono da quanto si è visto: ad esempio $\partial_\mu \partial_\nu$ è un tensore simmetrico di tipo (0,2). In generale le derivate rispetto ad osservabili controvarianti risultano covarianti e viceversa. Da ciò segue che un po' di attenzione ai segni è necessaria nel formalismo lagrangiano, in quanto i momenti coniugati sono "naturalmente" covarianti

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (1.35)$$

mentre normalmente gli impulsi vengono pensati come vettori controvarianti. Il vettore impulso è in realtà $p^\mu = \eta^{\mu\nu} p_\nu$.

Tutto questo formalismo può essere usato per scrivere le equazioni differenziali della fisica in un modo che ne renda manifeste le regole di trasformazione ed in particolare il fatto che la loro validità non dipende dal sistema di riferimento usato; una tale proprietà si chiama covarianza delle equazioni. Consideriamo ad esempio l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 . \quad (1.36)$$

Risulta quindi naturale introdurre la quadricorrente $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ (ricordiamo che $x^0 = ct$) e riscrivere l'equazione di continuità nella forma $\partial_\mu j^\mu = 0$, quindi dal fatto che questa relazione deve essere vera in ogni sistema di coordinate segue che j^μ debba trasformare come un quadrivettore.

2 Formulazione covariante dell'elettromagnetismo

2.1 Le equazioni fondamentali

Per studiare la formulazione covariante dell'elettromagnetismo è concettualmente conveniente usare il sistema di unità di Gauss, in quanto il risultato finale sarà che il campo elettrico ed il campo magnetico sono due componenti di una stessa entità più generale e nel Sistema Internazionale il campo elettrico ed il campo magnetico hanno unità di misura diverse. Dal punto di vista pratico si evita di appesantire le equazioni con i fattori dimensionati ϵ_0 e μ_0 ; per i fattori di conversione Gauss \leftrightarrow SI vedi Sez. (A.3).

Indicando con ρ la densità di carica e con \vec{j} la densità di corrente, le equazioni di Maxwell nel sistema di unità di Gauss si scrivono come:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0;\end{aligned}\tag{2.1}$$

mentre la forza di Lorentz assume la forma

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).\tag{2.2}$$

A causa della assenza di monopoli magnetici si può introdurre il potenziale vettore \vec{A} , legato al campo magnetico da $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$; la legge di Faraday si può allora scrivere nella forma

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0\tag{2.3}$$

e quindi si può introdurre il potenziale scalare ϕ , tramite il quale il campo elettrico si può scrivere nella forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\tag{2.4}$$

Con l'introduzione dei potenziali scalare e vettore le due equazioni di Maxwell omogenee sono automaticamente soddisfatte e le non omogenee si scrivono nella forma

$$\begin{aligned}-\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Per iniziare la conversione dal formalismo tridimensionale a quello quadridimensionale è conveniente partire dalla versione quadridimensionale della densità di corrente, la quadricorrente

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}).\tag{2.6}$$

Per verificare che j^μ trasforma effettivamente come un vettore controvariante ci sono diverse strade: si può ad esempio partire dal fatto sperimentale che la carica elettrica è un invariante di Lorentz, quindi $\rho dV = \rho' dV'$, d'altra parte anche l'elemento di volume quadridimensionale è un invariante di Lorentz (poichè si ha $d^4x = |\det \Lambda| d^4x' = d^4x'$), quindi $dt dV = dt' dV'$ e introducendo il tempo proprio di una particella $d\tau$ (che è invariante per costruzione) si ha quindi che $\rho \frac{d\tau}{dt}$ è un invariante:

$$\rho' \frac{d\tau}{dt'} = \rho \frac{dV d\tau}{dV' dt'} = \rho \frac{dV d\tau}{dV dt} = \rho \frac{d\tau}{dt}\tag{2.7}$$

da cui si ottiene $\rho = \rho_0 \frac{dt}{d\tau}$, dove si è introdotta la densità di carica ρ_0 nel sistema di riferimento in cui non c'è corrente (in contesti idrodinamici chiamato riferimento di Eckart). Per quanto riguarda le componenti spaziali si ha

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = \rho \frac{d\vec{x}}{dt} = \rho \frac{d\tau}{dt} \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \rho_0 \frac{d\vec{x}}{d\tau}, \quad (2.8)$$

dove si è nuovamente usato $\rho_0 = \rho \frac{d\tau}{dt}$. Da questa equazione segue quindi che $(c\rho, \vec{j}) = \rho_0 u^\mu$, dove $u^\mu = (c\gamma, \gamma\vec{v})$ è la quadrivelocità, e poichè ρ_0 è un invariante $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ è effettivamente un quadrivettore controvariante. Un modo più formale ma più diretto di mostrare che j^μ è un quadrivettore controvariante è il seguente: l'equazione di continuità $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ si può scrivere nella forma $\partial_\mu j^\mu = 0$ ed affinché questa equazione sia valida in tutti i sistemi di riferimento (ovvero affinché la carica sia conservata in tutti i sistemi di riferimento) j^μ deve essere un quadrivettore controvariante.

A questo punto introduciamo il quadripotenziale

$$A^\mu = (\phi, \vec{A}), \quad (2.9)$$

che si mostrerà a breve essere un vettore controvariante. Tramite A^μ le equazioni di Maxwell non omogenee Eq. (2.5) si possono scrivere nella forma

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad (2.10)$$

come si vede facilmente usando

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}. \quad (2.11)$$

Dalla richiesta che l'equazione Eq. (2.10) sia valida in ogni sistema di riferimento segue allora che A^μ trasforma effettivamente come un quadrivettore controvariante.

Si è appena visto che A^μ è la generalizzazione covariante del potenziale scalare e vettore; si pone ora il problema di trovare la generalizzazione covariante dei campi elettrico e magnetico. A questo proposito si introduce il tensore di campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.12)$$

che è ovviamente un tensore di tipo (2, 0) antisimmetrico. Il tensore $F_{\mu\nu}$ può essere costruito abbassando gli indici di $F^{\mu\nu}$ con il tensore metrico e si ottiene $F_{0i} = -F^{0i}$, $F_{ij} = F^{ij}$. Esplicitamente si ha (usando $\partial^i = -\partial_i$)

$$\begin{aligned} F^{0i} &= \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + (\vec{\nabla} \phi)^i = -E_i \\ F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i = (\delta_m^i \delta_n^j - \delta_m^j \delta_n^i) \partial^m A^n = \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} \partial^m A^n = \\ &= -\epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k = -\epsilon^{ijk} B_k. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Notiamo che, una volta passati alla scrittura "tridimensionale" in modo coerente, non ha più senso distinguere indici alti da indici bassi. Si ha quindi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

In generale ad ogni tensore antisimmetrico quadridimensionale di rango 2 si possono associare in modo analogo un vettore polare (corrispondente al campo elettrico) ed un vettore assiale (corrispondente al campo magnetico) e risulta conveniente introdurre una notazione che renda esplicita

questa associazione: nel caso specifico $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$ e $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$. Le relazioni inverse delle Eq. (2.13) sono ovviamente

$$\begin{aligned} E_i &= -F^{0i} = F_{0i} \\ B_i &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e le equazioni di Maxwell non omogenee Eq. (2.10) possono naturalmente essere riscritte in termini del tensore di campo come

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu . \quad (2.16)$$

L'equazione di continuità si ottiene immediatamente da questa equazione in quanto

$$\partial_\nu j^\nu \propto \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.17)$$

in cui l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $F^{\mu\nu}$ è antisimmetrico mentre $\partial_\mu \partial_\nu$ è simmetrico.

Per esprimere le equazioni di Maxwell omogenee in termini del tensore di campo è conveniente introdurre il tensore duale, definito da

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (2.18)$$

che è legato ai campi elettrico e magnetico da

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E}), \quad \tilde{F}_{\mu\nu} = (\vec{B}, -\vec{E}) . \quad (2.19)$$

Utilizzando $\tilde{F}^{\mu\nu}$ le equazioni omogenee possono infatti essere riscritte nella forma

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 , \quad (2.20)$$

visto che

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \partial_i \tilde{F}^{i0} = +\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu j} &= -\partial_0 B_j + \partial_i \tilde{F}^{ij} = -\partial_0 B_j + \partial_i (\epsilon^{ijk} E_k) = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_j}{\partial t} - (\vec{\nabla} \times \vec{E})_j . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nel caso tridimensionale le equazioni di Maxwell omogenee possono essere interpretate come delle condizioni di integrabilità necessarie per poter introdurre i potenziali scalare e vettore. Questo resta vero anche nel caso quadridimensionale: la condizione Eq. (2.20) è infatti la condizione necessaria (e sufficiente in uno spazio semplicemente connesso) affinché si possa scrivere il campo $F^{\mu\nu}$ nella forma Eq. (2.12). Un indizio in proposito è dato dal fatto che se usiamo la forma Eq. (2.12) allora l'equazione Eq. (2.20) risulta automaticamente soddisfatta:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0 , \quad (2.22)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\partial_\mu \partial_\rho$ è simmetrico per scambio di $\mu \leftrightarrow \rho$, mentre $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è antisimmetrico.

L'equazione Eq. (2.20) può essere riscritte in termini di $F^{\mu\nu}$ procedendo come segue

$$0 = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{6}\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} (\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho}) , \quad (2.23)$$

dove nell'ultimo passaggio si è riscritta la somma sugli indici muti in tre modi diversi, e si è usata la antisimmetria del tensore di Levi-Civita. È immediato verificare che la combinazione che compare tra parentesi è completamente antisimmetrica per scambio degli indici μ, ρ, σ , quindi affinché la contrazione con $\epsilon^{\nu\mu\rho\sigma}$ si annulli è necessario che essa stessa si annulli. Si ottiene quindi una forma equivalente della Eq. (2.20) scritta in termini del tensore di campo invece che del suo duale:

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0 . \quad (2.24)$$

2.2 Invarianza di gauge

Nel formalismo tridimensionale i campi elettrico e magnetico non determinano univocamente i potenziali scalare e vettoriale. Analogamente il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ non determina univocamente il quadripotenziale A_μ : è infatti immediato verificare che la trasformazione

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu f, \quad (2.25)$$

dove f è una generica funzione della posizione, lascia invariato il tensore di campo. Questa proprietà è nota come invarianza di gauge dell'elettromagnetismo e la trasformazione Eq. (2.25) è chiamata trasformazione di gauge. Scritta in notazione tridimensionale Eq. (2.25) diventa le usuali

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f. \quad (2.26)$$

Si vedrà più avanti che questa invarianza è associata alla conservazione della carica.

La ridondanza associata all'invarianza di gauge può essere usata per imporre ulteriori vincoli alle equazioni, rendendole più semplici. Supponiamo di partire da un dato quadripotenziale $A_{(0)}^\mu$ e scegliamo ad esempio di effettuare una trasformazione di gauge con una funzione f che soddisfi $\partial_\mu \partial^\mu f = \partial_\nu A_{(0)}^\nu$, Allora si vede subito che $A^\mu = A_{(0)}^\mu - \partial^\mu f$ soddisfa la condizione

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.27)$$

che è nota come gauge di Lorenz. Questa condizione non fissa ancora univocamente il quadripotenziale, in quanto la condizione di Lorenz è invariante per trasformazioni di gauge che soddisfino l'equazione $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$. Nella gauge di Lorenz le equazioni di Maxwell non-omogenee assumono una forma particolarmente trasparente: si ha infatti $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$ e quindi l'equazione Eq. (2.16) si riduce nella gauge di Lorenz a delle equazioni d'onda:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu. \quad (2.28)$$

Nel vuoto la componente A^0 del quadripotenziale nella gauge di Lorenz soddisfa quindi $\partial_\mu \partial^\mu A^0 = 0$ e si può usare la libertà di gauge residua per fissare $A^0 = 0$ e quindi la condizione di Lorenz si può ridurre nel vuoto a $A^0 = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Per verificare che questo sia effettivamente possibile supponiamo che il quadripotenziale $A_{(1)}^\mu$ soddisfi l'equazione d'onda $\partial_\nu \partial^\nu A_{(1)}^\mu = 0$ e l'equazione della gauge di Lorenz $\partial_\mu A_{(1)}^\mu = 0$ e costruiamo il nuovo quadripotenziale $A_{(2)}^\mu = A_{(1)}^\mu - \partial^\mu g$, dove

$$g(t, \vec{r}) = \int_0^t A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' + h(\vec{r}) \quad (2.29)$$

e $h(\vec{r})$ è una funzione da determinare. È immediato verificare che si ha $A_{(2)}^0(t, \vec{r}) = 0$, inoltre si ha

$$\partial_\mu \partial^\mu g = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) g(t, \vec{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(t, \vec{r}) - \int_0^t \nabla^2 A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' - \nabla^2 h(\vec{r}) = \quad (2.30)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(t, \vec{r}) - \int_0^t \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} A_{(1)}^0(t', \vec{r}) dt' - \nabla^2 h(\vec{r}) = \quad (2.31)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_{(1)}^0(0, \vec{r}) - \nabla^2 h(\vec{r}), \quad (2.32)$$

quindi si può scegliere $h(\vec{r})$ tale che $\partial_\mu \partial^\mu g = 0$, ottenendo $\partial_\mu A_{(2)}^\mu = 0$ e $\partial^\nu \partial_\nu A_{(2)}^\mu = 0$.

La scelta di gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ è invece nota come gauge di Coulomb o trasversa e si può ottenere partendo da un quadripotenziale generico $A_{(0)}^\mu$ utilizzando la trasformazione di gauge associata ad

una funzione f che soddisfa $\nabla^2 f = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{(0)}$. Nella gauge di Coulomb le equazioni Eq. (2.5) assumono la forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

quindi il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson come nel caso elettrostatico, mentre il potenziale vettore soddisfa una equazione d'onda con una corrente modificata. Per chiarire il significato di questa corrente modificata, è conveniente scrivere la corrente \vec{j} nella forma $\vec{j} = \vec{j}_L + \vec{j}_T$, con $\vec{\nabla} \times \vec{j}_L = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T = 0$ (per le espressioni esplicite di \vec{j}_L e \vec{j}_T vedi ad es. [4] §6.3). Scomponendo anche il campo elettrico e magnetico in componenti longitudinali e trasverse nella equazione di Maxwell per $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ (che è trasverso) si ottiene

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_T, \quad 0 = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_L}{\partial t} \quad (2.34)$$

e, poichè $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ed \vec{A} è puramente trasverso per la scelta di gauge, si ha $\vec{E}_L = -\vec{\nabla} \phi$ e quindi dall'equazione precedente si ottiene

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_L. \quad (2.35)$$

Si noti che questa equazione è consistente con l'equazione di continuità, che in questa notazione si scrive $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_L = 0$. L'equazione differenziale del potenziale vettore nella gauge di Coulomb assume dunque la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_T. \quad (2.36)$$

Nonostante la fisica debba essere la stessa indipendentemente dalla scelta di gauge, con alcune scelte di gauge alcuni fenomeni possono risultare immediatamente evidenti, mentre in altre gauge è necessario un po' di lavoro per arrivare agli stessi risultati. Ad esempio nella gauge di Lorenz è evidente che il campo elettromagnetico propaga con velocità c , visto che le equazioni del moto sono delle equazioni d'onda; nella gauge di Coulomb, invece, questo è molto meno chiaro: il potenziale scalare reagisce infatti in ogni punto istantaneamente ad un cambio di ρ , mentre il calcolo del potenziale vettoriale è complicato dalla presenza della componente longitudinale della corrente. D'altra parte nella gauge di Coulomb si riconoscono più chiaramente i gradi di libertà fisici del campo elettromagnetico libero (le due polarizzazioni trasverse di \vec{A}). Per un confronto esplicito delle soluzioni nelle gauge di Lorenz e di Coulomb ed una dimostrazione della loro equivalenza, vedi [5]. Un altro vantaggio della gauge di Lorenz è che è una gauge definita da una condizione covariante, motivo per cui questa gauge è quella preferita se si vuole mantenere la covarianza a vista delle soluzioni. Altre scelte di gauge meno convenzionali (ad esempio la gauge assiale, definita da $A^3 = 0$) possono comunque in alcuni casi risultare utili: ad esempio nello studio dei livelli di Landau in meccanica quantistica si usa per un campo magnetico uniforme la scelta di gauge $\phi = 0$, $A_y = Bx$, $A_x = A_z = 0$.

2.3 Trasformazioni di Lorentz ed invarianti del campo elettromagnetico

Dal fatto che il campo elettrico e magnetico si possano scrivere tramite il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ si possono ottenere semplicemente le espressioni per le trasformazioni di Lorentz dei campi: basterà usare $F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}$.

Consideriamo ad esempio il caso di un boost con velocità v lungo la direzione positiva dell'asse \hat{x} : la matrice di trasformazione sarà data da

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

dove come al solito $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Utilizzando questa espressione nella regola di trasformazione di $F^{\mu\nu}$ e ricordando che $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$ si ottengono subito le relazioni cercate:

ad esempio si ha

$$F'^{01} = \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} = (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) F^{01} = F^{01} \quad (2.38)$$

e quindi $E'_x = E_x$. Le relazioni complete sono:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z), & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y), & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Queste relazioni possono essere scritte in un modo che non dipende esplicitamente dal fatto che il boost fosse lungo l'asse \hat{x} introducendo le componenti parallele (\parallel) ed ortogonali (\perp) a $\vec{\beta}$ dei campi, ottenendo

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, & \vec{E}'_{\perp} &= \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, & \vec{B}'_{\perp} &= \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Scrivendo $\vec{E}_{\parallel} = \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E})/\beta^2$ e $\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel}$ (ed analogamente per \vec{B}) ed usando $\beta^2 = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$ e $(1 - \gamma)/\beta^2 = -\gamma^2/(\gamma + 1)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \\ \vec{B}' &= \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Le trasformazioni inverse si ottengono come al solito con il cambiamento $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$. Il fatto che l'oggetto che trasforma in modo covariante per trasformazioni di Lorentz sia il tensore di campo, comporta quindi che il campo elettrico e magnetico non trasformino separatamente, ma siano "mescolati" nella trasformazione di Lorentz.

Se consideriamo ad esempio il caso in cui in un dato sistema di riferimento S' si abbia $\vec{B}' = 0$, allora si ha $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}$, $\vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}$, $\vec{B}_{\parallel} = 0$ e

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{\beta} \times \vec{E}' = \vec{\beta} \times (\gamma \vec{E}'_{\perp}) = \vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp} = \vec{\beta} \times \vec{E}. \quad (2.42)$$

È interessante notare che, nel limite $\beta \rightarrow 1$, la relazione tra i campi \vec{E} e \vec{B} è la stessa che si avrebbe in una onda elettromagnetica avente direzione di propagazione $\hat{n} = \vec{\beta}$. Analogamente, nel caso in cui in un dato sistema di riferimento S' si abbia $\vec{E}' = 0$, negli altri sistemi di riferimento si ha $\vec{B}_{\parallel} = \vec{B}'_{\parallel}$, $\vec{B}_{\perp} = \gamma \vec{B}'_{\perp}$, $\vec{E}_{\parallel} = 0$ e

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} = -\gamma \vec{\beta} \times \vec{B}' = -\vec{\beta} \times \vec{B}. \quad (2.43)$$

Una importante applicazione di Eq. (2.43) si ha in fisica dei plasmi. Se si approssima un plasma come un liquido avente densità di massa ρ_m e conducibilità σ infinita (conduttore perfetto), allora nel sistema di riferimento in cui il plasma è istantaneamente e localmente in quiete si ha schermaggio perfetto e non è presente campo elettrico (per le equazioni che si ottengono se non si effettua l'ipotesi $\sigma = \infty$ vedi [4] §7.7, [6] §63). Usando Eq. (2.43) nell'equazione dell'induzione si ha allora in un sistema di riferimento generico (in cui il plasma ha localmente una velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.44)$$

Esplicitando le derivate a secondo membro ed usando $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ si ottiene

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (2.45)$$

Inoltre si può usare l'equazione di continuità della massa

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_m \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_m \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{1}{\rho_m} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho_m = 0, \quad (2.46)$$

per ottenere dopo alcune manipolazioni elementari

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\rho_m} \right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{B}}{\rho_m} = \left(\frac{\vec{B}}{\rho_m} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} . \quad (2.47)$$

Se ora consideriamo due particelle distanti $\delta\vec{r}$ all'interno del plasma e supponiamo che la velocità della prima al tempo t sia $\vec{v}(\vec{r}, t)$, allora la velocità allo stesso tempo della seconda è data da $\vec{v}(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) \simeq \vec{v}(\vec{r}, t) + (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{r}, t)$, quindi la distanza $\delta\vec{r}$ tra le due particelle soddisfa l'equazione

$$\frac{d}{dt} \delta\vec{r} = (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} , \quad (2.48)$$

che è identica all'equazione Eq. (2.47) soddisfatta da \vec{B}/ρ_m . In particolare se le due particelle si trovano su una stessa linea di campo, cioè $\vec{B} \parallel \delta\vec{r}$, allora le due particelle rimarranno sulla stessa linea di campo durante l'evoluzione temporale. Di conseguenza il campo magnetico evolve all'interno del plasma seguendo il movimento delle particelle, come se le linee di campo fossero vincolate a passare sempre attraverso le stesse particelle. In particolare il flusso magnetico attraverso un circuito chiuso che si muove insieme al fluido resta costante, risultato noto come teorema di Alfvén.

Utilizzando il tensore $F^{\mu\nu}$ è possibile non solo dedurre le regole di trasformazione dei campi elettrici e magnetico, ma anche costruire espressioni dei campi che risultino invarianti sotto trasformazioni di Lorentz: per ottenere espressioni invarianti di Lorentz è sufficiente contrarre indici fino ad arrivare ad una espressione senza più indici. Ovviamente contrazioni diverse porteranno ad espressioni diverse, ma si può mostrare che gli unici invarianti indipendenti che è possibile costruire sono (per maggiori dettagli vedi dopo o [7] §25, [2] §21.1 per un approccio diverso)

$$I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \quad I_2 = \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \quad (2.49)$$

Dati due generici tensori antisimmetrici $A^{\mu\nu} = (\vec{p}, \vec{a})$ e $B^{\mu\nu} = (\vec{q}, \vec{b})$ (usando la notazione introdotta sotto Eq. (2.14), quindi ad esempio $A^{0i} = p^i$ e $A^{ij} = -\epsilon_{ijk} a^k$) si ha

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = A^{0i} B_{0i} + A^{i0} B_{i0} + A^{ij} B_{ij} = -2\vec{p} \cdot \vec{q} + \epsilon^{ijm} a_m \epsilon_{ijk} b^k = 2(\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{p} \cdot \vec{q}) \quad (2.50)$$

e ricordando che $F^{\mu\nu} = (-\vec{E}, \vec{B})$, $F_{\mu\nu} = (\vec{E}, \vec{B})$, e $\tilde{F}^{\mu\nu} = (-\vec{B}, -\vec{E})$ si trovano quindi, in termini dei campi tridimensionali, le espressioni

$$I_1 = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) , \quad I_2 = -4\vec{B} \cdot \vec{E} , \quad (2.51)$$

di cui la prima è uno scalare e la seconda uno pseudoscalare. Se in un sistema di riferimento si annulla il campo magnetico o il campo elettrico, allora si ha $I_2 = 0$ e questo significa che in ogni sistema di riferimento il campo elettrico e magnetico devono essere ortogonali, come era stato visto esplicitamente in precedenza. Una onda elettromagnetica corrisponde al caso $I_1 = I_2 = 0$: in tutti i sistemi di riferimento il campo elettrico e magnetico hanno la stessa intensità e sono ortogonali tra loro.

Mostreremo ora che $\vec{E} \cdot \vec{B}$ ed $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ sono gli unici due invarianti indipendenti mostrando che i campi \vec{E} e \vec{B} (e quindi $F^{\mu\nu}$) possono essere ridotti ad una forma canonica che dipende solo da questi due invarianti. Si vuole far vedere che

- se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ allora esiste un sistema di riferimento in cui i vettori \vec{E} e \vec{B} sono paralleli ed entrambi non nulli
- se $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 > 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ esiste un sistema di riferimento in cui $\vec{B} = 0$
- se $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 < 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ esiste un sistema di riferimento in cui $\vec{E} = 0$

nel caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ i campi sono invece ovviamente ortogonali e di modulo uguale in ogni sistema di riferimento.

Consideriamo inizialmente il caso $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, quindi in particolare $\vec{E} \neq 0$: tramite rotazioni tridimensionali ci si può ricondurre al caso in cui il campo elettrico è diretto lungo il verso positivo dell'asse \hat{x} ed il campo magnetico è sul piano $z = 0$. Se consideriamo ora un boost $\vec{\beta} = \beta\hat{z}$ si ha $\vec{B}_\perp = \vec{B}$ e $\vec{E}_\perp = \vec{E}$, quindi usando le leggi di trasformazione Eq. (2.40) si trova

$$\begin{aligned} B'_x &= \gamma B_x ; & E'_x &= \gamma(E_x - \beta B_y) \\ B'_y &= \gamma(B_y - \beta E_x) ; & E'_y &= \gamma\beta B_x \\ B'_z &= 0 ; & E'_z &= 0 . \end{aligned} \quad (2.52)$$

Dal fatto che $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ segue che $B_x \neq 0$ e quindi $B'_x \neq 0$, inoltre se supponiamo $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 \geq 0$ (il caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 < 0$ si tratta in modo praticamente identico invertendo i ruoli di \vec{E} e \vec{B}) allora si ha $E'_x > 0$ (dato che $E_x > 0$ e $|\beta| < 1$) e la condizione $\vec{B}' \parallel \vec{E}'$ si può scrivere nella forma $B'_y/B'_x = E'_y/E'_x$. Questa equazione si può scrivere esplicitamente come

$$E_x B_y \beta^2 - (E_x^2 + \vec{B}^2) \beta + E_x B_y = 0 \quad (2.53)$$

o in modo più suggestivo, introducendo $W = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$ e $S = \frac{c}{4\pi} |\vec{E} \times \vec{B}|$, nella forma

$$\frac{S}{c} \beta^2 - 2W\beta + \frac{S}{c} = 0. \quad (2.54)$$

Il discriminante di questa equazione di secondo grado è

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} &= W^2 - \frac{S^2}{c^2} = \frac{1}{64\pi^2} \left[(E^2 + B^2)^2 - 4|\vec{E} \times \vec{B}|^2 \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{64\pi^2} \left[(E^2 + B^2)^2 - 4E^2 B^2 \right] = \frac{1}{64\pi^2} (E^2 - B^2)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

e quindi l'equazione ammette le soluzioni reali

$$\beta = \frac{W \pm \sqrt{W^2 - S^2/c^2}}{S/c}. \quad (2.56)$$

Poichè si è appena visto che $W \geq S/c$ la soluzione con il segno $+$ è maggiore di 1 e non accettabile, mentre per quella con il segno $-$ si ha $0 \leq \beta \leq 1$. Il caso $\beta = 1$ ovviamente non è accettabile ma si presenta solo quando $W = S/c$, che corrisponde al caso $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Siamo giunti quindi alla conclusione che se $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$ esiste un sistema di riferimento in cui il campo elettrico ed il campo magnetico sono paralleli ed entrambi non nulli¹ (come segue ovviamente dall'invarianza di $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$).

I casi in cui $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ sono più semplici da trattare: basta ruotare le coordinate per fare in modo che il campo elettrico sia diretto lungo il verso positivo dell'asse \hat{y} , il campo magnetico lungo il verso positivo dell'asse \hat{z} ed effettuare un boost lungo \hat{x} imponendo che si annullino E'_y o B'_z secondo che $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$ sia negativo o positivo.

Usando questo risultato si vede che il tensore di campo $F^{\mu\nu}$ può sempre essere ridotto ad una delle due seguenti forme canoniche, di cui la prima vale nel caso $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ e la seconda in tutti gli altri casi:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

infine nel secondo caso i valori E, B sono fissati univocamente dai valori di $\vec{E} \cdot \vec{B}$ e $\vec{E}^2 - \vec{B}^2$.

2.4 Formalismo lagrangiano per il campo elettromagnetico

Un modo di ottenere le equazioni del moto di un punto materiale è imporre la stazionarietà della azione per variazioni $\delta\vec{x}(t)$ tali che $\delta\vec{x}(t_0) = \delta\vec{x}(t_1) = 0$, con la azione scritta nella forma

$$S[x(t), t] = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) dt. \quad (2.58)$$

Nel caso di una teoria di campo in cui la variabile fondamentale sia il campo $\varphi_A(x)$ (con x indichiamo il quadrivettore posizione, con A un generico indice tensoriale) la azione si scrive nella forma

$$S[\varphi(x), x] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_{\mu}\varphi(x), x) d^4x, \quad (2.59)$$

dove \mathcal{L} è la densità lagrangiana e Ω può essere una regione finita dello spaziotempo o tutto lo spaziotempo; nel secondo caso si deve anche imporre che i campi decadano all'infinito abbastanza rapidamente affinchè l'integrale converga. Analogamente al caso unidimensionale si considerano variazioni dei campi che si annullano al bordo $\partial\Omega$ del dominio di integrazione, in modo da poter trascurare termini di superficie nelle integrazioni per parti².

¹Notiamo che esistono in effetti infiniti sistemi di riferimento in cui questa affermazione è valida: una volta che entrambi i campi sono paralleli all'asse \hat{x} , un boost lungo l'asse \hat{x} conserva la forma dei campi

²Nel caso in cui nella densità lagrangiana compaiano derivate di ordine superiore al primo questo non è sufficiente e sono necessari dei termini di bordo lagrangiani per definire il problema in modo formalmente corretto, cosa che accade ad esempio in relatività generale

Affinchè le equazioni del moto ottenute variando S siano covarianti di Lorentz è sufficiente che S sia invariante di Lorentz. Dato che d^4x è invariante è sufficiente che \mathcal{L} sia invariante di Lorentz. Inoltre anche prima di scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange si può osservare che per variazioni dei campi che si annullano al bordo la variazione di S non cambia se si aggiunge alla densità lagrangiana una quadridivergenza $\partial_\mu \mathcal{N}^{\mu\nu_1 \dots \nu_n}(\varphi_A(x), x)$, poichè la azione viene modificata solo per un termine che dipende dai valori dei campi al bordo.

Passiamo ora alla deduzione delle equazioni di Eulero-Lagrange per la azione Eq. (2.59): per una variazione $\delta\varphi_A(x)$ si ha

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} \delta\varphi_A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_A(x))} \delta \partial_\mu \varphi_A(x) \right) d^4x = \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} \delta\varphi_A(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_A(x))} \partial_\mu \delta\varphi_A(x) \right) d^4x = \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_A(x))} \right) \delta\varphi_A(x) d^4x \end{aligned} \quad (2.60)$$

e quindi, data la genericità di $\delta\varphi_A$, si trovano le equazioni di stazionarietà

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_A(x))} = 0. \quad (2.61)$$

Notiamo esplicitamente che queste equazioni sono covarianti a vista nel caso in cui \mathcal{L} sia uno scalare. Osservazione importante sulla notazione: il simbolo ∂_μ che compare nel secondo termine delle equazioni di Eulero-Lagrange è una derivata totale rispetto a x^μ , in modo esattamente analogo al caso unidimensionale in cui compare d/dt . In più variabili non esiste tuttavia un segno convenzionale per la derivata totale (anche perchè non è davvero “totale”: è totale rispetto alla coordinata x^μ con un singolo specifico valore di μ) quindi occorre ricordare la cosa. In pratica $\partial_\mu F(\varphi_A(x), \partial_\nu \varphi_A(x), x) = \partial_\mu F + \frac{\partial F}{\partial \varphi_A} \partial_\mu \varphi_A + \frac{\partial F}{\partial (\partial_\nu \varphi_A)} \partial_\mu \partial_\nu \varphi_A$, dove la prima ∂_μ che compare a secondo membro è una derivata realmente parziale, ovvero ottenuta derivando solo la dipendenza esplicita di F da x^μ .

Nel caso elettromagnetico il campo fondamentale è A_μ e, dato che le equazioni del moto sono lineari nel tensore di campo, è ragionevole supporre che la densità lagrangiana sia quadratica nel tensore di campo. Si è visto in precedenza in Sez. (2.3) che esistono due soli invarianti indipendenti del campo elettromagnetico, entrambi quadratici: $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ e $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Si vede semplicemente che il secondo di questi invarianti si può riscrivere come una divergenza quadridimensionale:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\sigma) = \partial_\mu (2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu (\partial_\rho A_\sigma)), \quad (2.62)$$

ed è quindi ragionevole attendersi che per la parte elettromagnetica della lagrangiana si abbia $\mathcal{L} \propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Questo ragionamento non è in realtà totalmente corretto, perchè si è scritto $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ come derivata di una funzione sia dei campi sia delle loro derivate, tuttavia è facile verificare esplicitamente che le equazioni di Eulero-Lagrange associate alla densità di lagrangiana $\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ sono identicamente soddisfatte da ogni campo A_μ regolare (per cui vale il teorema di Schwarz).

Useremo quindi

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

dove la presenza di c è legata al fatto che $d^4x = c dt d^3x$ e gli altri fattori numerici sono una normalizzazione conveniente per il caso in cui sia presente anche materia. Le equazioni di campo omogenee sono soddisfatte automaticamente da $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e bisogna mostrare che la variazione di Eq. (2.63) produce le altre equazioni di campo, ovvero $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ (le equazioni disomogenee con $j^\mu = 0$). Per fare ciò è conveniente notare che

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 2\partial_\alpha A_\beta \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} (\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) \quad (2.64)$$

quindi si ha $\partial\mathcal{L}/\partial A_\mu = 0$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{8\pi c}\left(\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta}(\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) + \partial_\alpha A_\beta \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}(\delta_\gamma^\mu\delta_\delta^\nu - \delta_\delta^\mu\delta_\gamma^\nu)\right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi c}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{4\pi c}F^{\mu\nu} .\end{aligned}\quad (2.65)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange della azione Eq. (2.63) sono quindi effettivamente $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$.

Nel caso in cui sia presente anche materia carica (ovvero una densità di corrente), è necessario aggiungere alla azione anche un termine di interazione tra campo elettromagnetico e cariche, dato dalla densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{c^2}A_\mu j^\mu , \quad (2.66)$$

dove nuovamente una potenza di c a denominatore è conseguenza della normalizzazione $dx^0 = cdt$. Si ha ovviamente

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c^2}j^\mu, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{int}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 , \quad (2.67)$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange per $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int}$ diventano $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}j^\nu$, ovvero le equazioni di Maxwell non omogenee. Nel caso in cui la corrente sia associata al moto di una carica puntiforme di carica e che si muove lungo la traiettoria $s^\mu(\tau)$ con quadrivelocità $u^\mu(\tau) = \frac{ds^\mu}{d\tau}$ si può utilizzare l'espressione

$$j^\mu(x) = ec \int u^\mu(\tau)\delta^{(4)}(x - s(\tau))d\tau \quad (2.68)$$

per la quadricorrente. Le componenti spaziali e temporali di questo quadrivettore sono infatti le corrette espressioni per $c\rho$ e \vec{j} per una particella puntiforme:

$$\begin{aligned}j^0(\vec{r}, t) &= ec \int \delta(ct - s^0)\delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0)))ds^0 = ec\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= ec \int \frac{d\vec{s}}{ds^0}\delta(ct - s^0)\delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0)))ds^0 = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) .\end{aligned}\quad (2.69)$$

Il termine di interazione con il campo può essere quindi riscritto nel modo equivalente

$$S_{int} = -\frac{1}{c^2} \int A_\mu(x)j^\mu(x)d^4x = -\frac{e}{c} \int d^4x \int d\tau A_\mu(x)u^\mu(\tau)\delta^4(x - s(\tau)) \quad (2.70)$$

e usando la δ per effettuare l'integrale in d^4x si ottiene la forma

$$S_{int} = -\frac{e}{c} \int A_\mu(s(\tau))u^\mu(\tau)d\tau . \quad (2.71)$$

Con le sostituzioni $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ e $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ questa espressione si può riscrivere come

$$S_{int} = \int \left(-e\phi(\vec{s}(t)) + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{s}(t)) \cdot \vec{v}(t)\right) dt , \quad (2.72)$$

che è la forma nota dal corso di Meccanica Classica della lagrangiana di una particella in interazione con il campo elettromagnetico (vedi ad es. [8] §2.5). Nel caso di particelle puntiformi la azione completa è quindi data dalla somma del termine elettromagnetico S_{em} , del termine di interazione S_{int} e dell'usuale termine cinetico $S_{kin} = -mc^2 \int d\tau$ delle particelle.

Nella formulazione lagrangiana risulta chiaro il legame tra la conservazione della carica e l'invarianza di gauge: il termine di interazione tra la quadricorrente ed il quadripotenziale è proporzionale a $\int j_\mu A^\mu d^4x$ ed è l'unico termine della azione che non è a vista invariante di gauge. Effettuando una generica trasformazione di gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu f$, con f a supporto compatto, si vede che la lagrangiana è invariante di gauge se e solo se $\partial_\mu j^\mu = 0$, ovvero se la carica è conservata.

Il passaggio alla formulazione hamiltoniana presenta alcuni problemi legati al fatto che la densità di lagrangiana \mathcal{L}_{em} è singolare, cioè non esiste una relazione biunivoca tra le “velocità” e gli “impulsi coniugati”. Le variabili “posizione” sono le componenti di A^μ ed i momenti coniugati si definiscono come al solito tramite (facendo attenzione ad indici covarianti e controvarianti)

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \dot{A}^\mu} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial (\partial^0 A^\mu)} = -\frac{1}{4\pi c} F_{0\mu} . \quad (2.73)$$

È quindi subito evidente un problema: il momento coniugato alla variabile A^0 è identicamente nullo. Questo è una conseguenza del fatto che le variabili A^μ sono sovrabbondanti per la descrizione del sistema (a causa della invarianza di gauge) e la relazione $P_0 = 0$ dovrebbe essere interpretata come un vincolo per la consistenza della teoria. Per una introduzione alla trattazione generale di questo tipo di problemi si può vedere [9] §1, mentre per un approccio tramite gauge-fixing si può vedere ad esempio [10] §8.

2.5 Equazioni del moto di una carica in un campo elettromagnetico

Le equazioni del moto di una carica di carica e e massa m si scrivono nel formalismo tridimensionale come

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} , \quad (2.74)$$

dove $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ è l'impulso della particella. La generalizzazione covariante di questa equazione del moto dovrà ovviamente essere scritta in termini della quadrivelocità u^μ , del quadriimpulso $p^\mu = mu^\mu$ e del tensore di campo $F^{\mu\nu}$ e dovrà essere della forma $\frac{d}{d\tau} p^\mu = f^\mu$, dove f^μ è la quadriforza. Poichè il tensore di campo è lineare nei campi, la quadriforza dovrà essere una funzione lineare della quadrivelocità e del tensore di campo. Esplicitamente si ha $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(c, \vec{v})$ e di conseguenza il quadrivettore $F^{\mu\nu} u_\nu$ ha componenti

$$\begin{aligned} F^{0\nu} u_\nu &= F^{0i} u_i = \gamma \vec{E} \cdot \vec{v} \\ F^{i\nu} u_\nu &= F^{i0} u_0 + F^{ij} u_j = c\gamma E_i + \gamma \epsilon^{ijk} B_k u_j = c\gamma \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)_i . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Poichè $p^\mu = (\mathcal{E}/c, \vec{p})$ e $dt = \gamma d\tau$, l'equazione del moto può quindi essere scritta in forma covariante come segue

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu . \quad (2.76)$$

Infatti le componenti spaziali riproducono l'equazione Eq. (2.74), mentre la componente temporale si scrive come $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}$, che è l'espressione della conservazione dell'energia. Questa relazione si può ottenere moltiplicando Eq. (2.74) per \vec{v} e notando che da $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ segue $\mathcal{E} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = c^2 \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$ e quindi $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$.

2.6 Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico

Se supponiamo di avere una distribuzione continua di carica ρ e di corrente \vec{j} (con $\vec{j} = \rho \vec{v}$), la forza di Lorentz per unità di volume è

$$\frac{d\vec{p}}{dt dV} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.77)$$

ed è naturale introdurre il quadrivettore G^μ (densità di forza di Lorentz) definito da

$$G^\mu = \frac{dp^\mu}{dt dV} = \left(\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt dV}, \frac{d\vec{p}}{dt dV} \right) , \quad (2.78)$$

che è un quadrivettore controvariante in quanto $dt dV$ è uno scalare di Lorentz. La componente G^0 è (a parte il fattore moltiplicativo $1/c$) data dalla variazione di energia cinetica per unità di

tempo e di volume, cioè il lavoro fatto dal campo per unità di tempo e di volume. Esplicitamente si ha (ricordando che $d\mathcal{E} = \vec{v} \cdot d\vec{p}$)

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dt dV} = \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt dV} = \frac{1}{c} \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j} \quad (2.79)$$

e ricordando che $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ si ottiene

$$G^\mu = \left(\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{j}, \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right) = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu, \quad (2.80)$$

che è la generalizzazione naturale del caso della carica singola Eq. (2.76).

Si mostrerà ora come sia possibile, utilizzando le equazioni di Maxwell, riscrivere l'espressione della densità di forza in modo che risulti la quadridivergenza di un tensore a due indici: usando le equazioni Eq. (2.16) si ha

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial^\rho F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} \right] \quad (2.81)$$

e il secondo termine può essere riscritto come (usando il fatto che tutti gli indici contratti sono muti)

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\nu F^{\mu\rho}) F_{\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu} - \partial^\nu F^{\mu\rho}) F_{\rho\nu} \quad (2.82)$$

che usando Eq. (2.24) diventa

$$(\partial^\rho F^{\mu\nu}) F_{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu}) F_{\rho\nu} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\rho\nu}. \quad (2.83)$$

Usando questa espressione nell'equazione di partenza si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) + \frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\rho\nu} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \frac{1}{2} (\partial^\mu F^{\nu\rho}) F_{\nu\rho} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\partial^\rho (F^{\mu\nu} F_{\rho\nu}) - \frac{1}{4} \partial^\mu (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) \right] = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho \left[F^{\mu\nu} F_{\rho\nu} - \frac{1}{4} \delta_\rho^\mu F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Se ora definiamo il tensore energia impulso del campo elettromagnetico come

$$T^{\mu\rho} = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\nu} \eta_{\nu\alpha} F^{\rho\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} F^{\nu\alpha} F_{\nu\alpha} \right], \quad (2.85)$$

allora si ha

$$\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = -\partial^\rho T^\mu{}_\rho = -\partial_\rho T^{\mu\rho} \quad (2.86)$$

ed infine

$$G^\mu = -\partial_\rho T^{\mu\rho}. \quad (2.87)$$

È semplice verificare che il tensore energia impulso così definito è simmetrico ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$) ed a traccia nulla ($T^\mu{}_\mu = 0$) e che le sue componenti sono date da

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = W, \quad (2.88)$$

dove W è la densità di energia del campo,

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i = \frac{S_i}{c}, \quad (2.89)$$

dove $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ è il vettore di Poynting. Infine

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left[-E_i E_j - B_i B_j + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] = \sigma_{ij}, \quad (2.90)$$

dove il tensore tridimensionale σ_{ij} è noto come tensore degli sforzi di Maxwell. In termini delle componenti tridimensionali si ha quindi

$$\begin{aligned} T^{\mu\rho} &= \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ \vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix}, & T_{\mu\rho} &= \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & \sigma_{ij} \end{pmatrix}, \\ T^{\mu}{}_{\rho} &= \begin{pmatrix} W & -\vec{S}/c \\ \vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix}, & T_{\mu}{}^{\rho} &= \begin{pmatrix} W & \vec{S}/c \\ -\vec{S}/c & -\sigma_{ij} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

L'equazioni Eq. (2.87) non sono niente altro che le equazioni di continuità legate alla conservazione di energia ed impulso: si ha infatti

$$\frac{1}{c} \frac{d\mathcal{E}}{dtdV} = G^0 = -\partial_{\rho} T^{0\rho} = -\partial_0 T^{00} - \partial_i T^{0i} = -\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \quad (2.92)$$

quindi

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{d\mathcal{E}}{dtdV} = 0; \quad (2.93)$$

analogamente dalle altre componenti si ottiene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S_i}{\partial t} + \partial_j \sigma_{ij} + \frac{dp_i}{dtdV} = 0. \quad (2.94)$$

Poichè $d\mathcal{E}/(dtdV)$ è il lavoro fatto dal campo (ovvero l'energia trasferita dal campo alle cariche), l'equazione Eq. (2.93) si interpreta come l'equazione di continuità dell'energia, quindi \vec{S} è il vettore flusso di energia. In modo analogo $d\vec{p}/(dtdV)$ è l'impulso trasferito dal campo alle cariche nell'unità di tempo per unità di volume (ovvero la forza per unità di volume) e l'equazione Eq. (2.94) si interpreta come l'equazione di conservazione dell'impulso, in cui il tensore degli stress è un flusso di impulso: σ_{ij} è il flusso della componente i -esima dell'impulso che attraversa la superficie ortogonale alla direzione j . Come conseguenza della covarianza relativistica, il vettore di Poynting ha due interpretazioni equivalenti: \vec{S} è il vettore flusso di energia ed \vec{S}/c^2 è la densità di impulso.

Se si vuole calcolare l'energia trasferita alle cariche o la forza esercitata sulle cariche dal campo elettromagnetico basta integrare le equazioni Eq. (2.93)-(2.94) sul volume occupato dalle cariche e riscrivere gli integrali di volume delle divergenze come flussi (stando attenti ai segni in quanto è necessario usare le normali uscenti); si vede così che (in condizioni stazionarie!) l'energia assorbita dalle cariche è data dal flusso entrante del vettore di Poynting e la forza che agisce sulle cariche è data dal flusso entrante del tensore degli stress.

Usando le forme canoniche Eq. (2.57) del tensore di campo è semplice ottenere le seguenti forme canoniche per il tensore energia-impulso, di cui la prima è valida nel caso $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, $\vec{E}^2 - \vec{B}^2 = 0$ (condizioni equivalenti a $W = |\vec{S}|/c$ e caratteristiche del campo di radiazione) mentre la seconda in tutti gli altri casi:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ W & 0 & 0 & W \end{pmatrix}, \quad T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

Consideriamo il campo di una onda piana monocromatica nella gauge di Lorenz: le equazioni del moto sono $\partial_{\mu} \partial^{\mu} A_{\nu} = 0$ e la condizione di gauge si scrive $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$. Cerchiamo una soluzione di queste equazioni della forma di una onda piana monocromatica, quindi $A_{\mu}(x) = \mathcal{A}_{\mu} e^{-ik_{\alpha} x^{\alpha}}$ con \mathcal{A}_{μ} quadrivettore costante complesso e k_{μ} quadrivettore costante reale (che in notazione tridimensionale diventa $k^{\mu} = (\omega/c, \vec{k})$). Dalle equazioni del moto segue $k_{\mu} k^{\mu} = 0$, quindi $\vec{k}^2 = \omega^2/c^2$, mentre la condizione di gauge si scrive $k_{\mu} \mathcal{A}^{\mu} = 0$ (e quindi anche $k_{\mu} A^{\mu}(x) = k_{\mu} \mathcal{A}^{\mu}(x) = 0$). Fintanto che si lavora con le equazioni del moto, che sono lineari, si può considerare A_{μ} come vettore complesso, tuttavia il tensore energia-impulso è quadratico, quindi è necessario considerare esplicitamente la

parte reale di A_μ ; è inoltre conveniente considerare i valori medi su un periodo dell'onda, in modo da semplificare le espressioni che si ottengono.

Il tensore di campo dell'onda monocromatica si scrive nella forma (scrivendo esplicitamente la parte reale)

$$F_{\mu\nu}(x) = \text{Re}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \text{Re}\left(-ik_\mu A_\nu + ik_\nu A_\mu\right) = \Im\left(k_\mu A_\nu - k_\nu A_\mu\right) \quad (2.96)$$

ed è immediato verificare (usando $k_\mu A^\mu = k_\mu A^{*\mu} = 0$) che per un'onda monocromatica si ha $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$, che corrisponde al fatto che in un'onda piana $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ (vedi Sez. (2.3)). Per il calcolo del tensore energia impulso serve quindi

$$\langle F^{\mu\nu} F^\rho{}_\nu \rangle = \left\langle \Im\left(k^\mu A^\nu - k^\nu A^\mu\right) \Im\left(k^\rho A_\nu - k_\nu A^\rho\right) \right\rangle = \frac{k^\mu k^\rho}{2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle, \quad (2.97)$$

da cui si ottiene

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = -\frac{k^\mu k^\rho}{8\pi} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle. \quad (2.98)$$

Considerando la componente $T^{00} = W$ si ottiene $\langle W \rangle = -\frac{\omega^2}{8\pi c^2} \langle A^\nu A_\nu^* \rangle$, che si sarebbe anche potuta ottenere esplicitamente da $W = \frac{1}{8\pi} (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2)$ usando $|\vec{E}| = |\vec{B}|$ e

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}|^2 \rangle &= -\langle F_{0i} F^{0i} \rangle = -\left\langle \Im\left(k_0 A_i - k_i A_0\right) \Im\left(k^0 A^i - k^i A^0\right) \right\rangle = \\ &= -\langle k_0 k^0 \Im(A_i) \Im(A^i) - 2k_0 k^i \Im(A^0) \Im(A_i) + k_i k^i \Im(A_0) \Im(A^0) \rangle = \\ &= -k_0 k^0 \langle \Im(A_i) \Im(A^i) + \Im(A_0) \Im(A^0) \rangle = -\frac{\omega^2}{2c^2} \langle A^\mu A_\mu^* \rangle, \end{aligned} \quad (2.99)$$

quindi il tensore energia impulso medio di un'onda monocromatica può essere scritto nella forma

$$\langle T^{\mu\rho} \rangle = \frac{\langle W \rangle c^2}{\omega^2} k^\mu k^\rho. \quad (2.100)$$

Se introduciamo il versore $\hat{n} = \vec{k}/\omega$ di propagazione dell'onda ed il quadrivettore $n^\mu = (1, \hat{n})$ si può infine scrivere in modo compatto $\langle T^{\mu\rho} \rangle = \langle W \rangle n^\mu n^\rho$.

Visto che il tensore energia impulso è legato alla conservazione di energia ed impulso è naturale aspettarsi che si sarebbe potuti arrivare ad esso anche studiando l'invarianza della lagrangiana per tralazioni temporali e spaziali. Questo è ovviamente possibile ed in questo modo si rivelano anche alcune ambiguità nella definizione del tensore legate alla conservazione del momento angolare. Per maggiori dettagli vedi [7] §32-33, [4] §12.10 e soprattutto [11] §4.9-4.10.

3 Campo generato da cariche in moto

3.1 Il campo generato da una carica in moto rettilineo uniforme

Vista la sua importanza pratica nelle applicazioni, in questa sezione si considererà in dettaglio il campo generato da una particella carica in moto rettilineo uniforme.

Nel sistema di riferimento S' solidale con la particella di carica e (che supporremo essere posizionata nell'origine di S'), i campi nella posizione \vec{R}' sono dati dalle espressioni

$$\vec{E}' = e \frac{\vec{R}'}{R'^3}, \quad \vec{B}' = 0'. \quad (3.1)$$

Come si è visto in precedenza (Sez. (2.3) ed in particolare Eq. (2.42)) nel sistema S in cui la particella si muove con velocità \vec{v} sono presenti sia un campo elettrico e che un campo magnetico, le cui componenti sono date da

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \gamma \vec{E}'_{\perp}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}. \quad (3.2)$$

Se supponiamo, per semplicità, che la particella si muova lungo l'asse \hat{x} di S e che al tempo $t = 0$ si trovi nell'origine del sistema S , allora le coordinate della particella nei due sistemi di riferimento S ed S' sono legate dalle relazioni

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (3.3)$$

Esplicitamente si ha allora

$$R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2} = \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (3.4)$$

ed è conveniente introdurre R_* definito da $R' = \gamma R_*$, in modo da scrivere le componenti del campo elettrico in S nella forma

$$E_x = \frac{e(x - vt)}{\gamma^2 R_*^3}, \quad E_y = \frac{ey}{\gamma^2 R_*^3}, \quad E_z = \frac{ez}{\gamma^2 R_*^3}, \quad (3.5)$$

quindi in forma vettoriale

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{e \vec{R}_i}{R_*^3} \quad (3.6)$$

dove \vec{R}_i è la posizione del punto di osservazione rispetto alla posizione della particella: $\vec{R}_i = (x - vt, y, z)$. Se chiamiamo θ l'angolo tra il vettore \vec{R}_i e la direzione del moto (asse \hat{x}), si ha allora chiaramente

$$(x - vt)^2 = R_i^2 \cos^2 \theta, \quad y^2 + z^2 = R_i^2 \sin^2 \theta \quad (3.7)$$

da cui

$$R_* = \sqrt{R_i^2 \cos^2 \theta + (1 - \beta^2) R_i^2 \sin^2 \theta} = R_i \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \quad (3.8)$$

e quindi infine

$$\vec{E} = \frac{e \vec{R}_i}{\gamma^2 R_i^3 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}. \quad (3.9)$$

Consideriamo ora in particolare la forma del campo vista al passare del tempo da un osservatore fisso in un punto avente parametro di impatto b rispetto alla traiettoria della particella carica. Considereremo in particolare il punto di coordinate $x = 0, y = b, z = 0$, cui corrisponde il vettore $\vec{R}_i = (-vt, b, 0)$. Il campo elettrico si scrive allora nella forma

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{evt}{\gamma^2 R_*^3} = -\frac{evt}{\gamma^2 (v^2 t^2 + b^2/\gamma^2)^{3/2}} = -\frac{e\gamma vt}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_y &= \frac{eb}{\gamma^2 R_*^3} = \frac{e\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_z &= 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

mentre per il campo magnetico si ha $B = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}$ con $\vec{v} = (v, 0, 0)$, quindi

$$B_x = B_y = 0, \quad B_z = \frac{v}{c} E_y = \frac{\gamma \beta e b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (3.11)$$

Un grafico degli andamenti delle componenti del campo elettrico in funzione del tempo è mostrato in Fig. (1) e si può notare che il campo elettrico è significativamente diverso da zero solo per tempi $|t| \lesssim b/(v\gamma)$, che il picco di E_y scala come $e\gamma/b^2$ mentre i picchi di E_x valgono sempre $\sqrt{\frac{4}{27}} e/b^2$.

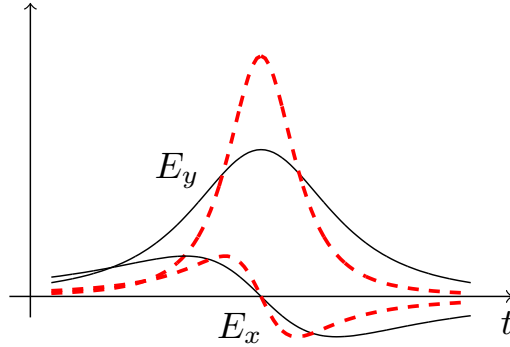


Figura 1: Andamento delle componenti E_x ed E_y del campo elettrico generato da una particella in moto rettilineo uniforme come viste da un osservatore avente parametro di impatto b per $\beta = 0.7$ (curva continua nera) e $\beta = 0.9$ (curva tratteggiata rossa) per $-2b/c \leq t \leq 2b/c$.

3.2 I potenziali ritardati

Si vuole ora determinare il quadripotenziale generato ad una generica distribuzione di carica dipendente dal tempo, caratterizzata dalla quadricorrente j^μ . Nella gauge di Lorenz le equazioni da risolvere si scrivono nella forma

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (3.12)$$

dove le prime sono le equazioni di campo e le seconde la condizione della gauge di Lorenz. Per risolvere queste equazioni si risolveranno prima le equazioni di campo utilizzando la tecnica delle funzioni di Green ed a posteriori si verificherà che le soluzioni trovate soddisfano la condizione della gauge di Lorenz.

La funzione di Green G_R (dove R sta per ritardata) è definita dall'equazione

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \right) G_R(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}) \delta(t) \quad (3.13)$$

con la condizione al contorno $G_R(\vec{r}, t) = 0$ per $t < 0$ per ogni \vec{r} . La funzione di Green è il potenziale d'onda generato da un impulso di carica e la condizione al contorno precedente significa che una carica non produce un segnale prima di comparire. Per trovare l'espressione di G_R il modo più naturale è passare in trasformata di Fourier (per un modo diverso di procedere vedi [7] §62, per una deduzione che non usa esplicitamente le funzioni di Green vedi ad es. [12] §14). Si potrebbe usare sin dall'inizio una trasformata di Fourier quadridimensionale, tuttavia in questo modo diventa più difficile imporre le condizioni al contorno: nell'antitrasformata sono presenti delle ambiguità dovute alle singolarità ed è necessario trovare un cammino di integrazione appropriato (vedi ad es. [4] §12.11, per alcuni cenni ad una analisi più formale delle ambiguità vedi ad es. [13] §11). Per questo motivo appare più naturale usare dapprima una trasformata solo sulle \vec{r} , riducendo quindi

l'equazione di partenza all'equazione ordinaria (vedi Sez. (A.1) per le convenzioni sulle trasformate di Fourier)

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \vec{k}^2\right)\tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\delta(t). \quad (3.14)$$

Quindi $\tilde{G}_R(\vec{k}, t)$ deve essere della forma $A(k)\sin(ckt) + B(k)\cos(ckt)$, dove abbiamo introdotto la notazione $k = |\vec{k}|$, inoltre utilizzando le condizioni al contorno ed integrando sull'intervallo $[0^-, 0^+]$ si trova che si deve avere $\frac{1}{c^2}\partial_t\tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = 1/(2\pi)^3$ ed integrando ancora una volta $\tilde{G}_R(\vec{k}, 0^+) = 0$. La funzione cercata è quindi

$$\tilde{G}_R(\vec{k}, t) = \frac{c}{(2\pi)^3} \frac{\sin(ckt)}{k} \Theta(t), \quad (3.15)$$

dove $\Theta(t)$ è la funzione di Heaveside: $\Theta(t) = 1$ per $t \geq 0$ e $\Theta(t) = 0$ per $t < 0$.

Che l'espressione in Eq. (3.15) sia la soluzione cercata può anche essere mostrato in modo più formale come segue: sia $f \in \mathcal{D}$ una funzione di test, allora si ha

$$\int f(t) \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + k^2\right)\tilde{G}_R(\vec{k}, t)dt = \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + k^2\right) f(t)dt \quad (3.16)$$

ed utilizzando la forma esplicita di \tilde{G}_R trovata prima si ottiene, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) \frac{1}{c^2}\partial_t^2 f(t)dt &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{\sin(ckt)}{ck} \partial_t^2 f(t)dt = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \cos(ckt) \partial_t f(t)dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} f(0) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty ck \sin(ckt) f(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^3} f(0) - \int \tilde{G}_R(\vec{k}, t) k^2 f(t)dt \end{aligned} \quad (3.17)$$

e quindi $\tilde{G}_R(\vec{k}, t)$ soddisfa Eq. (3.14).

Per calcolare $G_R(\vec{r}, t)$ è necessario antitrasformare Eq. (3.15):

$$\begin{aligned} G_R(\vec{r}, t) &= \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(ckt)}{k} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k = \frac{c\Theta(t)}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk k \sin(ckt) \int_{-1}^{+1} e^{ikr\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{ickt} - e^{-ickt})(e^{-ikr} - e^{ikr}) = \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dk (e^{i(ct-r)k} + e^{-i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k} - e^{-i(ct+r)k}) = \\ &= \frac{c\Theta(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty dk (e^{i(ct-r)k} - e^{i(ct+r)k}) = \\ &= \frac{c\Theta(t)}{4\pi r} (\delta(ct-r) - \delta(ct+r)) = \frac{c}{4\pi r} \delta(ct-r) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r/c), \end{aligned} \quad (3.18)$$

dove si è usato il fatto che $\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} dk = 2\pi\delta(x)$ (vedi Sez. (A.4)) e un caso molto semplice ($\delta(ax) = \delta(x)/a$) della regola per il cambio di variabile nelle δ

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_i} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad (3.19)$$

dove le x_i sono tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

La soluzione delle equazioni di campo può a questo punto essere scritta immediatamente: la funzione di Green è la risposta ad una distribuzione di carica concentrata nello spazio e nel tempo, la soluzione è quindi la somma di tutte le sorgenti pesate con la funzione di Green centrata in quel punto:

$$\begin{aligned} A^\mu(\vec{r}, t) &= \frac{4\pi}{c} \int j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3r' dt' = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3r' dt' = \\ &= \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \end{aligned} \quad (3.20)$$

ovvero in notazione tridimensionale

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' .\end{aligned}\quad (3.21)$$

Dalla prima delle Eq. (3.20), dato che sia A^μ che j^μ sono quadrivettori e l'elemento di volume quadridimensionale $d^3 r' dt'$ è invariante, segue che la funzione di Green deve essere un invariante di Lorentz (almeno per trasformazioni di Lorentz proprie). È possibile scrivere G_R in una forma che renda questa invarianza più immediatamente visibile:

$$\begin{aligned}G_R(\vec{r}, t) &= \Theta(t) \frac{1}{4\pi|\vec{r}|} \delta(t - |\vec{r}|/c) = \Theta(t) \frac{1}{2\pi c} \frac{\delta(t - |\vec{r}|/c) + \delta(t + |\vec{r}|/c)}{2|\vec{r}'|/c} = \\ &= \Theta(t) \frac{1}{2\pi c} \delta(t^2 - \vec{r}^2/c^2) = \frac{c}{2\pi} \Theta(t) \delta(c^2 t^2 - \vec{r}^2) .\end{aligned}\quad (3.22)$$

Resta da mostrare che i potenziali Eq. (3.21) soddisfano la condizione della gauge di Lorenz, cioè $\partial_t \phi/c + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Introducendo per semplicità la notazione $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{1}{c} \int \frac{\partial_t \rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}', t') \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' + \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') d^3 r' .\end{aligned}\quad (3.23)$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') &= \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} t' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{r}'| = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'| ,\end{aligned}\quad (3.24)$$

dove si è introdotta la notazione $\vec{\nabla}'$ per indicare le derivate rispetto alle coordinate di \vec{r}' . Notiamo a questo punto che

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{j}(\vec{r}', t')}{\partial t'} \cdot \vec{\nabla}' |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (3.25)$$

dove la notazione $[]_{t'}$ significa che la divergenza è presa a t' costante. Dalle ultime due equazioni si ha allora

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') = [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} - \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \quad (3.26)$$

e quindi la divergenza di \vec{A} può essere scritta nella forma

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \int \vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{j}(\vec{r}', t') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d^3 r' + \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} d^3 r' . \quad (3.27)$$

Il primo termine si annulla in quanto $\vec{j} = 0$ al bordo quindi si ottiene

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(\partial_{t'} \rho(\vec{r}', t') + [\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t')]_{t'} \right) d^3 r' = 0 \quad (3.28)$$

a causa dell'equazione di continuità.

La dimostrazione che i potenziali ritardati Eq. (3.20) soddisfano la condizione di Lorenz si semplifica utilizzando il formalismo covariante: si ha infatti

$$\begin{aligned}\frac{c}{4\pi} \partial_\mu A^\mu(\vec{r}, t) &= \int j^\mu(\vec{r}', t') \partial_\mu G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' = - \int j^\mu(\vec{r}', t') \partial'_\mu G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' = \\ &= - \int \partial'_\mu (j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' + \int (\partial'_\mu j^\mu(\vec{r}', t')) G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' dt' .\end{aligned}\quad (3.29)$$

Il secondo integrale si annulla a causa dell'equazione di continuità, mentre per il primo si ha:

$$\begin{aligned} \int \partial'_\mu (j^\mu(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' &= \int \partial'_0 (j^0(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' + \\ &+ \int \partial'_i (j^i(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')) d^3 r' dt' \end{aligned} \quad (3.30)$$

Il secondo di questi integrali si annulla a causa del teorema della divergenza tridimensionale (per ogni fissato valore di t' si ha $\vec{j} = 0$ al bordo), mentre il primo può essere riscritto come

$$\left(\int j^0(\vec{r}', t') G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d^3 r' \right) \Big|_{t'=-\infty}^{t'=+\infty} \quad (3.31)$$

e questa espressione si annulla a causa delle proprietà di G_R : a $t' = +\infty$ si annulla perchè $G_R(\vec{r} - \vec{r}', t - t')$ è nulla per $t - t' < 0$, a $t' = -\infty$ si annulla perchè in questo caso per dati t e \vec{r} non esiste nessuna soluzione di $t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c = 0$ con $j^0(\vec{r}', t') \neq 0$ (assumendo che non esistano cariche che si muovono alla velocità della luce).

3.3 I potenziali e i campi di Lienard-Wiechert

Supponiamo di avere una particella di carica e che si muove con legge oraria $\vec{s}(t)$ o, in notazione covariante, $s^\mu(\tau)$, dove τ è il tempo proprio della particella. In questo caso la densità di carica e la densità di corrente sono date da

$$\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) , \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \quad (3.32)$$

e non è difficile mostrare che la quadricorrente può essere scritta nella forma

$$j^\mu(x) = ec \int u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - s(\tau)) d\tau , \quad (3.33)$$

dove $u^\mu = ds^\mu/d\tau$ è la quadrirelatività della particella. Si ha infatti

$$\begin{aligned} j^0(\vec{r}, t) &= ec \int \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = ec\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= ec \int \frac{d\vec{s}}{ds^0} \delta(ct - s^0) \delta(\vec{r} - \vec{s}(\tau(s^0))) ds^0 = e\dot{\vec{s}}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Per ottenere la forma dei potenziali in questo caso è conveniente non partire dai potenziali ritardati, ma fare un passo indietro, ovvero scrivere i potenziali direttamente in termini della funzione di Green ritardata e della densità di carica o della corrente: si ha quindi ad esempio

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' dt' = \\ &= \int \frac{e\delta(\vec{r}' - \vec{s}(t'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) d^3 r' dt' = \\ &= \int \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t')|} \delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c) dt' . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Per effettuare l'ultimo integrale si deve usare le proprietà di trasformazione della δ sotto cambio di variabile:

$$\delta(f(t')) = \sum_{t'_i} \frac{\delta(t' - t'_i)}{|f'(t'_i)|} , \quad (3.36)$$

dove i t'_i sono tutte le soluzioni dell'equazione $f(t') = 0$. Nel nostro caso specifico

$$f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{s}(t')|}{c} - t , \quad f'(t') = 1 - \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t')) \cdot \dot{\vec{s}}(t')}{c|\vec{r} - \vec{s}(t')|} , \quad (3.37)$$

inoltre si ha $f'(t') > 0$ (quindi non serve considerare $|f'(t')|$) e l'equazione $f(t') = 0$ ha una unica soluzione (assumendo che tutte le cariche si muovano con velocità minore di c). Indicando con t_r la soluzione di $t = t' + |\vec{r} - \vec{s}(t')|/c$ si ha allora

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{e\delta(t' - t_r)}{|\vec{r} - \vec{s}(t')| - \frac{1}{c}(\vec{r} - \vec{s}(t')) \cdot \dot{\vec{s}}(t')} dt' = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)| - \frac{1}{c}(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \dot{\vec{s}}(t_r)} . \quad (3.38)$$

In letteratura è spesso usata la notazione $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$ e $\hat{n} = \vec{R}/R$, quindi l'espressione precedente si scrive in modo più compatto

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t_r} . \quad (3.39)$$

In modo identico si trova

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e\dot{\vec{s}}(t_r)/c}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)| - \frac{1}{c}(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \dot{\vec{s}}(t_r)} = \frac{e\vec{\beta}}{R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})} \Big|_{t_r} . \quad (3.40)$$

Le espressioni in Eq. (3.38)-(3.40) sono note come potenziali di Lienard-Wiechert. Una espressione più compatta dei potenziali di Lienard-Wiecher si ottiene usando il formalismo quadridimensionale: è infatti semplice verificare che le componenti temporale e spaziali dell'espressione

$$A^\mu(x) = e \frac{u^\mu(\tau_r)}{(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r)} \quad (3.41)$$

riproducono le espressioni precedenti. In questa espressione la traiettoria della particella è parametrizzata da $s^\mu(\tau)$ (dove τ è il tempo proprio) ed il tempo proprio ritardato è la soluzione di $(x - s(\tau))^2 = 0$ con $s^0(\tau_r) < x^0$, quindi $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$. Usando $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ si ha quindi

$$(x - s(\tau_r))_\nu u^\nu(\tau_r) = \gamma c R (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \Big|_{t_r} . \quad (3.42)$$

Un modo più diretto di arrivare a Eq. (3.41) usa la forma Eq. (3.22) della funzione di Green. Si ha infatti (ricordando che $x^0 = ct$, quindi $d^3x dt = d^4x/c$)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{2}{c} \int j^\mu(x') \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) d^4x' = \\ &= 2e \int u^\mu(\tau) \delta^4(x' - s(\tau)) \Theta(x^0 - x'^0) \delta((x - x')^2) d^4x' d\tau = \\ &= 2e \int u^\mu(\tau) \Theta(x^0 - s^0(\tau)) \delta((x - s(\tau))^2) d\tau . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Usiamo la regola di cambio di variabile della δ con

$$f(\tau) = (x - s(\tau))^2 , \quad \frac{df}{d\tau} = -2(x - s(\tau))^\mu u_\mu(\tau) . \quad (3.44)$$

In questo caso $f(\tau) = 0$ ha due soluzioni ed è da usare la soluzione τ_r tale che $s^0(\tau_r) < x^0$. Poichè $x - s(\tau_r)$ è di tipo luce, u^μ di tipo tempo e $x^0 - s^0(\tau_r) > 0$ si ha $df/d\tau < 0$ a τ_r , quindi si ottiene Eq. (3.41).

Per calcolare i campi corrispondenti ai potenziali di Lienard-Wiechert è conveniente usare l'espressione covariante Eq. (3.41) (per un metodo ancora più compatto vedi [4] §14.1, per il calcolo usando le espressioni tridimensionali vedi [14] §6.3). Per calcolare le derivate di $s(\tau_r)$ e $u^\mu(\tau_r)$, che dipendono implicitamente dal punto x , è necessario prima di tutto calcolare $\partial_\alpha \tau_r$, che si ottiene derivando la relazione $(x - s(\tau_r))^2 = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \partial_\alpha (x - s(\tau_r))^2 = (x - s(\tau_r))_\mu \partial_\alpha (x - s(\tau_r))^\mu = \\ &= (x - s(\tau_r))_\mu (\delta_\alpha^\mu - u^\mu(\tau_r) \partial_\alpha \tau_r) = (x - s(\tau_r))_\alpha - (x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r) \partial_\alpha \tau_r \end{aligned} \quad (3.45)$$

e quindi

$$\partial_\alpha \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_\alpha}{(x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r)}. \quad (3.46)$$

Nelle prossime formule, per semplicità di notazione, si sottenderà la dipendenza di s , u (e $a^\mu = du^\mu/d\tau$) da τ_r . Si ha allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \partial^\mu A^\nu &= \partial^\mu \left(\frac{u^\nu}{(x-s)u} \right) = \frac{a^\nu \partial^\mu \tau_r}{(x-s)u} - \frac{u^\nu}{((x-s)u)^2} \partial^\mu (xu - su) = \\ &= \frac{a^\nu (x-s)^\mu}{((x-s)u)^2} - \frac{u^\nu}{((x-s)u)^2} \left(u^\mu + ax \partial^\mu \tau_r - uu \partial^\mu \tau_r - sa \partial^\mu \tau_r \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

questa espressione può essere semplificata notando che $uu = c^2$ e che il termine $u^\mu u^\nu$, essendo simmetrico, non contribuisce a $F^{\mu\nu}$; quindi (\simeq significa che solo i termini che contribuiscono a $F^{\mu\nu}$ sono mostrati)

$$\frac{1}{e} \partial^\mu A^\nu \simeq \frac{a^\nu (x-s)^\mu}{((x-s)u)^2} - \frac{u^\nu (x-s)^\mu}{((x-s)u)^3} (x-s)a + c^2 \frac{u^\nu (x-s)^\mu}{((x-s)u)^3}. \quad (3.48)$$

Consideriamo dapprima l'ultimo termine, che corrisponde al caso di una carica in moto rettilineo uniforme con quadrivelocità u (in quanto è l'unico termine rimanente se $a = 0$). Il tensore di campo si scrive in questo caso

$$F^{\mu\nu} = ec^2 \frac{(x-s)^\mu u^\nu - (x-s)^\nu u^\mu}{(u_\alpha (x-s)^\alpha)^3} \Big|_{\tau_r}, \quad (a=0) \quad (3.49)$$

ed usando $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$ e $u = \gamma(c, \vec{v})$ si trova

$$\vec{E} = \frac{e}{\gamma^2} \frac{(\vec{r} - \vec{s}) - |\vec{r} - \vec{s}| \vec{\beta}}{(|\vec{r} - \vec{s}| - (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r}, \quad (a=0). \quad (3.50)$$

che può essere scritto in modo più compatto introducendo le notazioni $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$ e $\hat{n} = \vec{R}/R$:

$$\vec{E} = \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r}, \quad (a=0). \quad (3.51)$$

Per ottenere il campo $B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}$ si potrebbe procedere analogamente oppure notare che

$$B_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk} = -\frac{ec^2}{(u_\alpha (x-s)^\alpha)^3} \epsilon_{ijk} (x-s)^j u^k \quad (3.52)$$

è uguale a (poichè $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$)

$$\epsilon_{ijk} \frac{(x-s)^j}{|\vec{r} - \vec{s}|} F^{k0} = -\frac{ec^2}{(u_\alpha (x-s)^\alpha)^3} \epsilon_{ijk} \frac{(x-s)^j}{|\vec{r} - \vec{s}|} (x-s)^0 u^k, \quad (3.53)$$

quindi

$$\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E} = -\frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} \times \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \quad (a=0). \quad (3.54)$$

Questi campi coincidono con quelli calcolati in Sez. (3.1), tuttavia la loro forma è apparentemente diversa perchè sono scritti in termini delle posizioni al tempo ritardato. Nel caso di un moto rettilineo uniforme è facile riscrivere le espressioni ottenute in funzione della posizione istantanea

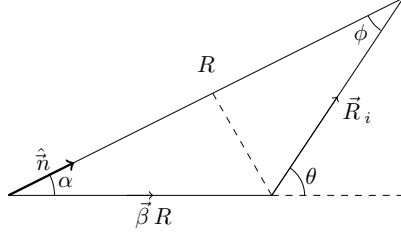


Figura 2: Relazione tra la posizione ritardata $R\hat{n}$ e la posizione istantanea \vec{R}_i .

(indicata con \vec{R}_i in Eq. (3.9)): si ha infatti $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{v}|\vec{r} - \vec{s}|/c = \vec{R}_i + \vec{\beta}R$, si hanno quindi le relazioni $\hat{n} - \vec{\beta} = \vec{R}_i/R$ e

$$\hat{n} \cdot \vec{R}_i = R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) , \quad (3.55)$$

(quindi in particolare $\hat{n} \cdot \vec{R}_i \geq 0$). Con riferimento a Fig. (2) si ha $R \sin \alpha = R_i \sin \theta$, quindi

$$\beta \sin \theta = \frac{\beta R \sin \alpha}{R_i} = \frac{R_i \sin \phi}{R_i} = \sin \phi \quad (3.56)$$

e dunque

$$R(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \hat{n} \cdot \vec{R}_i = R_i \cos \phi = R_i \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = R_i \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} . \quad (3.57)$$

Utilizzando queste relazioni è semplice vedere che Eq. (3.51) coincide con Eq. (3.9).

Passiamo ora ad analizzare la componente di radiazione del tensore di campo associato ai potenziali di Lienard-Wiechert, ovvero

$$F_{rad}^{\mu\nu} = e \frac{(x-s)^\mu a^\nu - (x-s)^\nu a^\mu}{((x-s)_\alpha u^\alpha)^2} - e \frac{(x-s)^\mu u^\nu - (x-s)^\nu u^\mu}{((x-s)_\alpha u^\alpha)^3} (x-s)_\rho a^\rho , \quad (3.58)$$

ricordando che l'espressione per la quadriaccelerazione è

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) , \quad (3.59)$$

dove \vec{a} è la accelerazione tridimensionale. Usando nuovamente $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$ e $u = \gamma(c, \vec{v})$ si trova per $E_i = -F^{0i}$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad} &= -e \frac{|\vec{r} - \vec{s}|(\gamma^4(\vec{\beta} \cdot \vec{a})\vec{\beta} + \gamma^2 \vec{a}) - (\vec{r} - \vec{s})\gamma^4(\vec{\beta} \cdot \vec{a})}{(|\vec{r} - \vec{s}|\gamma c - \gamma(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{v})^2} + \\ &+ e \frac{|\vec{r} - \vec{s}|\gamma \vec{v} - (\vec{r} - \vec{s})\gamma c}{(|\vec{r} - \vec{s}|\gamma c - \gamma(\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{v})^3} (|\vec{r} - \vec{s}|\gamma^4(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) - \vec{\beta} \cdot (\vec{r} - \vec{s})\gamma^4(\vec{\beta} \cdot \vec{a}) - (\vec{r} - \vec{s}) \cdot \vec{a}\gamma^2) = \\ &= -\frac{e}{cR} \frac{\gamma^2(\vec{\beta} - \hat{n})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) + \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} + \frac{e}{cR} \frac{\vec{\beta} - \hat{n}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} (\gamma^2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}) - \hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) = \\ &= \frac{e}{cR} \frac{1}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} (- (\vec{\beta} - \hat{n})(\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})) = \\ &= \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \end{aligned} \quad (3.60)$$

in cui nell'ultima espressione si è scritto esplicitamente (prima era stato sottointeso) che l'espressione deve essere valutata al tempo ritardato t_r ; procedendo in modo identico al caso senza accelerazione si trova nuovamente $\vec{B}_{rad} = \hat{n} \times \vec{E}_{rad}$. Sommando a questo risultato Eq. (3.51) si ottiene l'espressione completa dei campi associati ai potenziali di Lienard-Wiechert:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{\gamma^2 R^2} \frac{\hat{n} - \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} + \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{t_r},\end{aligned}\quad (3.61)$$

in cui si ricorda che $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $R = |\vec{R}|$, $\hat{n} = \vec{R}/R$ e $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$.

Si vuole ora analizzare la relazione tra l'espressione per $\partial_\alpha \tau_r$ precedentemente ottenuta, che riportiamo qui per comodità

$$\partial_\alpha \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_\alpha}{(x - s(\tau_r))_\mu u^\mu(\tau_r)}, \quad (3.62)$$

e le corrispondenti espressioni per le variabili tridimensionali associate. Ricordiamo che dalla definizione di τ_r si ha $x^0 - s^0(\tau_r) = |\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|$, quindi usando $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$ si ottiene

$$\partial_0 \tau_r = \frac{|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)|}{\gamma c [|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)| - (\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)) \cdot \vec{\beta}(\tau_r)]}; \quad \partial_i \tau_r = \frac{(x - s(\tau_r))_i}{\gamma c [|\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)| - (\vec{r} - \vec{s}(\tau_r)) \cdot \vec{\beta}(\tau_r)]}, \quad (3.63)$$

da cui si trovano per le derivate del tempo ritardato t_r (τ_r è il tempo proprio corrispondente a t_r) le seguenti espressioni, in cui tutte le quantità dipendenti dal tempo sono calcolate a t_r :

$$\frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}}; \quad \vec{\nabla} t_r = \frac{-\hat{n}/c}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}}. \quad (3.64)$$

Queste stesse relazioni possono essere ottenute in modo un poco più laborioso lavorando sempre nel formalismo tridimensionale: da $t = t_r + R/c$ si ottiene

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt_r} \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2} = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \vec{v}(t_r)}{R} = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}, \quad (3.65)$$

quindi

$$\frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}}. \quad (3.66)$$

Si hanno inoltre le relazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{R}}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial t_r} [\vec{r} - \vec{s}(t_r)] = -\vec{v}(t_r), \\ \frac{\partial R}{\partial t_r} &= \frac{\partial}{\partial t_r} \sqrt{R^2} = \hat{n} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_r} = -\hat{n} \cdot \vec{v}, \\ \frac{dR}{dr^i} &= \frac{d}{dr^i} [c(t - t_r)] = -c \frac{dt_r}{dr^i},\end{aligned}\quad (3.67)$$

quindi, notando che $R = \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2}$ dipende dalla posizione \vec{r} sia esplicitamente che implicitamente (il tempo ritardato t_r dipende da \vec{r}), si trova usando i risultati precedenti:

$$-c \frac{dt_r}{dr^i} = \frac{dR}{dr^i} = \frac{\partial R}{\partial r^i} + \frac{\partial R}{\partial t_r} \frac{dt_r}{dr^i} = \frac{\partial}{\partial r^i} \sqrt{(\vec{r} - \vec{s}(t_r))^2} - \hat{n} \cdot \vec{v} \frac{dt_r}{dr^i} = n^i - \hat{n} \cdot \vec{v} \frac{dt_r}{dr^i}, \quad (3.68)$$

da cui si ottiene infine

$$\vec{\nabla} t_r = \frac{-\hat{n}/c}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}}. \quad (3.69)$$

3.4 La potenza irradiata

Calcoliamo ora l'energia irradiata da una particella accelerata nell'unità di tempo. Per fare ciò è prima di tutto necessario calcolare il vettore di Poynting \vec{S} : poichè $\vec{B}_{rad} = \hat{n} \times \vec{E}_{rad}$ si ha

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times \vec{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{rad} \times (\hat{n} \times \vec{E}_{rad}) = \frac{c}{4\pi} E_{rad}^2 \hat{n} \quad (3.70)$$

dove tutta l'espressione deve essere calcolata al tempo ritardato t_r . Per calcolare la potenza irradiata è necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting su una superficie chiusa, tuttavia

l'integrale che si ottiene usando l'espressione generale Eq. (3.60) è piuttosto complicato, in quanto compaiono nell'integrando due vettori indipendenti: $\vec{\beta}$ e $\dot{\vec{\beta}}$. È quindi conveniente dapprima calcolare la potenza irradiata nel sistema di quiete della particella, in cui β è istantaneamente nullo e poi estendere il risultato usando la covarianza relativistica.

Nel sistema di quiete istantanea della particella accelerata la componente di radiazione del campo elettrico si riduce a

$$\vec{E}_{rad}^{(nr)} = \frac{e}{cR} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) \quad (3.71)$$

e, se si indica con θ l'angolo tra i vettori $\dot{\vec{\beta}}$ e \vec{n} , si ha

$$|\vec{E}_{rad}^{(nr)}| = \frac{ea \sin \theta}{c^2 R}, \quad a = |\dot{\vec{a}}|. \quad (3.72)$$

La quantità di energia irradiata per unità di tempo, data dal flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera di raggio R , è quindi data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} \quad (3.73)$$

che è nota come formula di Larmor. Se si considera la forma esplicita del tensore energia-impulso del campo (o più semplicemente la distribuzione angolare della radiazione emessa) non è difficile verificare che nel caso non relativistico l'impulso irradiato è nullo³.

Per ottenere la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è conveniente riscriverla nella forma

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} dt \\ d\vec{\mathcal{P}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.74)$$

dove $d\mathcal{E}$ e $d\vec{\mathcal{P}}$ sono rispettivamente l'energia e l'impulso irradiati nell'intervallo di tempo dt nel sistema di quiete della particella. La generalizzazione covariante di queste espressioni è

$$d\mathcal{P}^\mu = -\frac{2e^2}{3c^5} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} u^\mu d\tau \quad (3.75)$$

infatti nel sistema di riferimento (localmente) in quiete abbiamo $u^\mu = (c, 0)$ e $du^\mu/d\tau = (0, \vec{a})$, quindi si ritrovano le equazioni precedenti (attenzione che una potenza di c è dovuta a $d\mathcal{P}^\mu = (d\mathcal{E}/c, d\vec{\mathcal{P}})$). D'altra parte se due quadri vettori sono uguali in un sistema di riferimento, dato che trasformano nello stesso modo, sono uguali in ogni sistema di riferimento, quindi quella precedente è l'unica espressione covariante che si riduce alla formula di Larmor nel limite non relativistico. Per determinare la potenza irradiata basta quindi considerare la componente 0 di Eq. (3.75), cioè

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} \quad (3.76)$$

Notiamo che il “ t ” che compare in questa espressione è quello a cui è emessa la radiazione (cioè quello a cui sono calcolate le quadriaccelerazioni), quindi più propriamente andrebbe indicato con t_r . Questo si vedrà più esplicitamente in Sez. (3.7) considerando esplicitamente i casi di moto uniformemente accelerato e di moto circolare uniforme.

Utilizzando la formula esplicita

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right), \quad (3.77)$$

³Una analisi molto accurata di alcuni dettagli può essere trovata in [11] §5.1, in cui si mostra esplicitamente che il quadriimpulso della radiazione emessa trasforma effettivamente come un quadri vettore.

per la quadriaccelerazione si ottiene

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^4 a^2 - \frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 \quad (3.78)$$

che utilizzando $(\vec{v} \times \vec{a})^2 = v^2 a^2 - (\vec{v} \cdot \vec{a})^2$ si riscrive come

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^6 a^2 + \frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \quad (3.79)$$

e quindi la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left(a^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \right). \quad (3.80)$$

Due casi particolari significativi sono il caso della accelerazione uniforme (quindi $\vec{v} \parallel \vec{a}$) e quello del moto circolare uniforme ($\vec{v} \perp \vec{a}$):

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|_{lin} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 a^2, \quad \left. \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|_{circ} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a^2. \quad (3.81)$$

3.5 Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (1)

Il punto di partenza per calcolare la distribuzione dell'energia irraggiata è ovviamente l'espressione dei campi elettrico e magnetico corrispondenti ai potenziali di Lienardt-Wiechert nella zona di radiazione:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \left. \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right|_{t_r} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{t_r}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

dove $\vec{s}(t)$ è la legge oraria della particella carica che irraggia, $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $R = |\vec{R}|$, $\hat{n} = \vec{R}/R$ e t_r è il tempo ritardato, definito dall'equazione $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$. Dal vettore di Poynting associato ai campi di radiazione si ottiene la seguente espressione per la distribuzione angolare dell'energia irraggiata \mathcal{E} :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 R^2 \Big|_{t_r} dt, \quad (3.83)$$

dove il raggio della sfera su cui si calcola il flusso deve essere quello calcolato al tempo ritardato. Notiamo che poichè in questa relazione compare un integrale su tutti i tempi, r deve essere abbastanza grande da essere in zona di radiazione per tutti i valori di t a cui viene emessa radiazione. Questo significa che il moto della particella deve essere tale che la radiazione venga emessa solo quando la particella è in una regione limitata di spazio, come accade per esempio in un processo di scattering, in cui per $t \rightarrow \pm\infty$ si ha $\dot{\vec{\beta}} \rightarrow 0$.

Per ottenere la distribuzione in frequenza è conveniente usare l'identità di Parsefall per le trasformate di Fourier, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.84)$$

dove la funzione $\tilde{f}(\omega)$ è definita dall'espressione

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt. \quad (3.85)$$

Se introduciamo per semplicità di notazione il vettore ausiliario $\vec{C}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t)R|_{t_r}$ si ha allora

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{C}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega \quad (3.86)$$

e poichè il campo elettrico è una variabile reale si deve avere $\vec{C}(\vec{r}, -\omega) = \vec{C}(\vec{r}, \omega)^*$ quindi l'intervallo di integrazione delle frequenze può essere ristretto al solo semiasse positivo:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega} = c \int_0^{+\infty} |\vec{C}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega, \quad (3.87)$$

che corrisponde alla distribuzione in frequenza

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = c |\vec{C}(\vec{r}, \omega)|^2. \quad (3.88)$$

Per terminare serve ora scrivere in modo esplicito le componenti del vettore ausiliario $\vec{C}(\vec{r}, \omega)$: dalla definizione segue che

$$\vec{C}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left[\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right]_{t_r} dt \quad (3.89)$$

ed è conveniente cambiare la variabile di integrazione da t a t_r , usando il fatto che dalla definizione di tempo ritardato $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$ segue che

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 - \frac{(\vec{r} - \vec{s}(t_r)) \cdot \frac{d\vec{s}(t_r)}{dt_r}}{|\vec{r} - \vec{s}(t_r)|} = 1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}|_{t_r}. \quad (3.90)$$

Si trova quindi (d'ora in poi, non essendoci più possibilità di confusione, indicheremo t_r semplicemente con t)

$$\vec{C}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t+|\vec{r}-\vec{s}(t)|/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt. \quad (3.91)$$

Questa forma può ancora essere semplificata usando $|\vec{s}(t)| \ll |\vec{r}|$ (ricordiamo quanto notato prima sul fatto che la particella irraggia solo in una regione limitata di spazio). Usando $|\vec{s}(t)| \ll |\vec{r}|$ si ha allora $\hat{n} \simeq \vec{r}/|\vec{r}|$ e $|\vec{r} - \vec{s}(t)| \simeq |\vec{r}| - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)$, ottenendo quindi (a meno di una fase inessenziale visto il modulo quadro in Eq. (3.88)) l'espressione

$$\vec{C}(\vec{r}, \omega) = \frac{e}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt. \quad (3.92)$$

Inserendo questo risultato in Eq. (3.88) si ottiene infine l'espressione dell'energia totale irraggiata per unità di angolo solido e di frequenza:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} dt \right|^2. \quad (3.93)$$

In molti casi di utilità pratica risulta comodo notare che (ricordiamo che a questo punto $\hat{n} \simeq \vec{r}/|\vec{r}|$ è indipendente da t)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) = \frac{\hat{n}(\dot{\hat{n}} \cdot \vec{\beta}) - \dot{\vec{\beta}}}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} + (\hat{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \frac{\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{\beta}) - \vec{\beta}}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} = \\ &= \frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(\dot{\hat{n}} \cdot \vec{\beta}) - \dot{\vec{\beta}}(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^2} = \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

per riscrivere l'equazione Eq. (3.93) nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) dt \right|^2. \quad (3.95)$$

Nel caso in cui il moto della particella non ha singolarità (come ad es. accelerazioni istantanee) e non si ha emissione di radiazione per $t \rightarrow \pm\infty$ l'espressione Eq. (3.95) può essere integrata per parti procedendo come segue:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|t|} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) dt = \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\epsilon|t|} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \frac{d}{dt} \left(i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c) - \epsilon|t| \right) dt = \\ &= -i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \left(\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Eq. (3.95) può dunque essere riscritta come segue

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \left(\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}) \right) dt \right|^2. \quad (3.97)$$

Poichè si è assunto che non si abbia irraggiamento per $t \rightarrow \pm\infty$, si può supporre di essere a distanza sufficientemente grande dalla particella da far sì che \hat{n} vari abbastanza lentamente da far uscire $\hat{n} \times (\hat{n} \times \dots)$ dall'integrale ottenendo (ovviamente $|\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a})|^2 = |\hat{n} \times \vec{a}|^2$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{4\pi^2 c} \left| \hat{n} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \vec{\beta} dt \right|^2. \quad (3.98)$$

In questa forma non è più immediatamente evidente che nel caso $\dot{\vec{\beta}} = 0$ non si ha emissione di radiazione, tuttavia se si calcola l'integrale usando $\vec{s}(t) = c\vec{\beta}t$ (con $\vec{\beta}$ costante) si ottiene un risultato proporzionale a (vedi Sez. (A.4))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})t} dt = 2\pi \delta(\omega(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})) = 0 \quad (3.99)$$

in quanto $\hat{n} \cdot \vec{\beta} < 1$.

Per una particella puntiforme si ha $\vec{j}(\vec{r}, t) = e\vec{v}(t)\delta(\vec{r} - \vec{s}(t))$ e ricordando che per un campo di radiazione si ha $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\hat{n}$ si trova

$$\begin{aligned} \tilde{j}(\vec{k}, \omega) &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int \vec{v}(t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \delta(\vec{r} - \vec{s}(t)) d^3r dt = \\ &= \frac{e}{(2\pi)^4} \int \vec{v}(t) e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} dt, \end{aligned} \quad (3.100)$$

quindi Eq. (3.97) si può riscrivere nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{(2\pi)^6 \omega^2}{c^3} \left| \hat{n} \times \tilde{j}(\vec{k}, \omega) \right|^2. \quad (3.101)$$

Questa espressione può essere scritta in modo leggermente diverso notando che l'equazione di continuità della carica $\partial_t \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$ diventa in trasformata $\vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega) = \omega \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)$ quindi

$$|\hat{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 = |\vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 - |\hat{n} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 = |\vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 - c^2 |\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)|^2. \quad (3.102)$$

Per ottenere la dipendenza dalla frequenza e dalla direzione della potenza “istantanea” (si preciserà meglio tra poco) emessa si può riscrivere $|\vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2$ usando una trasformata di Fourier solo sul tempo

$$\begin{aligned} |\vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\int \vec{j}(\vec{k}, t) e^{i\omega t} dt \right]^* \cdot \left[\int \vec{j}(\vec{k}, t') e^{i\omega t'} dt' \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \vec{j}(\vec{k}, t) \cdot \vec{j}(\vec{k}, t') e^{-i\omega(t-t')} dt dt'. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Introducendo ora $T = \frac{1}{2}(t + t')$ e $\tau = t - t'$ si vede facilmente che $dt dt' = dT d\tau$, quindi

$$|\vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dT \int \vec{j}(\vec{k}, T + \tau/2) \cdot \vec{j}(\vec{k}, T - \tau/2) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.104)$$

A causa del termine esponenziale oscillante ci si aspetta che l'integrale sia determinato principalmente dai valori assunti dall'integrando per $|\tau| \lesssim 1/\omega$, che è una scala di tempi tipicamente molto più piccola dei tempi tipici di osservazione macroscopici. Si può quindi interpretare T come un tempo macroscopico di emissione della radiazione (definito a meno di fattori dell'ordine di $1/\omega$) e solo in questo senso si può parlare di potenza istantanea emessa ad una certa frequenza. Le stesse manipolazioni si possono applicare in modo identico al termine $|\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)|^2$ ottenendo quindi infine (usando $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n}$)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} &= \frac{(2\pi)^4 \omega^2}{c^3} \int \left(\vec{j}(\vec{k}, T + \tau/2) \cdot \vec{j}(\vec{k}, T - \tau/2) + \right. \\ &\quad \left. - c^2 \tilde{\rho}(\vec{k}, T + \tau/2) \tilde{\rho}(\vec{k}, T - \tau/2) \right) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2 c^3} \int \left(\vec{j}(\vec{r}, T + \tau/2) \cdot \vec{j}(\vec{r}', T - \tau/2) + \right. \\ &\quad \left. - c^2 \rho(\vec{r}, T + \tau/2) \rho(\vec{r}', T - \tau/2) \right) e^{-i\omega(\tau - \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/c)} d\tau d\vec{r} d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (3.105)$$

3.6 Distribuzione angolare ed in frequenza dell'energia irraggiata (2)

Nella sezione precedente si sono ottenute delle espressioni per la distribuzione angolare ed in frequenza della radiazione emessa da una carica in moto accelerato a partire dalla forma esplicita dai campi di radiazione di Lienard-Wiechert. In questa sezione si otterranno delle espressioni per l'energia irraggiata valide nel caso più generale in cui si abbia una distribuzione di carica $\rho(\vec{r}, t)$ ed una densità di corrente $\vec{j}(\vec{r}, t)$, seguendo un approccio ispirato a [15]. Il vantaggio di questo approccio consiste nel fatto che, non usando esplicitamente le espressioni dei campi di Lienard-Wiechert, rende trasparente il fatto che le espressioni ottenute nella sezione precedente sono in realtà valide più in generale: ad esempio nel caso della radiazione Cherenkov si possono avere una, due o nessuna soluzione per l'equazione dei tempi ritardati, tuttavia il fatto di avere una unica soluzione (che è ovviamente fondamentale nella deduzione dei campi di Lienard-Wiechert) non entrerà in nessun modo nella trattazione di questa sezione.

Il punto di partenza sono ovviamente i potenziali ritardati ed il primo passo è riscrivere questi potenziali in una forma che risulterà più comoda da utilizzare: usando la relazione (vedi Sez. (A.4))

$$\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)} d\omega \quad (3.106)$$

il potenziale scalare $\phi(\vec{r}, t)$ generato dalla distribuzione $\rho(\vec{r}', t')$ può essere riscritto come (vedi Sez. (A.1) per le convenzioni nelle trasformate di Fourier)

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}, t) &= \int \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') d^3 r' dt' = \\ &= \int e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}', t') e^{i\omega t'} e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c} d\omega d^3 r' dt' = \\ &= \int e^{-i\omega t} \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d\omega d^3 r'\end{aligned}\quad (3.107)$$

e quindi

$$\tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) = \int \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d^3 r' . \quad (3.108)$$

In modo identico si ottiene

$$\tilde{A}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{c} \int \frac{e^{i\omega |\vec{r} - \vec{r}'|/c}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{j}(\vec{r}', \omega) d^3 r' . \quad (3.109)$$

Supponiamo ora che sia $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$, in modo da poter usare nell'esponenziale $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{n} \cdot \vec{r}'$, dove $\hat{n} = \vec{r}/r$, mentre nel denominatore si può usare semplicemente $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r$; si ottiene nella zona di radiazione

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \int e^{-i\omega \hat{n} \cdot \vec{r}'/c} \tilde{\rho}(\vec{r}', \omega) d^3 r' \\ \tilde{A}(\vec{r}, \omega) &= \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \int e^{-i\omega \hat{n} \cdot \vec{r}'/c} \tilde{j}(\vec{r}', \omega) d^3 r' ;\end{aligned}\quad (3.110)$$

se introduciamo $\vec{k} = \hat{n}\omega/c$ si ha allora

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(\vec{r}, \omega) &= (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) \\ \tilde{A}(\vec{r}, \omega) &= (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \tilde{j}(\vec{k}, \omega) .\end{aligned}\quad (3.111)$$

Se nel calcolo del campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t)$ si considera solo il termine dominante in $1/r$ si trova

$$\tilde{B}(\vec{r}, \omega) = (2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \vec{\nabla} \times \tilde{j}(\vec{k}, \omega) = -i(2\pi)^3 \frac{e^{i\omega r/c}}{cr} \vec{k} \times \tilde{j}(\vec{k}, \omega) . \quad (3.112)$$

Per il calcolo del campo elettrico è conveniente notare che l'equazione della gauge di Lorenz $\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ diventa in trasformata di Fourier $i\frac{\omega}{c} (\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) - \hat{n} \cdot \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) = 0$ e quindi si ha

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \hat{n} \cdot \tilde{A}(\vec{k}, \omega) ; \quad (3.113)$$

di conseguenza nella regione di radiazione si ha (usando $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}$) e trascurando nuovamente termini aventi potenze più elevate di $1/r$)

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{k}, \omega) &= i\vec{k} (\hat{n} \cdot \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) - i\frac{\omega}{c} \tilde{A}(\vec{k}, \omega) = i\frac{\omega}{c} (\hat{n} (\hat{n} \cdot \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) - \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) = \\ &= i\frac{\omega}{c} \hat{n} \times (\hat{n} \times \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) = -\hat{n} \times (-i\vec{k} \times \tilde{A}(\vec{k}, \omega)) = -\hat{n} \times \tilde{B}(\vec{k}, \omega) .\end{aligned}\quad (3.114)$$

Usando queste espressioni si può calcolare l'energia totale emessa integrando il flusso del vettore di Poynting attraverso una sfera su tutti i tempi:

$$\mathcal{E} = \int r^2 \hat{n} \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) d\Omega dt = \frac{c}{4\pi} \int r^2 \hat{n} \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)) d\Omega dt . \quad (3.115)$$

Usando $\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, -\omega) = \vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega)^*$, $\vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega) = -\hat{n} \times \vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega)$ e $\hat{n} \cdot \vec{\tilde{B}}(\vec{r}, t) = 0$ si trova inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega) \times \vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega') e^{-i(\omega+\omega')t} dt d\omega d\omega' = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + \omega') \vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega) \times \vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega') d\omega d\omega' = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{E}}(\vec{r}, \omega)^* \times \vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega) d\omega = \quad (3.116) \\ &= 2\pi \hat{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega = 4\pi \hat{n} \int_0^{+\infty} |\vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega . \end{aligned}$$

Rimettendo insieme tutti i pezzi si ha quindi

$$\mathcal{E} = c \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega r^2 |\vec{\tilde{B}}(\vec{r}, \omega)|^2 = \frac{(2\pi)^6}{c^3} \int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega \omega^2 |\hat{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 , \quad (3.117)$$

ovvero

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega d\Omega} = \frac{(2\pi)^6 \omega^2}{c^3} |\hat{n} \times \vec{j}(\vec{k}, \omega)|^2 , \quad (3.118)$$

che coincide con Eq. (3.101) trovata precedentemente. Le stesse manipolazioni usate nella sezione precedente portano quindi a Eq. (3.105) anche in questo approccio e si potrebbe ottenere la distribuzione in frequenza ed in angolo solido della potenza emessa da una particella puntiforme in moto generico senza utilizzare la forma esplicita dei campi di Lienard-Wiechert (vedi⁴ ad es. [15]).

3.7 Il caso della accelerazione lineare ed il moto circolare uniforme

In questa sezione si tratteranno due casi di grande importanza pratica: il caso in cui sia presente una accelerazione lineare (ovvero $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$) ed il caso del moto circolare uniforme. Il punto di partenza saranno sempre i campi di radiazione corrispondenti ai potenziali di Lienard-Wiechert, che riportiamo qui per comodità

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{e}{cR} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \Big|_{t_r} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \hat{n} \times \vec{E} \Big|_{t_r} , \end{aligned} \quad (3.119)$$

in cui si ricorda che $\vec{R} = \vec{r} - \vec{s}(t)$, $\vec{s}(t)$ è la legge oraria della particella carica, $R = |\vec{R}|$, $\hat{n} = \vec{R}/R$ ed il tempo ritardato t_r è definito dall'equazione $t - t_r = |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$.

Partiamo dal caso della accelerazione lineare: in questo caso si ha $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = 0$, quindi il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$ del campo di radiazione è diretto lungo \hat{n} e si ha

$$\vec{S} \cdot \hat{n} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c R^2} \frac{|\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^6} , \quad (3.120)$$

in cui tutte le quantità sono calcolate al tempo t_r . Questa è dunque l'energia irraggiata per unità di tempo e di superficie nella direzione \hat{n} che viene rilevata da un osservatore al tempo t , corrispondente al tempo ritardato dato dalla relazione $t = t_r + |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c$. Se si vuole calcolare l'energia irraggiata per unità di angolo solido dalla particella durante un intervallo di tempo $T_1 \leq t_r \leq T_2$ è necessario integrare l'espressione precedente ed effettuare un cambio di variabile:

$$\mathcal{E} = \int_{T_1 + |\vec{r} - \vec{s}(T_1)|/c}^{T_2 + |\vec{r} - \vec{s}(T_2)|/c} R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \Big|_{t_r} dt = \int_{t_r=T_1}^{t_r=T_2} R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} dt_r . \quad (3.121)$$

⁴Eq. (3.105) coincide con Eq. (I.33) di [15].

Usando il fatto che

$$\frac{dt}{dt_r} = \frac{d}{dt_r} \left(t_r + |\vec{r} - \vec{s}(t_r)|/c \right) = 1 - \dot{\vec{s}}(t_r) \cdot \frac{\vec{r} - \vec{s}(t_r)}{c|\vec{r} - \vec{s}(t_r)|} = 1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n} \quad (3.122)$$

si ottiene per la potenza irradiata per unità di angolo solido l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^5} = \frac{e^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{4\pi c} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad (3.123)$$

dove si è indicato con θ l'angolo tra $\vec{\beta}$ e la direzione di osservazione \hat{n} .

Nel limite non relativistico si ritrova la nota dipendenza $\sin^2 \theta$ e la maggior parte della radiazione viene emessa a $\theta = \pi/2$. Nel limite ultrarelativistico, invece, quasi tutta la radiazione viene emessa ad un angolo $\theta \simeq 1/\gamma$, come si può capire dalla legge di aberrazione relativistica degli angoli:

$$\tan \theta = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin \theta_0}{\beta + \cos \theta_0} \quad (3.124)$$

da cui si vede che $\theta_0 \simeq \pi/2$ corrisponde a $\theta \simeq 1/\gamma$ nel limite $\gamma \gg 1$. Notando che per $\gamma \gg 1$ si ha $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$, per $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$ si trova

$$\frac{\sin^2 \bar{\theta}}{(1 - \beta \cos \bar{\theta})^5} \simeq \frac{1/\gamma^2}{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)^2\right)^5} \simeq \gamma^8. \quad (3.125)$$

Integrando la potenza irradiata su tutto l'angolo solido si ottiene nuovamente l'espressione Eq. (3.81):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{e^2 |\dot{\vec{\beta}}|^2}{2c} \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} d \cos \theta = \frac{2e^2 |\vec{a}|^2}{3c^3} \gamma^6, \quad (3.126)$$

dove si è usato

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5} dx = \frac{4}{3} \gamma^6; \quad (3.127)$$

infatti con il cambio di variabile $y = 1 - \beta x$ si trova (dopo qualche passaggio)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^5} dx &= \frac{1}{\beta^3} \int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{(1 - \beta^2) - 2y + y^2}{y^5} dy = \\ &= \frac{1}{\beta^3} \left[\frac{\beta^2 - 1}{4y^4} + \frac{2}{3y^3} - \frac{1}{2y^2} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} = \frac{4}{3(1 - \beta^2)^3} = \frac{4}{3} \gamma^6. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Ricordando che per un moto con $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$ si ha

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} (mv\gamma) = ma\gamma(1 + \beta^2\gamma^2) = ma\gamma^3, \quad (3.129)$$

l'espressione per la potenza irradiata può anche essere scritta nella forma equivalente

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^2}{3c^3 m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (3.130)$$

Questa espressione risulta particolarmente conveniente ad esempio se si vuole calcolare, in un acceleratore lineare, quale è il rapporto f_{rad} tra la potenza irradiata e la potenza usata per aumentare la velocità della particella, che è un buon parametro per descrivere l'efficienza dell'acceleratore. Se indichiamo con \mathcal{E} l'energia irradiata e con E l'energia della particella, si ha allora

$$f_{rad} = \frac{d\mathcal{E}/dt}{dE/dt} = \frac{\frac{2e^2}{3c^3 m^2} \left(\frac{dp}{dt} \right)^2}{\beta c \frac{dE}{dx}}. \quad (3.131)$$

Per semplificare questa espressione si può usare il fatto che da $E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2$ si ottiene $E \frac{dE}{dt} = c^2 p \frac{dp}{dt}$ e quindi $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx}$, dunque

$$f_{rad} = \frac{2}{3\beta} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right) \frac{dE/dx}{mc^2} = \frac{2}{3\beta} \frac{r_e dE/dx}{mc^2}, \quad (3.132)$$

dove si è introdotto $r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}$, quantità che per l'elettrone prende il nome di raggio classico dell'elettrone e vale approssimativamente 2.8 fm. Dall'equazione precedente si vede che f_{rad} sarà piccolo fintantochè l'energia cinetica acquistata da una particella nella distanza r_e sarà molto più piccola della sua massa di riposo, condizione che è sempre verificata data la piccolezza di r_e .

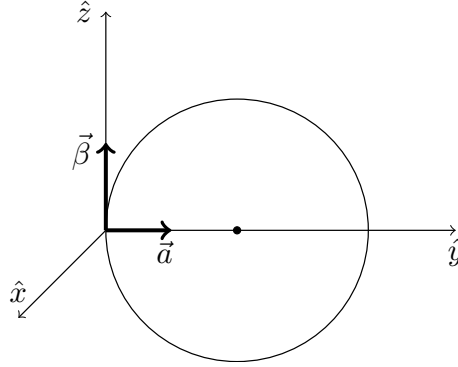


Figura 3: Geometria usata per il caso del moto circolare uniforme.

Passiamo ora ad analizzare il caso del moto circolare uniforme. In questo caso la dipendenza angolare è un po' più complicata e per scrivere le espressioni in modo esplicito considereremo il caso in cui il piano della circonferenza sia il piano $\hat{y}\hat{z}$, la velocità sia diretta lungo l'asse \hat{z} e la accelerazione lungo \hat{y} , quindi $\vec{\beta} = (0, 0, \beta)$ e $\vec{a} = (0, a, 0)$ (vedi Fig. (3)); la direzione di osservazione \hat{n} sarà parametrizzata da $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, dove quindi θ è l'angolo tra \hat{n} e la velocità. Usando la stessa formula generale dedotta per il caso dell'accelerazione lineare, l'energia irradiata per unità di tempo (ritardato) e per unità di angolo solido si scrive come

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = R^2 \vec{S} \cdot \hat{n} \frac{dt}{dt_r} = R^2 \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}), \quad (3.133)$$

che nel caso specifico diventa

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{|\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5}. \quad (3.134)$$

Usando la relazione $\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{q}) = \vec{w}(\vec{v} \cdot \vec{q}) - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{q}$ questa si può riscrivere come

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|(\hat{n} - \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \vec{a}) - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})\vec{a}|^2}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^5} \quad (3.135)$$

e si ha

$$\begin{aligned} & |(\hat{n} - \vec{\beta})(\hat{n} \cdot \vec{a}) - (1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})\vec{a}|^2 = \\ & = a^2(1 - 2\beta \cos \theta + \beta^2) \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2(1 - \beta \cos \theta)^2 - 2a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \beta \cos \theta) = \\ & = a^2(1 - \beta \cos \theta)^2 - \frac{1}{\gamma^2} a^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (3.136)$$

quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right). \quad (3.137)$$

Come nel caso della accelerazione lineare la maggior parte della radiazione viene emessa nel limite ultrarelativistico ad un angolo $\bar{\theta} \lesssim 1/\gamma$. Usando questo valore e $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ si ottiene $1 - \beta \cos \bar{\theta} \simeq 1/\gamma^2$ e quindi

$$\frac{1}{(1 - \beta \cos \bar{\theta})^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \bar{\theta} \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \bar{\theta})^2} \right) \simeq \gamma^6 (1 - \sin^2 \phi) \quad (3.138)$$

mentre il corrispondente fattore per $\theta = 0$ vale $8\gamma^6$.

La potenza totale irradiata si può ottenere integrando su tutto l'angolo solido:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt_r} &= \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \int \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right) d\phi d \cos \theta = \\ &= \frac{e^2 a^2}{2c^3} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \beta x)^3} \left(1 - \frac{1 - x^2}{2\gamma^2 (1 - \beta x)^2} \right) dx \end{aligned} \quad (3.139)$$

Usando il cambio di variabile $y = 1 - \beta x$ si ottiene

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 - \beta x)^3} dx = -\frac{1}{\beta} \int_{1+\beta}^{1-\beta} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2\beta} \left[\frac{1}{y^2} \right]_{1+\beta}^{1-\beta} = 2\gamma^4 \quad (3.140)$$

mentre il secondo integrale è della forma Eq. (3.128). Si trova quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4, \quad (3.141)$$

compatibilmente con la Eq. (3.81) trovata in precedenza.

Se si considera una particella carica che si muove su una circonferenza di raggio ρ si ha allora $a = v^2/\rho$ e l'energia persa in un periodo $T = 2\pi\rho/v$ è data da

$$\Delta E = T \frac{d\mathcal{E}}{dt_r} = \frac{4\pi e^2}{3\rho} \beta^3 \gamma^4 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{\rho} \right) \beta^3 m c^2 \gamma^4 = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{\rho} \right) \beta^3 E \gamma^3, \quad (3.142)$$

dove si è nuovamente indicato con $r_e = e^2/(mc^2)$ il raggio classico della particella e con E la sua energia. Poichè ad esempio per un elettrone si ha $r_e \simeq 2.8$ fm, il rapporto r_e/ρ è sempre molto più piccolo dell'unità, tuttavia il fattore γ^3 è potenzialmente in grado di bilanciarlo. Se si considera ad esempio un elettrone di energia $E \simeq 105$ GeV che si muove su una circonferenza di raggio 3 Km (dati approssimativamente corrispondenti ai valori di LEP-II), si ottiene

$$\frac{\Delta E}{E} \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{2.8 \text{ fm}}{3 \text{ Km}} \left(\frac{105 \text{ GeV}}{0.5 \text{ MeV}} \right)^3 \simeq 0.036. \quad (3.143)$$

L'intensità spettrale della radiazione emessa da una particella carica in moto circolare uniforme ha una struttura peculiare, la cui caratteristica principale è il fatto di essere piccata ad una frequenza molto alta, nota come frequenza critica, che vale $\omega_c = \omega_0 \gamma^3$, dove ω_0 è la frequenza di rotazione. Per una deduzione completa dello spettro ed in particolare di questa relazione si rimanda a [7] §74 o [4] §14.6, tuttavia esiste un semplice argomento fisico [15] per spiegare almeno qualitativamente il valore di ω_c . Consideriamo una particella che si muove a velocità ultrarelativistica: si è notato in precedenza che l'angolo a cui viene emessa la maggior parte della radiazione è $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$. Se la particella si muove su una traiettoria di raggio R , una quantità di radiazione significativa verrà quindi emessa in direzione di un osservatore lontano solo per l'intervallo di tempo ritardato $\Delta t_r \simeq (R/c)\bar{\theta}$ (in cui si è approssimato $v \simeq c$ e stiamo trascurando fattori dell'ordine dell'unità). Questo è infatti il tempo ritardato in cui una quantità significativa di radiazione emessa è abbastanza "allineata"

con l'osservatore da essere rivelata. Il corrispondente intervallo di tempo in cui viene l'osservatore rivela la radiazione è

$$\Delta t = t^{(1)} - t^{(2)} = t_r^{(1)} + \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{s}(t_r^{(1)})| - t_r^{(2)} - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{s}(t_r^{(2)})| \simeq (1 - \beta \cos \bar{\theta})\Delta t_r . \quad (3.144)$$

Usando $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ e $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$ si trova allora

$$\Delta t \simeq \frac{R}{c\gamma^3} \quad (3.145)$$

che corrisponde ad una frequenza caratteristica $\frac{c}{R}\gamma^3 \simeq \omega_0\gamma^3$.

4 Reazione di radiazione

Consideriamo una carica elettrica soggetta ad una forza esterna conservativa \vec{F}_{ext} non nulla. A causa della accelerazione la carica irraggerà e di conseguenza perderà energia, quindi l'equazione di moto $\dot{\vec{p}} = \vec{F}_{ext}$ non descriverà correttamente la fisica del problema (almeno per tempi abbastanza grandi da fare in modo l'energia irraggiata sia una frazione significativa dell'energia iniziale), in quanto da questa equazione si deduce la conservazione dell'energia della particella. Per tenere conto della radiazione emessa si aggiunge nella equazione del moto un termine di forza \vec{F}_{rad} chiamato comunemente “reazione di radiazione”, anche se come si vedrà questa terminologia non è completamente appropriata.

La prima deduzione dell'espressione della reazione di radiazione che sarà presentata si basa sul principio di conservazione dell'energia, come esposta ad es. in [4] §16.1, per un modo diverso di procedere nel caso non relativistico vedi [7] §75. Si seguirà poi [7] §76 per la generalizzazione relativistica, quindi si presenterà una versione “efficace” dell'argomento Abraham-Lorentz (vedi [4] §16.3 per la procedura standard). Un modo ancora diverso di procedere è quello *a là* Dirac, vedi [11] §6-5. Per una discussione molto approfondita anche dal punto di vista storico vedi [16].

4.1 Argomento euristico non relativistico

Consideriamo in questa sezione il caso di particella in moto non relativistico. Per tenere conto della perdita di energia per irraggiamento \vec{F}_{rad} deve ovviamente essere una forza dissipativa ed un vincolo naturale da imporre è che il lavoro fatto da questa forza corrisponda alla perdita di energia data dalla formula di Larmor, ovvero

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}^2 dt . \quad (4.1)$$

Scrivendo \dot{v}^2 come $\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}) - \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}}$ nel secondo membro si ottiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{rad} \cdot \vec{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}} dt ; \quad (4.2)$$

nel caso di un moto periodico si ottiene quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F}_{rad} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} \right) \cdot \vec{v} dt = 0 . \quad (4.3)$$

Un buon candidato per \vec{F}_{rad} è quindi

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\vec{v}} . \quad (4.4)$$

4.2 Generalizzazione relativistica

Considereremo in questa sezione la generalizzazione relativistica della reazione di radiazione Eq. (4.4), ovvero

$$m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + F_{rad}^\mu \quad (4.5)$$

dove ora il punto indica la derivazione rispetto al tempo proprio e u^μ è la quadrivelocità.

Oltre al vincolo dinamico di riprodurre la relazione di Larmor, F_{rad}^μ deve ora soddisfare anche un vincolo cinematico, ovvero $u_\mu F_{rad}^\mu = 0$. Questo segue dal fatto che $u_\mu \dot{u}^\mu = 0$ (conseguenza di $u_\mu u^\mu = c^2$) e $u_\mu F_{ext}^\mu = 0$, dove questa condizione si ottiene in due modi diversi a seconda che F_{ext}^μ sia una forza di tipo elettromagnetico o indipendente dalla carica. In questo ultimo caso l'equazione del moto di una particella neutra è $m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu$ e quindi la trasversalità di F_{ext}^μ segue dalla trasversalità di \dot{u}^μ . Nel caso in cui F_{ext} abbia origine elettromagnetica si ha $F_{ext}^\mu \propto F^{\mu\nu} u_\nu$, dove

$F^{\mu\nu}$ è il tensore di campo, e quindi $u_\mu F_{ext}^\mu = 0$ a causa della antisimmetria di $F^{\mu\nu}$. La condizione di trasversalità delle forze non è niente altro che una condizione di consistenza tra le componenti spaziali e temporali dell'equazione del moto, necessaria per fare in modo che $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ rimanga valida durante il moto.

La scelta naturale per F_{rad}^μ sarebbe $\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{u}^\mu$, che è un quadrivettore le cui componenti spaziali si riducono a Eq. (4.4) nel limite non relativistico, tuttavia questo quadrivettore non rispetta la condizione di trasversalità, che significa che il limite non relativistico della componente temporale non è quello corretto. Si può allora aggiungere un termine del tipo Au^μ , che nel sistema di riferimento di quiete istantanea ha solo la componente temporale non nulla, per correggere questo difetto, dove A è una costante da determinarsi:

$$F_{rad}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{u}^\mu + Au^\mu . \quad (4.6)$$

Imponendo $u_\mu F_{rad}^\mu = 0$ si ottiene (derivando $u_\mu \dot{u}^\mu = 0$ si trova $u_\mu \ddot{u}^\mu + \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu = 0$)

$$c^2 A = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} u_\mu \ddot{u}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu \quad (4.7)$$

e quindi

$$F_{rad}^\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu \dot{u}_\nu \dot{u}^\nu \right) . \quad (4.8)$$

Questo è un quadrivettore che soddisfa il vincolo cinematico e che nel limite non relativistico si riduce al risultato corretto, quindi è la corretta (ed unica) generalizzazione relativistica di Eq. (4.4). Nel secondo termine di questa espressione si riconosce l'opposto del quadriimpulso irraggiato, dato da Eq. (3.75) e si pone quindi il problema di capire l'origine del primo termine, spesso chiamato termine di Schott. Si vede da questa espressione che la terminologia "reazione di radiazione" è impropria, in quanto ci sono anche altri contributi, legati all'energia accumulata nella regione di campo vicino. Un fatto curioso (che ha generato parecchia confusione) e che rende manifesto che ci sia altro oltre all'effetto di "rinculo dovuto all'emissione di radiazione" è che $F_{rad}^\mu = 0$ per una carica in moto relativistico uniformemente accelerato.

Verifichiamo l'ultima affermazione fatta, cioè che per una carica soggetta ad una accelerazione uniforme il termine di "reazione di radiazione" si annulla. Ricordiamo che in relatività ristretta si parla di accelerazione costante quando è costante (in modulo e verso) la accelerazione vista nel sistema di riferimento inerziale istantaneamente solidale al corpo accelerato. Tutte le quantità osservate in questo sistema di riferimento saranno indicate con un pedice S . Per riscrivere questa condizione in modo più esplicito partiamo dalla quadrivelocità, che in un sistema di riferimento generico si scrive $u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$. Usando $d\gamma/dt = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^3$ si ottiene per la quadriaccelerazione l'espressione

$$a_\mu = \dot{u}_\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \left(\gamma^4 \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c}, \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{c^2} \gamma^4 \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) , \quad (4.9)$$

quindi nel sistema inerziale solidale si ha

$$u_S^\mu = (c, 0) , \quad a_S^\mu = (0, \vec{a}_S) . \quad (4.10)$$

L'espressione generale di \dot{a}^μ è piuttosto complicata, tuttavia dall'espressione di a^μ , tenendo solo le derivate che non si annullano nel limite di velocità nulla, si vede abbastanza facilmente che

$$\dot{a}_S^\mu = \left(\frac{\vec{a}_S^2}{c}, \frac{d\vec{a}_S}{dt_S} \right) . \quad (4.11)$$

Consideriamo ora il quadrivettore $V^\mu = \dot{a}^\mu - \dot{a}_\nu u^\nu / c^2$, che per costruzione ha componente temporale nulla nel sistema solidale al corpo accelerato. In particolare usando le formule precedenti si ha

$$V_S^\mu = \left(0, \frac{d\vec{a}_S}{dt_S} \right) . \quad (4.12)$$

Per un moto uniformemente accelerato si ha per definizione $d\vec{a}_S/dt_S = 0$, quindi $V_S^\mu = 0$. Poichè un quadrivettore nullo in un sistema di riferimento è nullo in ogni sistema di riferimento la condizione di accelerazione uniforme si può quindi scrivere $V^\mu = 0$, ovvero (usando analogamente a quanto fatto in precedenza $u_\mu \ddot{u}^\mu + \dot{u}_\mu \dot{u}^\mu = 0$)

$$\dot{a}^\mu + a_\nu \dot{u}^\nu / c^2 = 0 \quad (4.13)$$

che non è altro che $F_{rad}^\mu = 0$.

4.3 Limite puntiforme di una carica estesa (Abraham-Lorentz)

Se si considera una carica estesa è necessario considerare al tempo t non solo le forze esterne, ma anche le forze che agiscono sul punto \vec{r} della carica dovute al campo di radiazione generato dai punti \vec{r}' al tempo t_{ret} . Il risultato dipende ovviamente dalla forma della distribuzione di carica utilizzata ed il calcolo viene tipicamente svolto assumendo per semplicità la distribuzione corrispondente ad una distribuzione sferica di carica (vedi [4] §16.3). Solo alla fine si considera il limite in cui il raggio della carica tende a zero, in modo da riottenere il risultato Eq. (4.8) per una carica puntiforme.

Mentre i dettagli del calcolo risultano piuttosto complessi, le idee fisiche fondamentali ed il risultato finale si possono ottenere in modo abbastanza diretto. Consideriamo quindi una particella carica caratterizzata da una massa m , una carica e ed un raggio tipico a . Supponiamo di aver effettuato il calcolo completo della forza e di avere quindi ottenuto (per fissato valore di a) l'equazione del moto

$$m\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + F_{rad}^\mu \quad (4.14)$$

e procediamo ad analizzare la forma possibile di F_{rad}^μ . Questa è la forza totale dovuta alla radiazione generata dalla particella che agisce sulla particella stessa e deve poter essere scritta in termini di u^μ , \dot{u}^μ , \ddot{u}^μ e tutte le derivate di ordine superiore di u^μ , che sono le uniche variabili globali che caratterizzano la particella nel limite $a \rightarrow 0$.

Per tenere conto in modo sistematico della condizione di trasversalità delle forze è conveniente introdurre $P^{\mu\nu}$ definito da

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{u^\mu u^\nu}{c^2}. \quad (4.15)$$

È semplice verificare che $P^{\mu\nu}u_\nu = 0$ e che $P^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho}P^{\rho\sigma} = P^{\mu\sigma}$, quindi P è il proiettore sull'iperpiano ortogonale alla quadrivelocità e di conseguenza si può scrivere

$$F_{rad}^\mu = P^{\mu\nu}G_\nu, \quad (4.16)$$

dove G_ν è un quadrivettore che non deve soddisfare nessun vincolo di trasversalità.

Se supponiamo che la dipendenza di G_μ da u^μ e tutte le sue derivate sia analitica, si può sviluppare G_μ , ottenendo

$$G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu + C\ddot{\ddot{u}}_\mu + \dots + D\dot{u}_\mu(\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu) + \dots, \quad (4.17)$$

dove il primo \dots indica termini lineari contenenti derivate di ordine superiore ed il secondo \dots indica termini contenenti potenze di grado più elevato di u_μ e delle sue derivate. Sono stati omissi sin dal principio i termini proporzionali a u^μ , che sono eliminati in modo banale dalla contrazione con il proiettore $P^{\mu\nu}$.

Passiamo ora ad analizzare i coefficienti A, B, C, D, \dots : poichè tutta la dipendenza da u_μ e dalle sue derivate è stata fattorizzata, i coefficienti possono dipendere solo dalle proprietà intrinseche della particella⁵ (m, e ed a) e da costanti fondamentali (c). Questa dipendenza è in gran parte determinata dalla analisi dimensionale:

- $[A] = \text{massa}$, quindi A deve essere scrivibile in termini di m ed $e^2/(ac^2)$
- $[B] = \text{massa} \times \text{tempo}$, quindi dipende da ma/c e e^2/c^3
- $[C] = \text{massa} \times \text{tempo}^2$, quindi dipende da ma^2/c^2 e e^2a/c^4
- $[D] = \text{massa} \times \text{tempo}^2/\text{velocità}^2$, quindi dipende da ma^2/c^4 e e^2a/c^6

Risulta evidente che mano a mano che si procede con lo sviluppo si ottengono termini contenenti potenze via via più elevate del raggio a , che vogliamo però fare tendere a zero. Nel limite $a \rightarrow 0$ gli unici termini superstiti sono A e B , che devono essere scrivibili in termini di $m, e^2/(ac^2)$ ed e^2/c^3

⁵Ovviamente una altra proprietà della particella è la sua forma, ma supporremo di considerare il limite $a \rightarrow 0$ a forma fissata.

rispettivamente. Chiaramente $e^2/(ac^2)$ diverge per $a \rightarrow 0$ e questo è ovviamente un problema, supponiamo per ora di avere a finito ma sufficientemente piccolo da poter trascurare tutti i termini tranne quelli moltiplicati per A e B .

Usando $G_\mu = A\dot{u}_\mu + B\ddot{u}_\mu$ si ottiene quindi

$$F_{rad}^\mu = P^{\mu\nu}G_\nu = A\dot{u}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu - \frac{1}{c^2}u^\mu\ddot{u}_\nu u^\nu\right) = A\dot{u}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right) \quad (4.18)$$

e l'equazione del moto può essere scritta nella forma

$$(m - A)\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + B\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right). \quad (4.19)$$

Il termine A modifica quindi il valore della massa della particella carica e la sua interpretazione è la seguente: ad una carica ferma è associata una energia elettrostatica $\propto e^2/a$, che contribuisce alla inerzia della particella e deve essere tenuta in conto quando si vuole studiare il moto di una carica. Si può quindi pensare ad m come un termine di massa non elettromagnetico (presente anche per particelle neutre) ed a $-A$ come un termine di massa elettromagnetico (presente solo per particelle cariche). La separazione di questi due termini è ovviamente artificiale, in quanto non si può spostare una carica senza muovere il campo elettrostatico ad essa associato, quindi l'unica quantità realmente osservabile è $m_R = m - A$, dove R stà per "rinormalizzata", usando la terminologia tipica della teoria quantistica dei campi (m corrisponde in questa teminologia alla massa "nuda"). La massa rinormalizzata m_R deve essere tenuta fissa mentre si effettua il limite $a \rightarrow 0$, in quanto m_R sarà la massa fisicamente osservabile della particella puntiforme. Nel limite $a \rightarrow 0$ l'equazione del moto assume quindi la forma

$$m_R\dot{u}^\mu = F_{ext}^\mu + b\frac{e^2}{c^3}\left(\ddot{u}^\mu + \frac{1}{c^2}u^\mu\dot{u}_\nu\dot{u}^\nu\right), \quad (4.20)$$

dove b è una costante adimensionale universale (in linea di principio potrebbe ancora dipendere dalla forma della particella, considerato che si è usato il limite $a \rightarrow 0$ a forma costante, tuttavia appare ragionevole che nel limite $a \rightarrow 0$ il risultato diventi indipendente dalla forma).

Per fissare il valore di questa costante si può a questo punto imporre che la diminuzione di energia dovuta alla presenza del termine aggiuntivo bilanci l'energia irraggiata. Nel limite non relativistico le componenti spaziali del termine di reazione di radiazione si possono scrivere $b\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}}$ e se consideriamo un campo di forze \vec{F}_{ext} che si annulla a grande distanza (quindi $\dot{\vec{v}} = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$) il lavoro fatto dalla reazione di radiazione è

$$L_{rad} = b\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{\vec{v}} \cdot \vec{v} dt = -b\frac{e^2}{c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\vec{v}}^2 dt \quad (4.21)$$

e quindi si deve avere $b = 2/3$.

4.4 Problemi e limiti della formulazione

Il problema fondamentale dell'equazione

$$m(\dot{\vec{v}} - \tau\ddot{\vec{v}}) = \vec{F}_{ext}, \quad \tau \equiv \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}, \quad (4.22)$$

è la presenza della derivata terza della posizione nell'equazione del moto, che richiede quindi una ulteriore condizione iniziale. Una condizione intuitivamente ragionevole che si potrebbe pensare di usare è

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0, \quad (4.23)$$

tuttavia questa condizione non elimina soluzioni patologiche neppure nel caso $\vec{F}_{ext} = 0$, come mostra la “soluzione di fuga”

$$\dot{\vec{v}}_{ra}(t) = \vec{a}_0 e^{t/\tau}, \quad (4.24)$$

che soddisfa sia l'equazione del moto $\dot{\vec{v}} - \tau \ddot{\vec{v}} = 0$ che la condizione in Eq. (4.23).

Un modo per escludere la soluzione di fuga Eq. (4.24) consiste nell'imporre la condizione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{\vec{v}}(t) = 0. \quad (4.25)$$

Ovviamente questa condizione (come anche la precedente Eq. (4.23)) ha senso solo nel caso che la forza esterna agisca per un intervallo di tempo limitato. Questa condizione si può implementare passando dall'equazione differenziale Eq. (4.22) ad una versione integro-differenziale della stessa: si riscrive prima di tutto l'equazione nella forma

$$-\frac{d}{dt} \left(e^{-t/\tau} m \dot{\vec{v}}(t) \right) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \vec{F}_{ext}(t), \quad \vec{F}_{ext}(t) \equiv \vec{F}_{ext}(\vec{x}(t)) \quad (4.26)$$

che viene poi integrata usando Eq. (4.25):

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^\infty e^{-t'/\tau} \vec{F}_{ext}(t') dt', \quad (4.27)$$

che può essere riscritta, introducendo la variabile di integrazione $s = (t' - t)/\tau$, nella forma

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \int_0^\infty e^{-s} \vec{F}_{ext}(t + \tau s) ds \quad (4.28)$$

Questa equazione presenta tuttavia dei problemi di causalità: se consideriamo una forza esterna del tipo $\vec{F}_{ext}(t) \equiv \vec{F}_0 \Theta(t)$, con $\vec{F}_0 = \text{costante}$, si ottiene

$$m \dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}_0 \int_0^\infty e^{-s} \Theta(t + \tau s) ds = \vec{F}_0 \int_{\max(0, -t/\tau)}^\infty e^{-s} ds = \begin{cases} \vec{F}_0 & \text{per } t > 0 \\ \vec{F}_0 e^{t/\tau} & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

ovvero la particella comincia ad accelerare prima della accensione della forza (“pre-accelerazione”).

Si è visto nella sezione precedente come l'equazione Eq. (4.22) emerga sviluppando in serie un termine che contiene in realtà dei ritardi. Ci si aspetta quindi che l'equazione stessa abbia senso solo nel limite in cui questo sviluppo è ragionevole, cosa che è vera quando la variazione relativa della accelerazione $\Delta \dot{\vec{v}}/\dot{\vec{v}}$ è piccola in un tempo caratteristico del sistema. Il tempo naturale per il ritardo è a/c (dove con a indichiamo come nella sezione precedente una dimensione tipica della particella), tuttavia dimensionalmente si vede emergere anche la scala temporale τ indicata in Eq. (4.22), che per particelle abbastanza piccole è la scala di tempo più grande disponibile. Appare quindi ragionevole supporre che il limite di validità dell'equazione Eq. (4.22) sia

$$1 \gg \frac{\dot{\vec{v}}(t + \tau) - \dot{\vec{v}}(t)}{\dot{\vec{v}}(t)} \simeq \frac{\tau \ddot{\vec{v}}(t)}{\dot{\vec{v}}(t)} \quad (4.30)$$

quindi l'equazione ha senso solo quando il termine di reazione di radiazione è piccolo rispetto al termine dominante.

Per determinare quali sono i limiti di applicabilità nel caso in cui F_{ext} sia una forza di tipo elettromagnetico si può quindi procedere in modo perturbativo: dapprima si calcola la accelerazione dall'equazione del moto ottenuta trascurando completamente la reazione di radiazione, quindi si usa la forma di questa accelerazione per stimare l'intensità della reazione di radiazione. Consideriamo esplicitamente il caso in cui $\vec{F}_{ext} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$ con $v \ll c$: se si trascura la reazione di radiazione si ha

$$m \dot{\vec{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.31)$$

e quindi

$$\ddot{\vec{v}} = \frac{e}{m} \dot{\vec{E}} + \frac{e}{mc} \dot{\vec{v}} \times \vec{B} + \frac{e}{mc} \vec{v} \times \dot{\vec{B}} \simeq \frac{e}{m} \dot{\vec{E}} + \frac{e^2}{m^2 c} \vec{E} \times \vec{B}, \quad (4.32)$$

in cui nell'ultima espressione si è sostituito a $\dot{\vec{v}}$ il valore dato dall'equazione del moto e si sono trascurati i termini lineari nella velocità (supposta piccola). Questa espressione può ora essere sostituita nella reazione di radiazione, ottenendo una equazione che non contiene più $\ddot{\vec{v}}$. Affinche si abbia $|\vec{F}_{rad}| \ll |\vec{F}_{ext}|$ devono quindi essere soddisfatte le relazioni

$$|\tau \dot{\vec{E}}| \ll |\vec{E}|, \quad \frac{e^2 \tau}{mc} |\vec{E} \times \vec{B}| \ll e |\vec{E}|. \quad (4.33)$$

Per stimare l'ordine di grandezza di questi limiti usiamo $\dot{E} \sim \omega E$, da cui si ottiene

$$\lambda \gg r_e \equiv \frac{e^2}{mc^2}, \quad B \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}. \quad (4.34)$$

Notiamo esplicitamente che ci si aspetta che una trattazione non quantistica fallisca ben prima del raggiungimento dei limiti in Eq. (4.34): per poter trascurare effetti di elettrodinamica quantistica la lunghezza d'onda tipica deve essere molto maggiore della lunghezza d'onda Compton $\lambda_C \equiv \frac{\hbar}{mc}$ e si ha

$$\lambda_C = \frac{\hbar c}{e^2} r_e \simeq 137 r_e. \quad (4.35)$$

Analogamente, per poter trascurare effetti quantistici l'energia associata alla frequenza di ciclotrone $\omega_c \equiv \frac{eB}{mc}$ deve essere molto più piccola di mc^2 , quindi $B \ll \frac{m^2 c^3}{e\hbar}$ e di nuovo questo limite è circa 137 volte più grande del limite in Eq. (4.34).

5 Argomenti scelti di teoria della diffrazione

In questa sezione si considereranno alcuni argomenti base di teoria della diffrazione, utilizzando però un approccio non molto ortodosso. La diffrazione viene di solito trattata come un problema al contorno per la teoria scalare (vedi ad es. [17] per un testo introduttivo di ottica), tuttavia questo approccio, ancorchè più diretto, nasconde parzialmente la profonda relazione tra la diffrazione e la più generale teoria dello scattering. L'approccio che si seguirà (parzialmente ispirato al testo [14]) è probabilmente meno versatile di quello classico, tuttavia presenta il vantaggio di mettere in evidenza le connessioni tra la teoria della diffrazione e l'irraggiamento elettromagnetico, oltre ad aggirare tutte le problematiche relative alle correttezza ed autoconsistenza delle condizioni al contorno usate. Un altro vantaggio è quello di utilizzare fin da principio una formulazione vettoriale (per un approccio "classico" alla diffrazione vettoriale vedi [4] §10.6-10.7).

"This pattern is generally explained in terms of the so-called Huygen's principle, which tells us to consider each point on a wavefront as a new source of radiation and add the "radiation" from all of the new "sources" together. Physically this makes *no* sense at all. Light does not emit light; only accelerating charges emit light. Thus we will begin by throwing out Huygen's principle completely; later we will see that it actually does give the right answer for the wrong reasons" ([14] §8.6).

5.1 Richiami di radiazione di dipolo elettrico

Il punto di partenza è l'espressione del potenziale vettore generato da una distribuzione di carica, che nel sistema di Gauss è (il termine tra parentesi quadre, che ignoreremo nel seguito di questa sezione, è il fattore di conversione al sistema SI, vedi Sez. (A.3))

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \right] \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV' . \quad (5.1)$$

Supponiamo ora r molto maggiore del raggio tipico della distribuzione di carica, in modo da poter usare $1/|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq 1/r$, supporremo inoltre che la velocità di variazione della densità di carica sia abbastanza piccola da poter trascurare gli effetti di ritardo e poter quindi usare $t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c \simeq t - r/c$. Con queste approssimazioni l'espressione generale si riduce a quella della approssimazione di dipolo elettrico (per i termini successivi vedi Sez. (A.5))

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{cr} \int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) dV' \quad (5.2)$$

e l'integrale a secondo membro può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned} \int j_i(\vec{r}', t - r/c) dV' &= \int (j_k(\vec{r}', t - r/c) \partial'_k) r'_i dV' = \\ &= \int \partial'_k (j_k(\vec{r}', t - r/c) r'_i) dV' - \int r'_i \partial'_k j_k(\vec{r}', t - r/c) dV' . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il primo integrale si annulla in quanto $\vec{j} = 0$ al bordo della distribuzione di carica, quindi usando l'equazione di continuità si ottiene

$$\int \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) dV' = - \int \vec{r}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t - r/c)) dV' = \partial_t \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t - r/c) dV' . \quad (5.4)$$

Introducendo il momento di dipolo elettrico $\vec{p}(\vec{r}, t) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) dV'$ si ottiene quindi

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (5.5)$$

Il campo magnetico nella regione di radiazione ($kr \gg 1$) ha la forma

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \simeq \frac{1}{rc} \vec{\nabla} \times \dot{\vec{p}}(t - r/c) = -\frac{1}{rc^2} \hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \quad (5.6)$$

dove $\hat{n} = \vec{r}/r$ e si sono trascurati dei termini $\mathcal{O}(r^{-2})$. Per quanto riguarda il campo elettrico nella zona di radiazione, possiamo evitare di partire dal potenziale scalare e usare $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$, da cui si ottiene (di nuovo trascurando termini $\mathcal{O}(1/r^2)$)

$$\frac{1}{rc^3} \hat{n} \times [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (5.7)$$

e quindi

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc^2} \hat{n} \times [\hat{n} \times \ddot{\vec{p}}(t - r/c)] = -\frac{1}{rc^2} \ddot{\vec{p}}_{\perp}(t - r/c) \quad (5.8)$$

dove

$$\vec{p}_{\perp} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{p}) = \vec{p} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{p}) \quad (5.9)$$

è la componente del dipolo ortogonale alla linea di vista. Nel caso particolare $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ si ha quindi

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2}{r} \vec{p}_{0\perp} e^{-i(\omega t - kr)} & (\omega = ck) \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{k^2}{r} \hat{n} \times \vec{p}_{0\perp} e^{-i(\omega t - kr)} & (\hat{n} \times \vec{p}_0 = \hat{n} \times \vec{p}_{0\perp}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Calcoliamo ora la potenza irradiata: è necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting, che nel caso della zona di radiazione si scrive come $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$. Scegliamo coordinate polari con l'asse z diretto lungo \hat{p} al tempo di interesse, quindi usando Eq. (5.8) ed chiamando θ l'angolo tra \hat{n} e \hat{p} si ottiene $|\hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{p})| = |\hat{p}| \sin \theta$, da cui

$$P = \int \vec{S} \cdot \hat{n} r^2 d \cos \theta d\phi = \frac{1}{2c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right], \quad (5.11)$$

dove il fattore tra quadre dell'ultima espressione è il fattore necessario per convertire il risultato nel sistema SI. Nel caso del dipolo oscillante $\vec{p}(t) = \vec{p}_0 e^{-i\omega t}$ si deve mediare su un periodo il risultato precedente, oppure calcolare il flusso del vettore di Poynting mediato sul tempo $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$, dove $\langle \cdot \rangle$ indica la media temporale. Nel caso di quantità quadratiche (come appunto il vettore di Poynting) la notazione complessa non può essere usata ciecamente ed occorre sostituire esplicitamente le parti reali dei campi, quindi $\vec{E} \rightarrow (\vec{E} + \vec{E}^*)/2$ ed analogamente per \vec{B} , ottenendo

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \langle \vec{E} \times \vec{B}^* + \vec{E}^* \times \vec{B} \rangle \quad (5.12)$$

dove le componenti in cui compaiono due volte i campi con la stessa frequenza ($\vec{E} \times \vec{B}$ e $\vec{E}^* \times \vec{B}^*$) si mediano a zero. Nel caso di un campo di radiazione si ha $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$ e l'equazione precedente si riduce a

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}, \quad (5.13)$$

che differisce dal caso di campo reale solo per un fattore $1/2$. Esplicitamente abbiamo quindi (scegliendo l'asse z delle coordinate polari nella direzione di \vec{p}_0)

$$\langle P \rangle = \int \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 d \cos \theta d\phi = \frac{c}{4} k^4 |\vec{p}_0|^2 \int_{-1}^1 \sin^2 \theta d \cos \theta = \frac{c}{3} k^4 |\vec{p}_0|^2 \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right]. \quad (5.14)$$

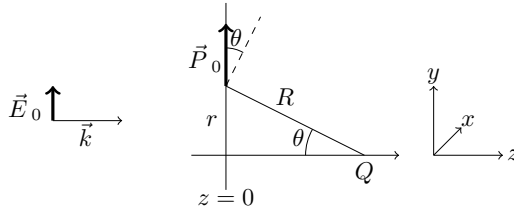


Figura 4: Le geometria necessaria per la Sez. (5.2).

5.2 Polarizzabilità di uno schermo opaco

Consideriamo un'onda piana incidente ortogonalmente su una schermo sottile di materiale. Indichiamo con \vec{P}_0 la densità superficiale di polarizzazione indotta sul materiale dall'onda. In generale il valore di \vec{P}_0 è proporzionale alla polarizzazione dell'onda incidente \vec{E}_0 , con coefficiente dato dalla suscettività dielettrica. Nella presente sezione si vuole determinare la relazione tra \vec{P}_0 e \vec{E}_0 nel caso in cui lo schermo sia completamente opaco. Per fare ciò si calcolerà prima di tutto il campo elettrico generato da un piano con polarizzazione superficiale $\vec{P}_0 e^{-i\omega t}$ (corrispondente al campo incidente $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$), piano che supporremo coincidere con il piano $z = 0$, quindi si determinerà la relazione tra \vec{P}_0 e \vec{E}_0 che garantisce interferenza distruttiva per $z > 0$.

Per il calcolo del campo generato si possono seguire due approcci diversi: il primo approccio è "costruttivo" e consiste nel sommare i contributi del campo di radiazione di tutti i dipoli oscillanti, l'altra approccio è invece più macroscopico e riduce il problema alla soluzione delle equazioni di Maxwell aventi come sorgente una densità di corrente oscillante su un piano.

Partiamo con il primo approccio: indicando con \vec{E}_{gen} il campo generato dalla polarizzazione piano si ha in generale, usando Eq. (5.10),

$$\vec{E}_{gen}(Q) = k^2 e^{-i\omega t} \int_{\Sigma} \vec{P}_{0\perp} \frac{e^{ikR}}{R} d\Sigma \quad (5.15)$$

ed è necessario prima di tutto calcolare $\vec{P}_{0\perp}$. Usando le convenzioni in Fig. (4) si ha $\vec{P}_0 = P_0(0, 1, 0)$, se si introducono coordinate polari sul piano Σ e si indica con ϕ il corrispondente angolo polare si ha inoltre $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, quindi $\hat{n} \cdot \vec{P}_0 = P_0 \sin \theta \sin \phi$ e di conseguenza

$$\vec{P}_{0\perp} = \vec{P}_0 - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{P}_0) = (-P_0 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi, P_0 - P_0 \sin^2 \theta \sin^2 \phi, -P_0 \sin \theta \cos \theta \sin \phi). \quad (5.16)$$

Poichè è necessario integrare su tutto il piano e l'angolo ϕ compare solo in $\vec{P}_{0\perp}$ si può usare

$$\int_0^{2\pi} \vec{P}_{0\perp} d\phi = (0, 2\pi P_0 - \pi P_0 \sin^2 \theta, 0) = (0, \pi P_0 + \pi P_0 \cos^2 \theta, 0) \quad (5.17)$$

e limitarsi nel seguito a considerare solo la componente \hat{y} . Resta quindi da calcolare

$$E_{gen}(Q) = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty (1 + \cos^2 \theta) \frac{e^{ikR}}{R} r dr = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_0^\infty \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{e^{ikR}}{R} r dr \quad (5.18)$$

dove si è usato $R \cos \theta = z$. Questa espressione può essere semplificata passando alla variabile indipendente R ($R^2 = r^2 + z^2$, $RdR = r dr$):

$$E_{gen} = k^2 \pi P_0 e^{-i\omega t} \int_z^\infty \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) e^{ikR} dR. \quad (5.19)$$

Consideriamo dapprima il primo termine dell'integrale: se la lamina non fosse infinita ma fosse un disco di raggio L molto grande si otterrebbe

$$\int_z^{\sqrt{z^2+L^2}} e^{ikR} dR = \frac{1}{ik} (e^{ik\sqrt{z^2+L^2}} - e^{ikz}) \simeq \frac{e^{ikL} - e^{ikz}}{ik} \quad (5.20)$$

inoltre, poichè $kL \gg 1$, il primo termine è molto sensibile ai dettagli del bordo della lamina e, assumendo che esistano delle piccole imperfezioni della scala della lunghezza d'onda della luce, si media a zero⁶. Si può quindi usare

$$\int_z^\infty e^{ikR} dR \simeq -\frac{e^{ikz}}{ik} . \quad (5.21)$$

Il secondo termine nell'integrale che definisce E_{gen} non può essere svolto in forma chiusa, tuttavia siamo interessati al campo nella regione di radiazione $kz \gg 1$ (altrimenti servirebbe anche la componente vicina del campo di dipolo), quindi l'integrale può essere sviluppato come segue:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty \frac{e^{ikR}}{R^2} dR &= \frac{1}{R^2} \frac{e^{ikR}}{ik} \Big|_z^\infty + \int_z^\infty \frac{2}{R^3} \frac{e^{ikR}}{ik} dR = \\ &= -\frac{e^{ikz}}{ikz^2} + \frac{2}{R^3} \frac{e^{ikR}}{(ik)^2} \Big|_z^\infty + \int_z^\infty \frac{6}{R^4} \frac{e^{ikR}}{(ik)^2} dR = \\ &= -\frac{e^{ikz}}{ikz^2} - 2 \frac{e^{ikz}}{(ik)^2 z^3} + \dots \simeq -\frac{e^{ikz}}{ikz^2} . \end{aligned} \quad (5.22)$$

Rimettendo insieme i pezzi e ripristinando i vettori si ottiene quindi

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)} \quad (5.23)$$

dove si è introdotto il valore assoluto di z in quanto in tutta la deduzione z è sempre stata la distanza dallo schermo e non la coordinata della direzione ortogonale.

Nel secondo approccio si usa il fatto che una polarizzazione oscillante \vec{P} genera una densità di corrente $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ quindi si riconduce il problema alla soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di una densità di corrente $-i\omega \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$ sul piano $z = 0$ e densità di carica nulla. Come nell'approccio precedente supponiamo \vec{P}_0 orientato lungo l'asse \hat{y} e siamo in cerca di soluzioni che siano onde uscenti (nell'approccio precedente questo era automatico poichè derivava dalla forma del campo di radiazione che a sua volta derivava dai potenziali ritardati, ora questa condizione deve essere imposta come condizione al contorno). Data la geometria piana del sistema la parte oscillante sarà quindi del tipo $e^{-i(\omega t - k|z|)}$, come in effetti era stato ottenuto in precedenza. Dalle equazioni di Maxwell segue (integrando su piccole superfici o volumi come si fa di solito) che il campo \vec{E} è continuo in $z = 0$, che le componenti B_y e B_z del campo magnetico sono continue mentre per la componente B_x si ha $B_x(z = 0^+) - B_x(z = 0^-) = \frac{4\pi}{c} j_y$. Utilizzando la relazione valida in zona di radiazione $\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$ abbiamo allora che il campo deve essere della forma

$$\begin{cases} B_x(z > 0) = -\alpha e^{-i(\omega t - kz)} \\ E_y(z > 0) = \alpha e^{-i(\omega t - kz)} \end{cases} \quad \begin{cases} B_x(z < 0) = \beta e^{-i(\omega t + kz)} \\ E_y(z > 0) = \beta e^{-i(\omega t + kz)} \end{cases} \quad (5.24)$$

da cui si vede che affinché \vec{E} sia continuo si deve avere $\alpha = \beta$ e quindi usando $j_y = -i\omega P_0 e^{-i\omega t}$ si trova $\alpha = 2\pi ik P_0$ e nuovamente

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)} . \quad (5.25)$$

Notiamo che in questo caso a questa soluzione possiamo aggiungere a piacere una qualunque onda piana e si otterrebbe ancora una soluzione. Quella riportata sopra è la componente della soluzione che dipende esplicitamente dalla presenza della corrente, ovvero quello che in precedenza era stato indicato con \vec{E}_{gen} .

Il campo totale è quindi dato da

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 2\pi ik \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)} \quad (5.26)$$

⁶Da un punto di vista più formale si può mostrare procedendo analogamente a quanto fatto in Sez. (A.4) che il termine e^{ikL}/ik ha per $L \rightarrow \infty$ supporto solo nel punto $k = 0$, ma in questo contesto k è fisso e diverso da zero.

e se si vuole che per $z > 0$ non sia presente campo si deve imporre

$$\vec{P}_0 = -\frac{\vec{E}_0}{2\pi ik} . \quad (5.27)$$

Utilizzando Eq. (5.27) si può ora anche calcolare il campo per $z < 0$ (ovvero dal lato illuminato della lamina), ottenendo l'espressione completa

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i\omega t} (e^{ikz} - e^{-ikz}) & \text{per } z < 0 \\ 0 & \text{per } z > 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

quindi il campo si annulla vicino allo schermo sia per z positivi che per z negativi: una lastra opaca si comporta quindi come una lastra metallica.

Nel caso appena trattato non c'è dissipazione (in quanto il campo elettrico totale si annulla nella regione dove è presente la corrente) e il corpo opaco si comporta come uno specchio. Se si vuole costruire l'analogo di un corpo opaco che assorbe tutta la radiazione incidente si possono usare due piani di corrente invece di una sola. Si è appena visto che una densità superficiale di corrente $\vec{j}_0 e^{-i\omega t}$ nel piano $z = 0$ produce il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{2\pi}{c} \vec{j}_0 e^{-i(\omega t - k|z|)}$ ed è facile vedere con una traslazione che il campo generato da una corrente superficiale nel piano $z = z_0$ sarebbe $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{2\pi}{c} \vec{j}_0 e^{-i(\omega t - k|z - z_0|)}$. Supponiamo quindi di avere sul piano $z = 0$ la densità di corrente superficiale $\vec{j}_0^{(a)}$ e sul piano $z = z_0$ la densità di corrente $\vec{j}_0^{(b)}$. Se su questo sistema incide un'onda piana il campo elettrico totale è quindi

$$\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(a)} e^{-i(\omega t - k|z|)} - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(b)} e^{-i(\omega t - k|z - z_0|)} . \quad (5.29)$$

Se vogliamo che per $z < 0$ sia presente solo il campo dell'onda incidente dobbiamo imporre

$$\vec{j}_0^{(a)} + e^{ikz_0} \vec{j}_0^{(b)} = 0 , \quad (5.30)$$

inoltre se vogliamo che per $z > z_0$ non sia presente nessun campo dobbiamo imporre

$$\vec{E}_0 - \frac{2\pi}{c} \vec{j}_0^{(a)} - \frac{2\pi}{c} e^{-ikz_0} \vec{j}_0^{(b)} = 0 , \quad (5.31)$$

da cui si ottiene

$$\vec{j}_0^{(a)} = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{1 - e^{-2ikz_0}} \vec{E}_0 , \quad \vec{j}_0^{(b)} = -\frac{c}{2\pi} \frac{e^{-ikz_0}}{1 - e^{-2ikz_0}} \vec{E}_0 . \quad (5.32)$$

La corrente $\vec{j}_0^{(b)}$ non dissipa energia in quanto in $z = z_0$ il campo elettrico si annulla, mentre la potenza media dissipata dalla corrente $\vec{j}_0^{(a)}$ è

$$\langle P_{diss} \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{Re}(\vec{j}_0^{(a)} \cdot \vec{E}_0^*) \rangle = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_0|^2 \text{Re} \left(\frac{1}{1 - e^{-2ikz_0}} \right) = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 , \quad (5.33)$$

che bilancia il flusso entrante del vettore di Poynting. Se vogliamo che la relazione tra $\vec{j}_0^{(a)}$ e \vec{E}_0 sia reale dobbiamo scegliere $e^{-2ikz_0} = -1$, da cui si trova $z_0 = \frac{\lambda}{4}(1 + 2n)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Questo caso corrisponde ad una resistività superficiale $4\pi/c$, che in MKS diventa (usando le regole di conversione di Sez. (A.3))

$$\frac{4\pi}{c} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \simeq 377\Omega . \quad (5.34)$$

5.3 Diffrazione da una apertura

Consideriamo uno schermo opaco (coincidente con il piano $z = 0$) con una apertura di forma generica, su cui incide perpendicolarmente l'onda piana $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$. Il campo elettrico complessivo sarà dato da $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_{gen}^{sch}$, dove \vec{E}_{gen}^{sch} è il campo generato dai dipoli oscillanti indotti sullo schermo.

Usando la densità superficiale di polarizzazione in Eq. (5.27) (in realtà questo non è rigorosamente vero: si stanno trascurando le correnti microscopiche presenti al bordo dell'apertura) è quindi possibile ottenere \vec{E}_{gen}^{sch} per integrazione. Un modo più comodo di procedere è usare il principio di sovrapposizione lineare. Supponiamo di avere un pezzo di lamina avente esattamente la forma dell'apertura sullo schermo, ed indichiamo con \vec{E}_{gen}^{ap} il campo che questo pezzo di lamina

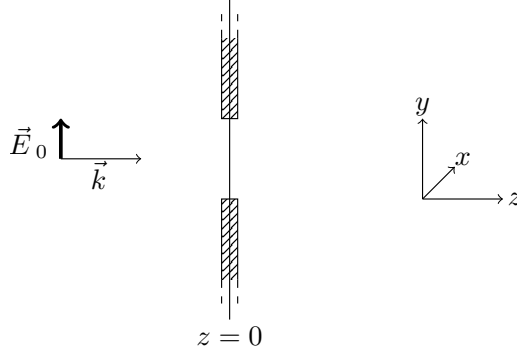


Figura 5: Le geometria necessaria per studiare la diffrazione da una apertura.

genererebbe quando incide su di esso il campo \vec{E}_{in} . Il campo a destra della lamina si può allora scrivere come

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = (\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{sch}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)) - \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) \stackrel{z \geq 0}{\cong} -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) \quad (5.35)$$

dove si è usato il fatto che $\vec{E}_{gen}^{sch}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)$ è il campo generato dalla lamina completa (senza apertura), che scherma completamente il campo incidente essendo la lamina opaca. Il fatto che il campo generato da un ostacolo piano sia uguale (a meno di una fase globale) al campo generato da una lamina piana con un foro della stessa forma dell'ostacolo è noto come principio di Babinet. Per ottenere il campo per $z > 0$ basta dunque calcolare $\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t)$, che richiede di integrare la polarizzazione sullo spazio corrispondente alla apertura dello schermo. Tutto quindi funziona “come se” la apertura irraggiasse, a parte un segno meno di differenza (Huygens).

Esplicitamente, usando Eq. (5.27) e Eq. (5.10), si ottiene per il campo diffratto l'espressione (Σ' è la apertura e \vec{r}' la cordinata dei punti dell'apertura)

$$\vec{E}_{diff} = -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) = -\frac{ike^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{\Sigma'} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{0\perp} e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}|} d\Sigma' \quad (5.36)$$

dove $\hat{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ e

$$\vec{E}_{0\perp} = -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) = \vec{E}_0 - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{E}_0). \quad (5.37)$$

Nel caso in cui la distanza di osservazione sia maggiore del raggio tipico dell'apertura (limite Fraunhofer⁷, $r' \ll r$) l'espressione precente può essere notevolmente semplificata usando

$$|\vec{r}' - \vec{r}| \simeq r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}; \quad \hat{n} \simeq \frac{\vec{r}}{r}, \quad (5.38)$$

ottenendo quindi (introducendo la notazione $\vec{k} = k\hat{n}$)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{diff} &= -\vec{E}_{gen}^{ap}(\vec{r}, t) = -\frac{ike^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \vec{E}_{0\perp} \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' = \\ &= \frac{ike^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' \end{aligned} \quad (5.39)$$

Indichiamo con $F(\vec{k})$ l'integrale rimanente in Eq. (5.39), la cui forma specifica dipende ovviamente dai dettagli della forma dell'apertura. Nel caso di una apertura di dimensioni tipiche D

⁷Normalmente il limite di Fraunhofer è definito come il caso in cui sia la sorgente sia il punto di osservazione sono molto distanti dalla apertura. Dato che noi abbiamo considerato dal principio il caso di diffrazione generata da un'onda piana, la condizione sulla sorgente è automaticamente soddisfatta.

molto maggiori della lunghezza d'onda, tuttavia, l'integrale sarà fortemente oscillante e tenderà ad annullarsi in tutti casi in cui k_x o k_y sono non nulli. Formalmente (vedi Sez. (A.4))

$$\begin{aligned} F(\vec{k}) &= \int_{\Sigma'} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \simeq \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy = \\ &= (2\pi)^2 \delta(k_x) \delta(k_y) = \frac{(2\pi)^2}{k^2} \delta(n_x) \delta(n_y) \end{aligned} \quad (5.40)$$

e quindi nel limite $kD \rightarrow \infty$ si avrà solo diffrazione in avanti.

Calcoliamo ora il flusso di energia diffratta (vedi Eq. (5.13)) nel caso della diffrazione Fraunhofer Eq. (5.39). Si ha

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{ck^2}{32\pi^3 r^2} |\vec{E}_0|^2 \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 \hat{n}, \quad (5.41)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{E}_0 (che si è sempre supposto giacere sul piano $z = 0$) e \hat{n} . La potenza totale diffratta si ottiene integrando il flusso di $\langle \vec{S} \rangle$ su una emisfera posizionata sul lato $z > 0$ dello schermo:

$$P_{diff} = \frac{ck^2}{32\pi^3} |\vec{E}_0|^2 \int_{z>0} \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (5.42)$$

Nel caso di apertura grande rispetto a λ si può usare Eq. (5.40)⁸:

$$\int_{z>0} \sin^2 \theta |F(\vec{k})|^2 d\Omega \simeq \frac{(2\pi)^2}{k^2} \int_{z>0} \delta(n_x) \delta(n_y) F(\vec{k})^* \sin^2 \theta d\Omega = \frac{(2\pi)^2}{k^2} F(k\hat{z})^* = \frac{(2\pi)^2 A}{k^2}, \quad (5.43)$$

dove A è l'area della apertura sullo schermo, ottenendo quindi per la potenza diffratta l'espressione

$$P_{diff} = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A \quad (\text{caso } kD \gg 1). \quad (5.44)$$

D'altra parte la potenza incidente da $z = -\infty$ sull'area A ottenuta trascurando effetti diffrattivi si ottiene semplicemente usando $\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ ed il risultato è $\frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A$, come ci si sarebbe dovuti aspettare in vista del fatto che il limite $kD \rightarrow \infty$ corrisponde al limite dell'ottica geometrica.

5.4 Diffrazione da un ostacolo e teorema ottico

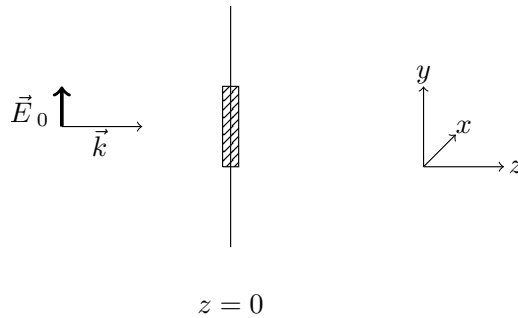


Figura 6: Le geometria necessaria per studiare la diffrazione da un ostacolo.

In questa sezione si considera il caso duale di quello analizzato nella sezione precedente, ovvero una onda elettromagnetica piana che incide ortogonalmente su un bersaglio piano opaco. Il campo

⁸In realtà usando semplicemente Eq. (5.40) si otterrebbe una δ^2 che non è ben definita, nell'equazione seguente si utilizzerà il metodo più comunemente usato di regolarizzazione: in $|F|^2$ solo un F viene scritto come δ . Per un metodo diverso di procedere vedi Sez. (A.4).

totale sarà quindi dato dalla somma del campo incidente $\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ e del campo generato dalla polarizzazione del bersaglio, dunque (usando Eq. (5.36) con il segno modificato)

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \frac{ik e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{\Sigma'} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{0\perp} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} d\Sigma'; \quad (5.45)$$

il secondo termine corrisponde alla luce diffratta e sarà nel seguito indicato con \vec{E}_s . Nel limite di Fraunhofer l'espressione precedente si semplifica in (vedi Eq. (5.39))

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{ik e^{-i(\omega t - kr)}}{2\pi r} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' \quad (5.46)$$

e quindi, per grandi distanze dall'ostacolo, \vec{E}_s si può scrivere come il prodotto di una onda sferica uscente e di un termine che racchiude tutta la dinamica del processo diffrattivo, la ampiezza di scattering $\vec{f}(\vec{k})$:

$$\vec{E}_s(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \vec{f}(\vec{k}); \quad \vec{f}(\vec{k}) = -\frac{ik}{2\pi} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) \int_{\Sigma'} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} d\Sigma' \quad (5.47)$$

Analogamente al caso trattato nella sezione precedente, la potenza diffratta si calcola come l'integrale del flusso del vettore di Poynting associato a \vec{E}_s , solo che in questo caso l'integrale deve essere esteso ad una superficie chiusa e non ad una emisfera. È conveniente usare come superficie di integrazione Σ una sfera, per fare in modo che la normale uscente alla superficie \hat{n}_Σ coincida con il versore $\hat{n} = \vec{r}/r$ che compare nella espressione dei campi ed abbiamo dunque (vedi Eq. (5.12))

$$P_s = \frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_s \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_s^* \times \vec{B}_s) \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \frac{c}{8\pi} \int_{\Sigma} |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\Omega \quad (5.48)$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido. Oltre alla potenza diffratta si può anche calcolare la potenza assorbita P_{abs} , data dal flusso entrante (quindi il segno meno nella seguente equazione, dato che \hat{n}_Σ è la normale uscente) del vettore di Poynting associato a \vec{E}_{tot} su una superficie che contiene l'ostacolo:

$$P_{abs} = -\frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{tot} \times \vec{B}_{tot}^* + \vec{E}_{tot}^* \times \vec{B}_{tot}) \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma. \quad (5.49)$$

La potenza dissipata (nel senso di sottratta al fascio incidente) nel processo di scattering è dunque $P_{diss} = P_{abs} + P_s$ che, notando che il flusso su una superficie chiusa del vettore di Poynting di \vec{E}_{in} è nullo, può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} P_{diss} &= -\frac{c}{16\pi} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{in} \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_{in}^* \times \vec{B}_s + \vec{E}_s \times \vec{B}_{in}^* + \vec{E}_s^* \times \vec{B}_{in}) \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \\ &= -\frac{c}{8\pi} \text{Re} \int_{\Sigma} (\vec{E}_{in} \times \vec{B}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{B}_{in}^*) \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma \end{aligned} \quad (5.50)$$

Se si normalizzano le potenze P_s, P_{abs}, P_{diss} con la densità di flusso di energia incidente (cioè $c|\vec{E}_0|^2/(8\pi)$), si ottengono la sezione d'urto di diffrazione (o scattering) σ_s , la sezione d'urto di assorbimento σ_{abs} e la sezione d'urto totale (o di estinzione) σ_{tot} .

Se consideriamo il caso in cui le dimensioni tipiche D dell'ostacolo sono molto maggiori della lunghezza d'onda incidente si ha

$$\int_{\Sigma} |\vec{f}(\vec{k})|^2 d\Omega = \frac{k^2}{(2\pi)^2} |\vec{E}_0|^2 \int_{\Sigma} \sin^2 \theta F(\vec{k}) \frac{(2\pi)^2}{k^2} \delta(n_x) \delta(n_y) d\Sigma = 2|\vec{E}_0|^2 F(k\hat{z}) = 2|\vec{E}_0|^2 A, \quad (5.51)$$

dove θ è l'angolo tra \vec{E}_0 e \hat{n} , si è usata Eq. (5.40) e si è indicata con A l'area dell'ostacolo. Il fattore 2 è dovuto al fatto che si sta integrando su tutto l'angolo solido e le $\delta(n_x)\delta(n_y)$ selezionano sia $k\hat{z}$ che $-k\hat{z}$, inoltre $F(k\hat{z}) = F(-k\hat{z}) = A$. Si è notato in precedenza che un ostacolo opaco

corrisponde in elettromagnetismo classico ad un ostacolo perfettamente riflettente; il termine $-k\hat{z}$ corrisponde alla luce riflessa. Se l'ostacolo fosse "perfettamente assorbente", invece di riflettente, si otterrebbe il risultato $|\vec{E}_0|^2 A$. La potenza diffratta è quindi per un ostacolo perfettamente riflettente data da

$$P_s = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_0|^2 A \quad (\text{caso } Dk \gg 1) \quad (5.52)$$

e dunque $\sigma_s = 2A$, mentre nel caso di ostacolo perfettamente assorbente si troverebbe $\sigma_s = A$.

Il calcolo di P_{diss} non risulta completamente elementare neppure nel limite di ottica geometrica $kD \rightarrow \infty$, in quanto negli integrandi sono presenti dei termini rapidamente oscillanti $e^{ik(z-r)}$. Per procedere sarebbe necessario utilizzare la approssimazione di fase stazionaria bidimensionale, vedi [18] §A.III, A.XII per un caso analogo. Per il calcolo di P_{abs} si può invece procedere come segue: dato che oltre all'ostacolo non sono presenti altre sorgenti di radiazione elettromagnetica, in Eq. (5.49) si può scegliere come superficie Σ la superficie dell'ostacolo, inoltre si è visto in precedenza (vedi Eq. (5.28)) che il campo totale si annulla da entrambi i lati della lastra opaca, quindi si ottiene $P_{abs} = 0$, $\sigma_{abs} = 0$. Nel caso invece di ostacolo totalmente assorbente si otterrebbe $P_{abs} = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 A$, quindi $\sigma_{abs} = A$. Di conseguenza la sezione d'urto di estinzione (che è quella necessaria per calcolare la perdita di energia del fascio incidente) è data, nel limite di ottica geometrica, da $\sigma_{tot} = 2A$ sia nel caso di ostacolo riflettente che di ostacolo assorbente.

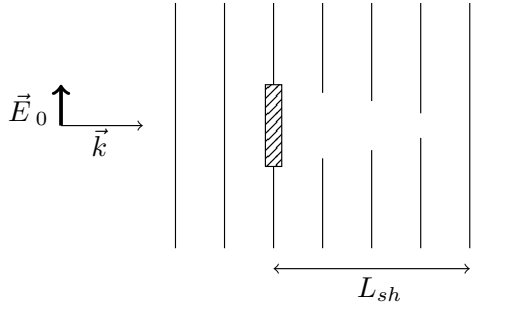


Figura 7: Andamento qualitativo dei fronti d'onda dietro l'ostacolo.

Può apparire strano che nel limite di ottica geometrica $Dk \rightarrow \infty$ la sezione d'urto totale risulti essere data dal doppio $2A$ dell'area dell'ostacolo e non dall'area A , come sarebbe a prima vista naturale attendersi. È quindi interessante analizzare in dettaglio la cosa.

Notiamo innanzitutto che il risultato $\sigma_{tot} = 2A$ è quello che è naturale attendersi usando il principio di Babinet: un ostacolo piano genera lo stesso campo diffratto di una lastra con un foro della stessa forma dell'ostacolo. Se si accetta il fatto che un foro in una lastra abbia nel limite di ottica geometrica sezione d'urto $\sigma_{tot} = A$, si deve allora anche accettare il fatto che un ostacolo piano, oltre a riflettere tutta la luce che gli incide sopra, generi un campo di diffrazione analogo a quello del foro; la sua sezione d'urto totale è quindi $\sigma_{tot} = A + A = 2A$.

Cerchiamo ora di capire dove la applicazione intuitiva dell'ottica geometrica fallisca nel calcolo della sezione d'urto totale. Il limite di ottica geometrica richiede $\lambda \ll D$ mentre il calcolo della sezione d'urto totale richiede di essere ad una distanza r dall'ostacolo molto maggiore di *tutte* le lunghezze caratteristiche, che a prima vista sembrerebbero essere solo D e λ , mentre in realtà esiste anche una altra scala di lunghezza.

L'andamento qualitativo dei fronti d'onda dietro un ostacolo è mostrato in Fig. (7): subito dietro l'ostacolo è presente una zona d'ombra, in cui il campo è molto piccolo, zona d'ombra che si stringe allontanandosi dall'ostacolo fino a scomparire ad una distanza L_{sh} da esso. Per ogni valore λ piccolo ma finito la funzione $F(\vec{k})$ non è esattamente una δ di Dirac e le componenti k_x, k_y dell'onda diffratta sono piccole ma non nulle, aventi valore tipico $\sim 1/D$ (vedi le espressioni esplicite in Sez. (A.4)). Di conseguenza la zona d'ombra dietro l'ostacolo può in prima approssimazione essere rappresentata come un cono di apertura angolare $\simeq (Dk)^{-1}$ e la lunghezza L_{sh} è quindi dell'ordine di $L_{sh} \simeq D^2/\lambda$. A questo punto si vede che il limite $\lambda/D \ll 1$ ed il limite $r \gg \lambda, D, L_{sh}$ confliggono, in quanto L_{sh} diverge quando λ diventa piccola.

Se si vuole calcolare la sezione d'urto totale vera e propria è allora necessario calcolare il flusso del vettore di Poynting per un dato valore di λ usando una distanza $r(\lambda) \gg D, L_{sh}$, quindi mandare $Dk \rightarrow 0$ cambiando di volta in volta $r(\lambda)$ e rimanendo sempre al di fuori della zona d'ombra (ovvero, in pratica, sempre fuori dalla regione di validità dell'ottica geometrica in senso stretto); in questo modo si ottiene il risultato dedotto in precedenza $\sigma_s = 2A$.

Poichè si ha tipicamente $D, \lambda \ll L_{sh}$, in alcuni casi può avere senso dal punto di vista sperimentale calcolare il flusso di energia attraverso una sfera di raggio $D, \lambda \ll r \ll L_{sh}$, nel qual caso il risultato dipende dalla risoluzione

angolare dello strumento usato: se lo strumento è abbastanza preciso da risolvere angoli dell'ordine di λ/D (e quindi distinguere il campo diffratto dal campo incidente) si ottiene ancora $\sigma_{tot} = 2A$, altrimenti si trova il risultato "intuitivo" $\sigma_{tot} \simeq A$. Per una discussione teorica di queste problematiche vedi [19], per alcuni risultati sperimentali che mostrano il passaggio della sezione d'urto sperimentale da A a $2A$ allontanandosi dall'ostacolo vedi [20, 21]

Si è appena visto che nel limite $D\kappa \rightarrow \infty$ si ha $\sigma_{tot} = 2A$ e quindi $P_{diss} = \frac{cA}{4\pi} |\vec{E}_0|^2$; usando l'espressione esplicita della ampiezza di scattering in Eq. (5.47) ed il fatto che $F(k\hat{z}) = A$ è allora semplice verificare che

$$P_{diss} = \frac{c}{2k} \text{Im}[\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k\hat{z})] \quad (5.53)$$

dove $\vec{f}(k\hat{z})$ è la ampiezza di scattering in avanti, o, in termini della sezione d'urto totale

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \frac{\text{Im}[\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k\hat{z})]}{|\vec{E}_0|^2} . \quad (5.54)$$

La relazione Eq. (5.53) è nota come teorema ottico ed è in realtà valida in contesti molto più generali ed indipendentemente dal limite $Dk \rightarrow \infty$.

Un metodo molto istruttivo per dimostrare il teorema ottico nella forma Eq. (5.53) è quello presentato in [22] §4.2. Consideriamo una superficie di osservazione \mathcal{A} avente dimensione tipica d molto più grande della lunghezza d'onda, in modo da essere nel limite di ottica geometrica ($d \gg \lambda$). Se calcoliamo la potenza incidente su \mathcal{A} quando è posta a grande distanza dietro l'ostacolo nella direzione del fascio (\hat{z}) ed ortogonale ad esso, il risultato che si dovrà ottenere è

$$P_{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 - P_{diss} , \quad (5.55)$$

in quanto P_{diss} è la potenza che è stata sottratta dal fascio di densità di potenza $\frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2$. Passiamo ora al calcolo esplicito: poichè si può supporre che le dimensioni tipiche d della superficie di osservazione siano molto più piccole della sua distanza dall'ostacolo ($d \ll z$), si ha su di esso

$$r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} \simeq z + \frac{x^2 + y^2}{2z} \quad (\text{su } \mathcal{A}) \quad (5.56)$$

inoltre, sempre perchè $d \ll z$, consideriamo $\vec{f}(\vec{k}) \simeq \vec{f}(k\hat{z})$, quindi l'espressione del campo incidente su \mathcal{A} può essere semplificata in

$$\vec{E}_{tot} \simeq \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \vec{f}(k\hat{z}) e^{-i(\omega t - kz)} \frac{e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}}{z} \quad (\text{su } \mathcal{A}) \quad (5.57)$$

da cui si ottiene

$$|\vec{E}_{tot}|^2 \simeq |\vec{E}_0|^2 + \frac{2}{z} \text{Re} \left(\vec{E}_0^* \cdot \vec{f}(k\hat{z}) e^{ik \frac{x^2 + y^2}{2z}} \right) . \quad (5.58)$$

Supponiamo la superficie di osservazione abbastanza grande da fare in modo che sul suo bordo si abbia $k(x^2 + y^2)/z \gg 1$, cioè $kd^2/z \gg 1$. Supponiamo quindi che

$$\sqrt{z\lambda} \ll d \ll z . \quad (5.59)$$

Allora quando si integra la funzione fortemente oscillate a secondo membro della formula per $|\vec{E}_{tot}|^2$ si può approssimare la regione di integrazione con tutto il piano \mathbb{R}^2 . Usando⁹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ikx^2}{2z}} dx = \sqrt{\frac{2\pi iz}{k}} \quad (5.60)$$

⁹Questa relazione può essere intuitivamente giustificata usando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ con $a = -\frac{ik}{2z}$, per una discussione più precisa, in particolare per la determinazione del ramo della radice da usare, vedi Sez. (A.6).

si ottiene allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} |\vec{E}_{tot}|^2 &= \mathcal{A} |\vec{E}_0|^2 + \frac{2}{z} \operatorname{Re} \left(\vec{E}_0^* \vec{f}(k \hat{z}) \frac{2\pi i z}{k} \right) = \\ &= \mathcal{A} |\vec{E}_0|^2 - \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} [\vec{E}_0^* \vec{f}(k \hat{z})] \end{aligned} \quad (5.61)$$

e dal confronto con Eq. (5.55) si ottiene subito il teorema ottico.

Notiamo esplicitamente che in nessun punto della dimostrazione del teorema ottico si è usata la forma esplicita della ampiezza di scattering. Gli unici ingredienti essenziali sono stati: il fatto di poter scrivere il campo totale nella forma

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + \vec{f}(\vec{k}) \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \quad (5.62)$$

ed il fatto che $\vec{f}(\vec{k})$ non fosse singolare per $\vec{k} \simeq k \hat{z}$ (che ad esempio non è vero per lo scattering Coulombiano). L'altra ipotesi fondamentale che sta alla base della deduzione è per certi versi ovvia ed è stata assunta implicitamente scrivendo Eq. (5.55), ma è importante esplicitarla: si è ipotizzato che se energia è stata sottratta al fascio allora questa energia deve essere stata o diffusa o assorbita. Si è in sostanza assunto che il fascio non possa scomparire spontaneamente, ma solo essere “deviato” dall'interazione con l'ostacolo. Si capisce quindi che la dimostrazione resta valida anche nel caso più generale trattato nella prossima sezione (ovvero ostacoli non piani), in meccanica quantistica (in cui il ruolo del campo elettrico è svolto dalla funzione d'onda, la ampiezza di scattering è uno scalare e l'equivalente della conservazione dell'energia è l'unitarietà dell'evoluzione) ed in generale per ogni fenomeno ondulatorio.

5.5 Diffrazione da un insieme discreto di punti e fattore di forma

Considereremo in questa sezione il caso in cui un'onda piana incide su un insieme discreto di centri diffusori, che in generale non saranno tutti distribuiti su uno stesso fronte d'onda, come era invece il caso nelle sezioni precedenti.

Supporremo questi centri diffusori posizionati nei punti \vec{r}_i , con $i \in 1, \dots, N$, inoltre considereremo solo il caso in cui questi diffusori non abbiano direzioni privilegiate, in modo da poter usare la relazione più semplice possibile tra la polarizzazione del diffusore ed il campo elettrico: $\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}(\vec{r}_i, t)$. Considereremo inoltre solo il caso in cui il campo totale generato dai diffusori sia molto più piccolo del campo incidente \vec{E}_{in} , in modo da poter usare $\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}_{in}(\vec{r}_i, t)$ (approssimazione di Born). Supponiamo che il campo incidente sia una onda piana con vettore d'onda \vec{k} , quindi

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.63)$$

di conseguenza i valori del parametro \vec{p}_0 che entra nella forma dei campi di dipolo elettrico Eq. (5.10) saranno dati, per i vari centri diffusori, da

$$\vec{p}_0^{(i)} = \chi \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} \quad (5.64)$$

ed il campo elettrico generato si scrive come

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = -\chi k^2 \sum_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \hat{n}_i \times (\hat{n}_i \times \vec{E}_0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_i} e^{-i\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}_i|/c)}, \quad (5.65)$$

dove $\hat{n}_i = (\vec{r} - \vec{r}_i)/|\vec{r} - \vec{r}_i|$. Se supponiamo ora che per ogni i si abbia $r_i \ll r$ si può procedere come nel caso del limite di Fraunhofer della diffrazione, ovvero utilizzare le semplificazioni

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \simeq \frac{1}{r}, \quad \hat{n}_i \simeq \hat{n} \equiv \frac{\vec{r}}{r}, \quad e^{i\omega|\vec{r} - \vec{r}_i|/c} \simeq e^{i\omega r/c} \exp\left(-i\frac{\omega}{c} \hat{n} \cdot \vec{r}_i\right). \quad (5.66)$$

Se inoltre introduciamo la notazione $\vec{k}' = k \hat{n}$ per il vettore d'onda dell'onda diffusa e $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ per la variazione di vettore d'onda, allora il campo generato si può scrivere nella forma

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = -\chi \frac{k^2 e^{-i(\omega t - kr)}}{r} \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{E}_0) \sum_i e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}} . \quad (5.67)$$

Si vede dunque che la differenza tra il caso di un singolo o di molti centri diffusori è la presenza del fattore di forma

$$F(\vec{q}) = \sum_i e^{-i\vec{r}_i \cdot \vec{q}} , \quad (5.68)$$

una forma semplificata del quale era già comparsa in precedenza (vedi Eq. (5.39) e Eq. (5.47)). Nel caso usato in precedenza tutti i punti (ad esempio) della lastra opaca erano disposti su un piano perpendicolare a quello del vettore d'onda del campo incidente, quindi l'espressione del fattore di forma era più semplice e compariva solo il vettore d'onda dell'onda uscente. Nel caso in cui invece di una distribuzione discreta di punti si abbia una distribuzione continua, $F(\vec{q})$ non è altro che la trasformata di Fourier della distribuzione (a meno di un fattore $(2\pi)^3$). A grande distanza il vettore di Poynting associato al campo generato è quindi dato da (vedi Eq. (5.13))

$$\langle \vec{S}_{gen} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_{gen}^{(0)}|^2 \hat{n} = \frac{\chi^2 k^4}{r^2} |\hat{n} \times \vec{E}_0|^2 |F(\vec{q})|^2 \hat{n} = |F(\vec{q})|^2 \langle \vec{S}_{ss} \rangle \quad (5.69)$$

dove \vec{S}_{ss} è il vettore di Poynting che corrisponde ad un singolo centro diffusore posto nell'origine; anche in questo caso tutta l'informazione sulla distribuzione dei centri diffusori è contenuta nel fattore di forma.

Considereremo ora in dettaglio due casi estremi: il caso di un gas e quello di un cristallo. Questi due casi sono estremi nel seguente senso: sui tempi scala di una osservazione tipica le particelle di un gas hanno posizioni casuali, quindi è ragionevole attendersi che ci saranno grossi effetti di interferenza distruttiva (scattering incoerente). Un cristallo rappresenta invece il caso opposto: i centri diffusori sono disposti in modo molto regolare ed è quindi naturale aspettarsi, almeno in alcune condizioni, degli effetti di risonanza (scattering coerente).

5.5.1 Caso di un gas

Consideriamo il caso di un gas perfetto (quindi le posizioni delle varie particelle sono statisticamente indipendenti) confinato in un recipiente di spigoli L_x , L_y e L_z (con $V = L_x L_y L_z$). Se indichiamo con $p(\vec{r}_i)$ la probabilità che una particella si trovi nel punto \vec{r}_i , è necessario studiare

$$\langle |F(\vec{q})|^2 \rangle \equiv \int |F(\vec{q})|^2 p(\vec{r}_1) \cdots p(\vec{r}_N) d\vec{r}_1 \cdots d\vec{r}_N . \quad (5.70)$$

Esplicitamente il modulo quadro del fattore di forma è dato da

$$|F(\vec{q})|^2 = \left(\sum_i e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right) \left(\sum_i e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} \right) = N + \sum_{i \neq j} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \quad (5.71)$$

e quindi si deve calcolare

$$\langle e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)} \rangle = \frac{1}{V^2} \int_V e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_i} d\vec{r}_i \int_V e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} d\vec{r}_j \quad (5.72)$$

Scrivendo gli integrali in coordinate cartesiane, con estremi di integrazione da $-L_i/2$ a $L_i/2$ si ottengono delle espressioni del tipo di

$$\frac{1}{L_x} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} e^{iq_x x} dx = \frac{e^{iq_x L_x/2} - e^{-iq_x L_x/2}}{iL_x q_x} = \frac{\sin(q_x L_x/2)}{q_x L_x/2} \quad (5.73)$$

quindi

$$\langle e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)} \rangle = \prod_{m=x,y,z} \left(\frac{\sin(q_m L_m/2)}{q_m L_m/2} \right)^2 \quad (5.74)$$

ed infine

$$|F(\vec{q})|^2 = N + N(N-1) \prod_{m=x,y,z} \left(\frac{\sin(q_m L_m/2)}{q_m L_m/2} \right)^2. \quad (5.75)$$

A questo punto si possono considerare diversi casi. Supponiamo che per dato valore di \vec{q} si abbia $q_m L_m \gg 1$; questo significa che il volume tipico associato a \vec{q} è molto più piccolo del volume totale disponibile. Di conseguenza i segnali provenienti da tutti i centri diffusori saranno incoerenti e ci si aspetta interferenza distruttiva tra di loro. In questo caso si ha infatti $|F(\vec{q})|^2 \simeq N$ e da Eq. (5.69) si vede che l'energia irradiata sarà N volte quella che sarebbe irradiata nel caso di un singolo centro diffusore: nel caso non ci sia coerenza di fase il flusso di energia ottenuto sommando le ampiezze è semplicemente la somma dei singoli flussi di energia.

Si può anche considerare il limite opposto, ovvero $q_m L_m \ll 1$: questo significa che il volume disponibile è molto più piccolo del volume tipico associato a \vec{q} , di conseguenza tutti i diffusori reagiranno approssimativamente allo stesso segnale e saranno in fase. Questo si manifesta nel fatto che $|F(\vec{q})|^2 \simeq N^2$, che è l'andamento tipico per la diffusione coerente. È interessante notare che, indipendentemente dai valori di L_x , L_y ed L_z , esiste sempre un caso in cui si ha diffusione coerente, ovvero $\vec{q} \simeq 0$, corrispondente al caso della diffusione in avanti.

5.5.2 Caso di un cristallo

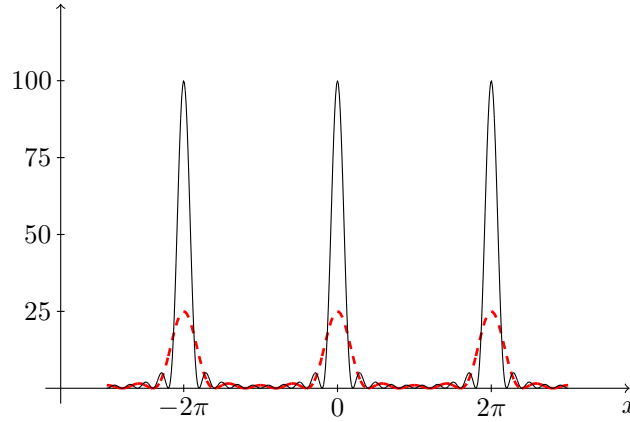


Figura 8: Grafico della funzione $\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ per $N = 5$ (linea rossa tratteggiata) e 10 (linea continua nera).

Passiamo ora ad analizzare il caso di un cristallo: se indichiamo con \vec{a}_i i vettori che caratterizzano la cella fondamentale del reticolo, le posizioni dei centri diffusori saranno date da

$$\vec{r}_{\vec{m}} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 \quad (5.76)$$

con $m_i \in \{1, \dots, N_i\}$. Di conseguenza il modulo quadro del fattore di forma si scrive

$$\begin{aligned}
|F(\vec{q})|^2 &= \sum_{\vec{n}, \vec{\ell}} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_{\vec{n}} - \vec{r}_{\vec{\ell}})} = \\
&\left(\sum_{n_1} e^{in_1 \vec{q} \cdot \vec{a}_1} \right) \left(\sum_{n_2} e^{in_2 \vec{q} \cdot \vec{a}_2} \right) \left(\sum_{n_3} e^{in_3 \vec{q} \cdot \vec{a}_3} \right) \times \\
&\times \left(\sum_{\ell_1} e^{-i\ell_1 \vec{q} \cdot \vec{a}_1} \right) \left(\sum_{\ell_2} e^{-i\ell_2 \vec{q} \cdot \vec{a}_2} \right) \left(\sum_{\ell_3} e^{-i\ell_3 \vec{q} \cdot \vec{a}_3} \right).
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Tutte queste sommatorie sono del tipo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N e^{in\alpha} &= \frac{e^{i\alpha} - e^{i(N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\alpha} e^{i\frac{N}{2}\alpha}}{e^{i\frac{\alpha}{2}}} \left(\frac{e^{-i\frac{N}{2}\alpha} - e^{i\frac{N}{2}\alpha}}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} \right) = \\
&= e^{i(N+1)\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}
\end{aligned} \tag{5.78}$$

e si ottiene quindi (con $\alpha_j = \vec{q} \cdot \vec{a}_j$)

$$|F(\vec{q})|^2 = \prod_{j=x,y,z} \left(\frac{\sin(N_j \alpha_j / 2)}{\sin(\alpha_j / 2)} \right)^2. \tag{5.79}$$

Per capire l'andamento di $F(\vec{q})$ è necessario studiare l'andamento dei fattori che sono moltiplicati in Eq. (5.79). Il grafico della funzione

$$g(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \tag{5.80}$$

è riportato in Fig. (8) e la sua caratteristica principale sono i picchi $\simeq N^2$ in corrispondenza dei multipli interi di 2π . Questo andamento è facilmente spiegabile, in quanto se $x = 2\pi m + \delta$ con $|\delta| \ll 1/N$ si ha

$$\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = \left(\frac{\sin(Nm\pi + N\delta/2)}{\sin(m\pi + \delta/2)} \right)^2 \simeq \left(\frac{N\delta/2}{\delta/2} \right)^2 = N^2. \tag{5.81}$$

Quando $\delta \simeq (2j+1)\pi/N$ (con $j \ll N$) il numeratore ha un massimo, ma il denominatore è ancora molto piccolo, quindi si ha

$$\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 = \left(\frac{\sin[(2j+1)\pi/2]}{\sin[(2j+1)\pi/(2N)]} \right)^2 \simeq \left(\frac{1}{(2j+1)\pi/(2N)} \right)^2 = \frac{4N^2}{(2j+1)^2\pi^2} \tag{5.82}$$

e questi valori corrispondono ai picchi secondari che si vedono in Fig. (8). Bisogna tuttavia notare che già per $j = 1$ la ampiezza della funzione si è ridotta a circa 0.045 volte la ampiezza al picco. Riassumendo: la funzione $g(x)$ ha dei picchi in corrispondenza dei multipli interi di 2π , inoltre questi picchi hanno valore al massimo $\simeq N^2$ e larghezza $\simeq \pi/N$.

Usando queste informazioni nel fattore di forma del cristallo Eq. (5.79), si vede che la luce diffratta sarà concentrata nelle direzioni caratterizzate dalle condizioni

$$\vec{q} \cdot \vec{a}_j = 2\pi n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}. \tag{5.83}$$

Queste sono note come condizioni di von Laue e sono alla base dell'introduzione del reticolo reciproco in fisica dello stato solido (vedi ad es. [23] §5, 6). Se consideriamo ora per semplicità il caso di un reticolo ortorombico, in cui i vettori di base della cella fondamentale sono ortogonali,

sviluppando \vec{q} sulla base di $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ si vede subito che la condizione di von Laue si può riscrivere più esplicitamente come

$$\vec{k}' - \vec{k} = 2\pi \left(n_1 \frac{\vec{a}_1}{a_1^2} + n_2 \frac{\vec{a}_2}{a_2^2} + n_3 \frac{\vec{a}_3}{a_3^2} \right). \quad (5.84)$$

Se consideriamo ora il quadrato di questa equazione si ottiene (indicando con θ l'angolo di deflessione della luce, $\vec{k} \cdot \vec{k}' = k^2 \cos \theta$)

$$2k^2(1 - \cos \theta) = 4\pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2} \right) \quad (5.85)$$

ed usando $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$ e $k = 2\pi/\lambda$ si trova la relazione di Bragg che lega l'angolo di deflessione alla lunghezza d'onda

$$2 \sin(\theta/2) = \lambda \sqrt{\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}}. \quad (5.86)$$

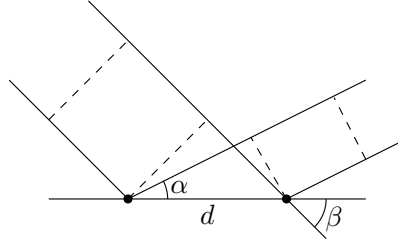


Figura 9: Schema elementare per lo scattering coerente.

Un modo elementare di chiarire la relazione di von Laue è studiare il caso dello scattering di un'onda piana da parte di due centri diffusori posti a distanza d uno dall'altro, vedi Fig. (9). Stiamo considerando il limite di Fraunhofer, quindi i vettori d'onda uscenti sono disegnati paralleli in figura. Trascurando i dettagli della polarizzazione, ci si può aspettare che si abbia interferenza costruttiva tra le due onde diffuse nel caso in cui la differenza di cammino ottico sia un multiplo intero di λ . Esplicitamente la differenza tra i cammini ottici è data da

$$\Delta = d(\cos \alpha - \cos \beta) \quad (5.87)$$

quindi la condizione di interferenza costruttiva è

$$m\lambda = d(\cos \alpha - \cos \beta), \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (5.88)$$

Se continuiamo ad usare la notazione $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ per la differenza tra il vettore d'onda diffuso e quello incidente ed introduciamo il vettore \vec{d} che caratterizza la separazione tra i due centri diffusori, si ha allora

$$\vec{q} \cdot \vec{d} = kd(\cos \alpha - \cos \beta) = \frac{2\pi d}{\lambda}(\cos \alpha - \cos \beta) \quad (5.89)$$

e la condizione Eq. (5.88) diventa $\vec{q} \cdot \vec{d} = 2\pi m$, ovvero il caso unidimensionale della condizione di von Laue Eq. (5.83).

5.6 Oltre la approssimazione di Born: la rifrazione

Nella sezione precedente si è considerato il caso di un'onda piana che incide su un insieme discreto di diffusori di suscettività dielettrica χ , tuttavia il problema non è stato trattato in tutta la sua

generalità, in quanto si è utilizzata sin da principio la approssimazione di Born per semplificare le espressioni. In questa approssimazione la polarizzazione del diffusore in posizione \vec{r}_i si approssima con

$$\vec{p}_i(t) = \chi \vec{E}(\vec{r}_i, t) \simeq \chi \vec{E}_{in}(\vec{r}_i, t), \quad (5.90)$$

dove \vec{E}_{in} è il campo incidente ed \vec{E} è il campo totale (cioè la somma del campo incidente e del campo irraggiato dai diffusori), quindi il campo generato può essere direttamente scritto nella forma Eq. (5.65).

Nel caso generale non si riesce a scrivere direttamente l'espressione per il campo generato dai diffusori in funzione di \vec{E}_{in} , ma solo una equazione integrale per il campo totale. Usando Eq. (5.8), indicando con $\vec{p}(\vec{r}_i, t)$ la polarizzazione in posizione \vec{r}_i e con \hat{n}_i il versore della direzione $\vec{r} - \vec{r}_i$, il campo generato dai diffusori si scrive infatti nella forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) &= \sum_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|c^2} \hat{n}_i \times [\hat{n}_i \times \ddot{\vec{p}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)] = \\ &= \sum_i \frac{\chi}{|\vec{r} - \vec{r}_i|c^2} \hat{n}_i \times [\hat{n}_i \times \ddot{\vec{E}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)]. \end{aligned} \quad (5.91)$$

D'altra parte il campo totale \vec{E} è la somma del campo incidente e del campo generato quindi si ha la seguente equazione di consistenza per il campo totale

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{in}(\vec{r}, t) + \sum_i \frac{\chi}{|\vec{r} - \vec{r}_i|c^2} \hat{n}_i \times [\hat{n}_i \times \ddot{\vec{E}}(\vec{r}_i, t - |\vec{r}_i - \vec{r}|/c)], \quad (5.92)$$

che è l'analogo in questo contesto dell'equazione di Lippmann-Schwinger per lo scattering in meccanica quantistica (vedi ad esempio [24] §130 o [25] §7.1).

In generale l'equazione Eq. (5.92) non può essere risolta esattamente, tuttavia analizzeremo ora un caso in cui ciò è possibile, ovvero il caso in cui un'onda piana incide su un dielettrico¹⁰. Utilizzando la formulazione dell'elettromagnetismo per i corpi macroscopici la soluzione di questo problema è ben nota: al di fuori del dielettrico il campo elettrico ha due componenti, l'onda incidente e l'onda riflessa, aventi uguale frequenza ma versi di propagazione differenti, all'interno del dielettrico è presente l'onda rifratta, che ha la stessa frequenza dell'onda incidente ma diversa lunghezza d'onda; le ampiezze di tutte queste componenti sono infine legate dalle formule di Fresnel (vedi ad es. [17] §3, [6] §86). Vedremo che a queste stesse conclusioni si arriva risolvendo l'equazione Eq. (5.92), inoltre il fatto che la somma dei campi generati dai dipoli oscillanti all'interno di un mezzo cancelli esattamente il campo incidente e generi il campo rifratto è un risultato spesso noto come teorema di estinzione di Ewald-Oseen.

Supporremo per semplicità che l'incidenza sia normale (per il caso generale vedi [18] §2.4, dove viene però seguito un procedimento leggermente diverso rispetto a quello qui adottato), sceglieremo convenzionalmente l'asse \hat{z} come verso di propagazione dell'onda incidente e supporremo che il dielettrico sia presente per $z \geq 0$. Per cominciare, calcoliamo il campo generato dal dielettrico nell'ipotesi che all'interno di esso la densità di polarizzazione abbia la forma $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$; inoltre, vista la simmetria del problema, appare naturale supporre che la polarizzazione dipenda solo dalla variabile z , quindi $\vec{P}_0(\vec{r})$ è in realtà $\vec{P}_0(z)$. Si era visto in precedenza (vedi Eq. (5.23)) che il campo generato da una lastra piana di polarizzazione in posizione $z = z'$ e con polarizzazione diretta lungo il piano è dato da

$$\vec{E}_{gen}^{(z')}(\vec{r}, t) = 2\pi i k \vec{P}_0(z') e^{-i(\omega t - k|z - z'|)}, \quad (5.93)$$

(in realtà questo risultato era stato visto solo per il caso $z' = 0$, ma la generalizzazione della dimostrazione è immediata), quindi il campo generato dalla distribuzione $\vec{P}_0(z')e^{-i\omega t}$ si scrive

¹⁰In realtà non risolveremo direttamente l'equazione integrale, piuttosto introdurremo un ansatz per la forma della polarizzazione e ripercorreremo i passi che sono stati fatti per dedurre l'equazione integrale, ottenendo delle relazioni di consistenza ad essa equivalenti che fisseranno la forma dei campi.

come

$$\vec{E}_{gen}(\vec{r}, t) = 2\pi ik \int_0^\infty \vec{P}_0(z') e^{-i(\omega t - k|z-z'|)} dz' = 2\pi ik e^{-i\omega t} \int_0^\infty \vec{P}_0(z') e^{ik|z-z'|} dz' . \quad (5.94)$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui la densità di polarizzazione abbia la distribuzione $\vec{P}_0(z') = \vec{P}_0 e^{i\tilde{k}z'}$, dove \vec{P}_0 è un vettore costante e \tilde{k} un parametro da determinarsi più avanti. Per calcolare il campo \vec{E}_{gen} è a questo punto conveniente distinguere i due casi $z > 0$ e $z < 0$. Per $z < 0$ si ha

$$\vec{E}_{gen}(z < 0) = 2\pi ik e^{-i\omega t} \int_0^\infty \vec{P}_0 e^{i\tilde{k}z'} e^{-ik(z-z')} dz' , \quad (5.95)$$

inoltre

$$\int_0^L e^{i(k+\tilde{k})z'} e^{-ikz} dz' = e^{-ikz} \frac{e^{i(k+\tilde{k})L} - 1}{i(k+\tilde{k})} \simeq \frac{i}{k+\tilde{k}} e^{-ikz} , \quad (5.96)$$

dove nell'ultimo passaggio si è trascurato, nel limite $L \rightarrow \infty$, il termine fortemente oscillante $e^{i(k+\tilde{k})L}$, analogamente a quanto fatto in Sez. (5.2). Si ha quindi

$$\vec{E}_{gen}(z < 0) = -2\pi \frac{k}{k+\tilde{k}} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)} . \quad (5.97)$$

Analogamente per $z > 0$ è necessario considerare l'integrale (in cui di nuovo si trascurano termini fortemente oscillanti)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\tilde{k}z'} e^{ik|z-z'|} dz' &= \int_0^z e^{ikz} e^{i(\tilde{k}-k)z'} dz' + \int_z^\infty e^{-ikz} e^{i(k+\tilde{k})z'} dz' \simeq \\ &\simeq e^{ikz} \frac{e^{i(\tilde{k}-k)z} - 1}{i(\tilde{k}-k)} - e^{-ikz} \frac{e^{i(k+\tilde{k})z}}{i(k+\tilde{k})} = \frac{e^{i\tilde{k}z} - e^{ikz}}{i(\tilde{k}-k)} - \frac{e^{i\tilde{k}z}}{i(k+\tilde{k})} = \\ &= \frac{i}{\tilde{k}-k} e^{ikz} - 2i \frac{k}{\tilde{k}^2 - k^2} e^{i\tilde{k}z} , \end{aligned} \quad (5.98)$$

quindi il campo generato per $z > 0$ vale

$$\vec{E}_{gen}(z > 0) = -2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 4\pi \frac{k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)} . \quad (5.99)$$

Sommando ai due contributi in Eq. (5.95) e Eq. (5.99) il campo incidente otteniamo quindi il campo totale nella forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - 2\pi \frac{k}{k+\tilde{k}} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t + kz)} & \text{per } z < 0 \\ \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - 2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - kz)} + 4\pi \frac{k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)} & \text{per } z > 0 \end{cases} . \quad (5.100)$$

Per arrivare a queste espressioni si è usato il fatto che la densità di polarizzazione avesse per $z > 0$ un andamento della forma $\vec{P}(\vec{r}, t) \propto e^{i\tilde{k}z}$, tuttavia dalla definizione di suscettività dielettrica si ha $\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi \vec{E}(\vec{r}, t)$, quindi per consistenza si deve imporre che per $z > 0$ si abbia $\vec{E}(\vec{r}, t) \propto e^{i\tilde{k}z}$. Di conseguenza i termini proporzionali a $e^{i\tilde{k}z}$ in Eq. (5.100) devono cancellarsi per $z > 0$, quindi

$$\vec{E}_0 = 2\pi \frac{k}{\tilde{k}-k} \vec{P}_0 \quad (5.101)$$

e

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{4\pi k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \vec{P}_0 e^{-i(\omega t - \tilde{k}z)} = \frac{4\pi k^2}{\tilde{k}^2 - k^2} \chi \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{per } z > 0 . \quad (5.102)$$

Da questa equazione si ottiene $4\pi k^2 \chi = \tilde{k}^2 - k^2$ e dunque

$$\tilde{k} = k \sqrt{1 + 4\pi \chi} \equiv kn , \quad (5.103)$$

in cui il segno della radice è stato fissato per continuità con il caso $\chi = 0$ (caso in cui non c'è dielettrico, non c'è campo generato e quindi $\tilde{k} = k$) e si è usata la definizione $n = \sqrt{1 + 4\pi\chi}$ dell'indice di rifrazione. Le due equazioni Eq. (5.101) e Eq. (5.103) sono le relazioni tra i parametri dell'onda incidente (\vec{E}_0 e k) ed i parametri \vec{P}_0 e \tilde{k} che erano stati usati nell'ansatz adoperato per la densità di polarizzazione del dielettrico; inserendo questi valori in Eq. (5.100) si ottiene quindi infine

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)} - \frac{n-1}{n+1} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t + kz)} & \text{per } z < 0 \\ \frac{2}{n+1} \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - nkz)} & \text{per } z > 0 \end{cases}, \quad (5.104)$$

compatibilmente con le formule di Fresnel nel caso di incidenza normale.

6 Interazione dei fotoni con la materia

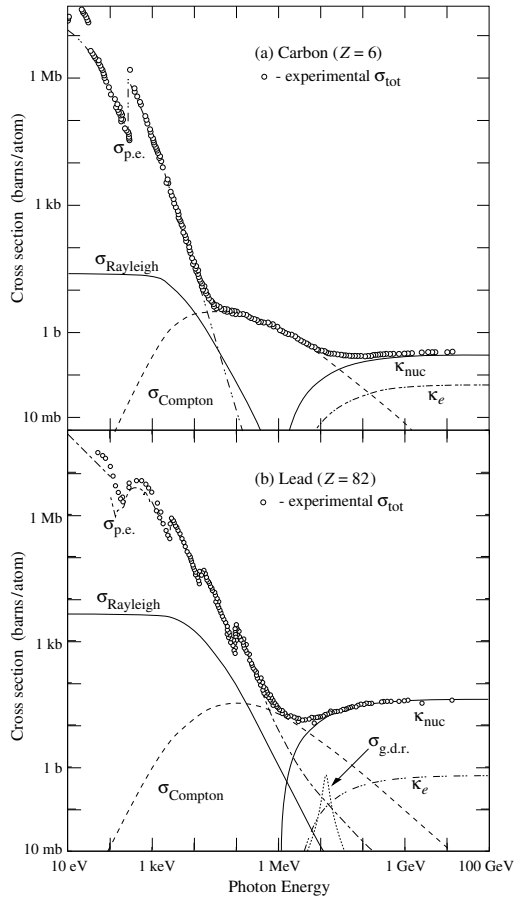


Figura 10: Sezione d'urto totale di un fotone incidente su un atomo di carbonio (alto) e piombo (basso) per diversi valori dell'energia del fotone.

Sono in particolare mostrati i contributi specifici dei vari processi:

$\sigma_{p.e.}$ effetto fotoelettrico,
 $\sigma_{Rayleigh}$ scattering Rayleigh sull'atomo,
 $\sigma_{Compton}$ scattering Compton su elettrone,
 κ_{nuc} produzione di coppie su nucleo,
 κ_e produzione di coppie su elettrone,
 $\sigma_{g.d.r.}$ interazioni fotonucleari ed in particolare Giant Dipole Resonance.

Da [26] §33 "Passage of particles through matter".

Un fotone può interagire con un atomo tramite diversi processi fisici, tra cui i principali sono l'effetto fotoelettrico, lo scattering Rayleigh, lo scattering Compton e la produzione di coppie elettrone-positrone. Quale di questi processi risulti il principale responsabile dell'interazione dipende dall'energia del fotone e dal numero atomico dell'atomo; un grafico della sezione d'urto totale fotone-atomo è riportato in Fig. (10), in cui sono anche mostrati i contributi dei vari processi.

In questa sezione si analizzerà piuttosto in dettaglio il caso dello scattering Rayleigh, che può essere trattato classicamente e consiste nella diffusione di un'onda elettromagnetica da parte degli elettroni atomici. Esso è la naturale generalizzazione dello scattering Thompson, in cui il bersaglio è costituito da una singola particella puntiforme, che può essere libera o in uno stato legato. Una trattazione completa dello scattering Compton e della produzione di coppie richiederebbe strumenti molto più raffinati di quelli qui usabili (vedi ad es. [27] §86-87, §94) tuttavia alcuni degli aspetti caratteristici di questi processi possono essere spiegati semplicemente con argomenti cinematici. L'effetto fotoelettrico consiste nell'eccitazione di un elettrone ad uno stato legato o ad uno stato del continuo (caso in cui l'atomo si ionizza), di conseguenza una trattazione dell'effetto fotoelettrico richiede in modo fondamentale l'uso della meccanica quantistica, motivo per il quale non sarà considerato nel seguito (vedi ad es. [27] §56-57 o, per una trattazione semplificata, [28] §1.4).

Notiamo infine che se i fotoni sono sufficientemente energetici possono anche interagire direttamente con il nucleo. Un esempio di questo caso è la risonanza di dipolo gigante mostrata in Fig. (10) per il piombo ed il meccanismo fisico alla base di questo tipo di processo è il seguente: il

fotone incide su un protone trasferendogli quantità di moto e , se la quantità di moto trasferita è sufficiente, si eccita uno stato collettivo nucleare di tipo vibrazionale. L'energia di questo stato sarà $\hbar\omega_\lambda$ (dove $\lambda \in \mathbb{N}$ indica il tipo di vibrazione: dipolo, quadrupolo, ...) ed è ragionevole attendersi che la frequenza ω_λ possa essere collegata ai parametri tipici della materia nucleare, che sono i coefficienti della formula semiempirica di massa ed il parametro r_0 , vedi [29] Vol 2 §6A per il calcolo esplicito. Il risultato che si ottiene è che una energia tipica per il più basso livello vibrazionale dei nuclei pesanti è dell'ordine di 10 MeV.

6.1 Scattering Thompson

Consideriamo l'interazione di un'onda elettromagnetica monocromatica con un elettrone (non relativistico) legato in un potenziale armonico di frequenza caratteristica ω_0 . Supporremo la lunghezza d'onda della radiazione incidente molto più grande della distanza tipica sulla quale si può muovere l'elettrone¹¹ (che in meccanica quantistica è dell'ordine di $\sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$) e considereremo per semplicità il caso di una onda elettromagnetica polarizzata linearmente; in queste condizioni il campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ può essere rappresentato nella forma $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, in cui non è più presente alcuna dipendenza del campo elettrico dalla posizione \vec{r} .

L'equazione del moto dell'elettrone si scrive allora nella forma (dove indichiamo con e la carica dell'elettrone, quindi $e = -|e|$)

$$m\ddot{\vec{x}} = -m\omega_0^2\vec{x} - \gamma\dot{\vec{x}} + m\tau\ddot{\vec{x}} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.1)$$

dove oltre al termine armonico sono presenti anche un termine di attrito viscoso $-\gamma\dot{\vec{x}}$ (che serve per modellizzare la presenza di altri canali di interazione che contribuiscono a far perdere energia all'elettrone senza produrre radiazione elettromagnetica di frequenza ω) ed il termine di reazione di radiazione $m\tau\ddot{\vec{x}}$ (dove $\tau = \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} \simeq 6 \times 10^{-24} s$, vedi Sez. (4)). Introducendo la notazione $\Gamma' = \gamma/m$ l'equazione del moto si riscrive nella forma

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} + \Gamma'\dot{\vec{x}} - \tau\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m}\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (6.2)$$

in cui valori tipici dei parametri sono $\Gamma' \lesssim 10^{10} \text{ Hz}$ e $\omega_0 \simeq 10^{14} \div 10^{16} \text{ Hz}$ (corrispondente alla zona dell'ultravioletto lontano, con energie dell'ordine delle decine di eV). La soluzione stazionaria di questa equazione può essere cercata nella forma $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$ ottenendo

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\omega\Gamma' - i\tau\omega^3)\vec{x}_0 = \frac{e}{m}\vec{E} \quad (6.3)$$

e quindi infine

$$\vec{x}_0 = \frac{\frac{e}{m}\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)}, \quad \Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \tau\omega^2. \quad (6.4)$$

Dall'equazione Eq. (6.4), supponendo di avere una densità numerica di N elettroni non interagenti tra loro, è semplice ottenere una espressione per la dipendenza dalla frequenza della permittività dielettrica $\epsilon(\omega)$ (per maggiori dettagli vedi ad es. [4] §7.5 o [17] cap. III). Infatti ad ogni elettrone corrisponde una polarizzazione elementare $\vec{p} = e\vec{x}$, quindi si ha una polarizzazione per unità di volume $\vec{P} = N\vec{p}$. Il vettore di induzione \vec{D} è legato al campo elettrico ed alla polarizzazione del mezzo dalla relazione $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ e la permittività dielettrica è definita (per un mezzo isotropo) come $\vec{D}(\omega) = \epsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$, da cui si ottiene

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}, \quad (6.5)$$

dove ω_p è la frequenza di plasma del mezzo. Segue da principi generali di causalità che la funzione $\epsilon(\omega)$ come funzione di $\omega \in \mathbb{C}$ deve essere analitica nel semipiano $\Im(\omega) > 0$ (vedi ad es. [4] §7.10 o [30] §123), tuttavia questo è vero per l'espressione precedente solo nel limite $\tau \rightarrow 0$, ovvero nel limite in cui si trascura la reazione di

¹¹Nota che questa precisazione non è necessaria nel limite non relativistico per il caso di una onda piana: in questo caso la polarizzazione elettrica è sempre perpendicolare al fronte d'onda e la forza che agisce sull'elettrone è quindi sempre indipendente dalla ampiezza di oscillazione.

radiazione. I punti singolari di $\epsilon(\omega)$ sono quei valori di ω in cui si annulla il denominatore e per $\tau = 0$ questi valori sono $\omega_{1,2} = -\frac{i}{2}\Gamma' \pm \sqrt{\omega_0^2 - (\Gamma'/2)^2}$, quindi $\Im(\omega_{1,2}) < 0$ poichè $\Gamma' > 0$ e $\omega_0^2 > 0$. Nel caso in cui $\tau > 0$ si può mostrare che esiste una singolarità nel semipiano superiore di ω procedendo come segue: introduciamo la notazione $f(\omega) = i\tau\omega^3 + \omega^2 + i\omega\Gamma' - \omega_0^2$, in cui $f(\omega)$ è (a meno di un segno) il denominatore che compare in $\epsilon(\omega)$; allora si ha $f(iw) = \tau w^3 - w^2 - w\Gamma' - \omega_0^2$, quindi $f(iw)$ è una funzione reale per $w \in \mathbb{R}$ e si ha $f(0) = -\omega_0^2$ e $f(iw) \rightarrow +\infty$ per $w \rightarrow \infty$ nel caso $\tau > 0$. Di conseguenza esiste un $w_3 > 0$ tale che $\omega_3 = iw_3$ è un polo di $\epsilon(\omega)$ quando $\tau > 0$. Questo è dovuto al fatto che per frequenze comparabili con $1/\tau$, come è stato visto in Sez. (4.4), l'espressione usata per la reazione di radiazione ha diversi problemi, tra cui una violazione della causalità legata alla preaccelerazione.

Si vuole ora calcolare la sezione d'urto di questo processo di scattering. Per fare ciò è prima di tutto necessario calcolare i vettori di Poynting della radiazione entrante (\vec{S}_{in}) ed uscente (\vec{S}_{out}). Nel caso delle onde elettromagnetiche è uso comune considerare il vettore di Poynting mediato su un periodo di oscillazione, che è quindi la potenza media (mediata sul tempo). Quando si lavora con campi oscillanti è uso comune usare la notazione complessa sottointendendo di dire "la parte reale di" in quanto le operazioni che si effettuano sono in genere lineari; tuttavia questo non è vero per il vettore di Poynting, che per un campo reale è dato da $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$. Per il calcolo del vettore di Poynting con i campi complessi è necessario introdurre esplicitamente la parte reale e la parte immaginaria: $\vec{E} \rightarrow (\vec{E} + \vec{E}^*)/2$ e $\vec{B} \rightarrow (\vec{B} + \vec{B}^*)/2$. Quando si considera la media temporale si ha $\langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle = \langle \vec{E}^* \times \vec{B}^* \rangle = 0$ e si resta quindi con

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \langle \vec{E} \cdot \vec{B}^* + \vec{E}^* \cdot \vec{B} \rangle, \quad (6.6)$$

che per un campo di radiazione ($\vec{B} = \hat{n} \times \vec{E}$) si riduce a $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2 \hat{n}$.

Per la radiazione entrante si ha quindi semplicemente $\langle \vec{S}_{in} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \hat{n}$, dove \hat{n} è la direzione di propagazione della radiazione incidente. Per calcolare il flusso di energia uscente è necessario usare le espressioni del campo elettrico di radiazione di Lienard-Wiechert (vedi Sez. (3.3)) con accelerazione $\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}_0 e^{-i\omega t}$, dove \vec{x}_0 è dato da Eq. (6.4). Usando le espressioni nonrelativistiche si ottiene allora per il campo generato \vec{E}_s l'espressione (dove \hat{n}' è la direzione di osservazione)

$$\vec{E}_s(t) = \frac{e}{c^2 R} \hat{n}' \times (\hat{n}' \times \vec{a}) = -\frac{e\omega^2}{c^2 R} \hat{n}' \times (\hat{n}' \times \vec{x}_0) e^{-i\omega t_r}. \quad (6.7)$$

Se indichiamo ora con α l'angolo tra la direzione di polarizzazione del campo (che è anche la direzione di \vec{x}_0) e la direzione di osservazione \hat{n}' si ha allora

$$\langle \vec{S}_{out} \rangle = \frac{c}{8\pi} |\vec{E}_s|^2 \hat{n}' = \left(\frac{c}{8\pi} \right) \frac{e^2 \omega^4}{c^4 R^2} |\vec{x}_0|^2 (\sin^2 \alpha) \hat{n}' \quad (6.8)$$

e quindi la sezione d'urto differenziale (elastica, in quanto la frequenza della radiazione incidente è uguale alla frequenza della radiazione uscente) è data nel caso di polarizzazione lineare da

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{R^2 |\langle \vec{S}_{out} \rangle|}{|\langle \vec{S}_{in} \rangle|} = \frac{e^2 \omega^4}{c^4} \frac{|\vec{x}_0|^2}{|\vec{E}_0|^2} \sin^2 \alpha = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \sin^2 \alpha \quad (6.9)$$

dove si è usata la notazione $r_e = e^2/(mc^2)$ per il raggio classico dell'elettrone.

Se si è interessati non alla sezione d'urto elastica differenziale ma alla sezione d'urto elastica è necessario integrare la precedente espressione su tutto l'angolo solido; usando un sistema di coordinate polari avente l'asse polare diretto lungo la direzione di \vec{x}_0 si ha allora

$$\int_0^\pi d\alpha \int_0^{2\pi} d\phi \sin^3 \alpha = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \alpha) |d \cos \alpha| = 2\pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{8}{3}\pi \quad (6.10)$$

per arrivare a

$$\sigma_{el} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)}. \quad (6.11)$$

Il valore $\sigma_{th} = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \simeq 0.7b$ è noto come sezione d'urto Thompson e corrisponde alla sezione d'urto di un'onda elettromagnetica su un elettrone libero (ovvero $\omega_0 = 0$ e $\Gamma' = 0$) nel caso in cui $\omega \ll 1/\tau$. Nel caso generale l'andamento di σ_{el} con la frequenza è il seguente:

- per $\omega \ll \omega_0$ si ha $\sigma_{el} \simeq \sigma_{th}(\omega/\omega_0)^4$, in particolare $\sigma_{el} \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow 0$ (un elettrone legato in un campo statico non irraggia)
- per $\omega \simeq \omega_0$ è presente un picco di σ_{el} (risonanza)
- per $\omega_0 \ll \omega \ll 1/\tau$ si ha $\sigma_{el} \simeq \sigma_{th}$
- per $\omega \gg 1/\tau$ si ha $\sigma_{el} \simeq \frac{\sigma_{th}}{1+\tau^2\omega^2}$

La forma della risonanza per $\omega \simeq \omega_0$ dipende dal valore di $\Gamma_{tot}(\omega_0)$:

- nel caso in cui $\Gamma_{tot}(\omega_0) \gtrsim \omega_0$ (risonanza “larga”) è necessario usare la forma completa Eq. (6.11), dove ricordiamo che $\Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \tau\omega^2$
- nel caso in cui $\Gamma_{tot}(\omega_0) \ll \omega_0$ (risonanza “stretta”) l'espressione Eq. (6.11) può essere semplificata come segue

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2(\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2\Gamma_{tot}^2(\omega)} \simeq \\ &\simeq \sigma_{th} \frac{\omega_0^4}{(\omega_0 - \omega)^2 4\omega_0^2 + \omega_0^2\Gamma_{tot}^2(\omega_0)} = \sigma_{th} \frac{\omega_0^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma_{tot}(\omega_0)/2)^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

ottenendo quindi un profilo lorentziano (noto anche come profilo Breit-Wigner [24] §145 in meccanica quantistica).

Consideriamo ora il caso che la radiazione incidente non sia polarizzata. Per ottenere la sezione d'urto differenziale in questo caso è necessario mediare su tutte le possibili polarizzazioni dell'onda incidente e ricordiamo che la direzione della polarizzazione entra in Eq. (6.9) tramite l'angolo α , che è l'angolo tra la direzione di osservazione \hat{n}' e la direzione della polarizzazione \hat{x}_0 . Per effettuare la media supponiamo che l'onda incidente propaghi lungo l'asse \hat{z} , quindi $\hat{n} = (0, 0, 1)$, e parametrizziamo il versore della direzione di osservazione tramite $\hat{n}' = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$, dove quindi θ è l'angolo tra la direzione della luce incidente, \hat{n} , e la direzione di osservazione \hat{n}' ; la polarizzazione dell'onda incidente deve essere perpendicolare all'asse \hat{z} ed il suo versore si può quindi scrivere nella forma $\hat{x}_0 = (\cos\psi, \sin\psi, 0)$. Usando queste espressioni si ha allora

$$\cos\alpha = \hat{x}_0 \cdot \hat{n}' = \sin\theta \cos\phi \cos\psi + \sin\theta \sin\phi \sin\psi = \sin\theta \cos(\psi - \phi) \quad (6.13)$$

e quindi

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\theta \cos^2(\psi - \phi). \quad (6.14)$$

Si deve mediare questa espressione sulle direzioni della polarizzazione, quindi è necessario considerare la media rispetto a ψ , che usando l'espressione precedente diventa

$$\begin{aligned} \langle \sin^2\alpha \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\theta \cos^2(\psi - \phi)) d\psi = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2\theta = \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \end{aligned} \quad (6.15)$$

da cui si ottiene

$$\left. \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \right|_{\text{non pol.}} = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \frac{1 + \cos^2\theta}{2}. \quad (6.16)$$

Ovviamente la media sulle polarizzazioni non cambia la sezione d'urto elastica integrata Eq. (6.11), che è indipendente dalla specifica orientazione della polarizzazione, come si vede esplicitamente effettuando l'integrale angolare usando coordinate polari con l'asse polare diretto lungo \hat{n} :

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \sin \theta = \pi \int_{-1}^1 (1 + x^2) dx = \frac{8}{3} \pi . \quad (6.17)$$

Un modo per calcolare $\langle \sin^2 \alpha \rangle$ senza effettuare il calcolo esplicito è il seguente: si ha

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = 1 - \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1 - \langle (\hat{x}_0 \cdot \hat{n}')^2 \rangle = 1 - \langle (\hat{x}_0)_i (\hat{x}_0)_j \rangle n'_i n'_j \quad (6.18)$$

e, se introduciamo la notazione $T_{ij} = \langle (x_0)_i (x_0)_j \rangle$, il tensore T_{ij} deve essere simmetrico per scambio $i \leftrightarrow j$, trasversale rispetto alla direzione di propagazione iniziale ($T_{ij} n_i = T_{ij} n_j = 0$) e deve soddisfare $T_{ii} = 1$. Inoltre, poichè si sta mediando sulle direzioni della polarizzazione, T_{ij} deve poter essere scrivibile in termini del solo vettore \hat{n} . L'unica espressione che soddisfa questi requisiti è $T_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j)$ e quindi si ottiene

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = 1 - \frac{1}{2} (\delta_{ij} - n_i n_j) n'_i n'_j = \frac{1 + (\hat{n} \cdot \hat{n}')^2}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} . \quad (6.19)$$

Si è fino ad ora considerata solo la componente elastica della sezione d'urto, legata alla potenza irraggiata a frequenza ω ; passiamo ora ad analizzare la sezione d'urto totale, che è legata alla potenza totale sottratta all'onda incidente (indipendentemente dal fatto che questa venga poi riemessa con frequenza ω , riemessa con una frequenza diversa o assorbita dal bersaglio). Il punto di partenza è la potenza assorbita da una carica e in moto nel campo elettrico, che per un campo reale si scrive come $e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}$. Nel caso specifico sia $\dot{\vec{x}}$ che \vec{E} sono scritti in termini di variabili complesse, quindi è necessario come al solito in questi casi considerare solo le componenti reali e mediare su un periodo dell'onda incidente:

$$P_{diss} = e \left\langle \left(\frac{\dot{\vec{x}} + \dot{\vec{x}}^*}{2} \right) \left(\frac{\vec{E} + \vec{E}^*}{2} \right) \right\rangle . \quad (6.20)$$

Usando il fatto che $\dot{\vec{x}}$ e \vec{E} hanno la stessa dipendenza angolare $e^{-i\omega t}$ si ottiene subito (usando la forma esplicita (6.4) di \vec{x}_0)

$$\begin{aligned} P_{diss} &= \frac{e}{2} \Re(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{E}^*) = \frac{e}{2} \Re \left(-i\omega \frac{e}{m} \frac{\vec{E}_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)} \cdot \vec{E}_0^* \right) = \\ &= \frac{e^2}{2m} |\vec{E}|^2 \Re \left(\frac{-i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}(\omega)} \right) = \frac{e^2}{2m} |\vec{E}|^2 \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} ; \end{aligned} \quad (6.21)$$

per la sezione d'urto totale si trova quindi

$$\sigma_{tot} = \frac{P_{diss}}{\frac{c}{8\pi} |\vec{E}|^2} = 4\pi c r_e \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} . \quad (6.22)$$

Dal confronto di questa equazione con Eq. (6.11) si ottiene quindi (ricordando che si era definito $\Gamma_{tot}(\omega) = \Gamma' + \tau\omega^2$ e che $\tau = \frac{2}{3} r_e / c$)

$$\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{tot}} = \frac{2r_e}{3c} \frac{\omega^2}{\Gamma_{tot}(\omega)} = \frac{\tau\omega^2}{\Gamma' + \tau\omega^2} = \frac{1}{1 + \frac{\Gamma'}{\tau\omega^2}} . \quad (6.23)$$

Come era ragionevole attendersi, se $\Gamma' = 0$ (ovvero $\gamma = 0$) tutto lo scattering è elastico, in quanto non è presente il termine dissipativo $-\gamma \dot{\vec{x}}$ nelle equazioni del moto.

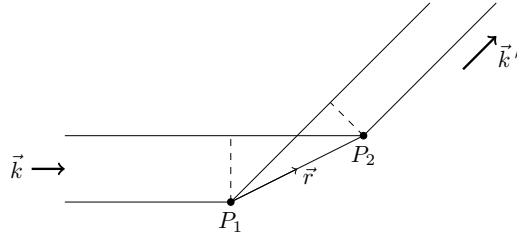


Figura 11: Le geometria necessaria per il calcolo della differenza di cammino ottico nello scattering da due centri diffusori.

6.2 Scattering Rayleigh

Considereremo ora il caso in cui la radiazione elettromagnetica incida non su un singolo elettrone ma su un atomo (scattering Rayleigh). In questo caso non basta considerare la potenza irraggiata da ogni singolo elettrone, è anche necessario tenere conto della possibile interferenza tra i campi generati dai vari elettroni. Si suporrà inoltre sempre che lo scattering sia elastico, ovvero avvenga senza cambi di frequenza, quindi $|\vec{k}| = |\vec{k}'| \equiv k$.

Partiamo dal caso in cui siano presenti solo due centri diffusori P_1 e P_2 , situati ad una distanza \vec{r} tra loro. Da Fig. (11) si vede subito che la differenza di cammino ottico percorso da due fotoni incidenti su P_1 e su P_2 è data da

$$\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2 = \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}'}{k} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{r} \cdot (\vec{k}' - \vec{k})}{k} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}}{k}, \quad (6.24)$$

in cui si è introdotta la notazione standard $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$. Un osservatore lontano vede quindi le onde elettromagnetiche generate da P_1 e da P_2 sfasate di $k\Delta\ell = \vec{r} \cdot \vec{q}$ e, assumendo che i due diffusori situati in P_1 ed in P_2 siano fisicamente indistinguibili, questo sfasamento sarà l'unica differenza tra i due campi. È a questo punto semplice generalizzare l'argomento precedente al caso in cui siano presenti N centri diffusori: il campo totale sarà della forma $\vec{E} = \vec{E}_1 e^{-i\phi_1} + \vec{E}_2 e^{-i\phi_2} + \dots$, dove si è indicato con \vec{E}_i il campo generato dall' i -esimo diffusore e con ϕ_i la sua fase; con un ragionamento identico al precedente si vede che la differenza di fase tra i diffusori "i" e "j" è data da $\phi_i - \phi_j = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{q}$, dove \vec{r}_i è la posizione del diffusore i -esimo. Supponendo tutti i diffusori identici e supponendo di osservare il sistema da molto lontano si ha approssimativamente $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \dots$, e quindi (a meno di una fase comune irrilevante) si ha $\vec{E} = \vec{E}_1 \sum_{j=1}^N e^{-i\vec{r}_j \cdot \vec{q}}$. Notiamo esplicitamente che questo ragionamento è identico a quello effettuato in Sez. (5.5), solo che in quel caso si aveva a che fare con centri diffusori neutri mentre ora sono carichi; questa differenza entra tuttavia solo nella forma esplicita di \vec{E}_1 .

Nel caso in cui sia presente una distribuzione continua $\rho(\vec{r})$ di centri diffusori (cariche) questa somma diventa naturalmente un integrale ed è uso comune definire il fattore di forma elettromagnetico come

$$F(\vec{q}) = \frac{\int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}} d^3r}{\int \rho(\vec{r}) d^3r}, \quad (6.25)$$

in cui il denominatore è semplicemente la carica totale. Per quanto appena visto il campo elettrico generato da una distribuzione $\rho(\vec{r})$ (con $\int \rho(\vec{r}) d^3r = Q$) su cui incide radiazione elettromagnetica è il campo che sarebbe generato da un diffusore *puntiforme* di carica Q moltiplicato per il fattore di forma $F(\vec{q})$ della distribuzione. Nel caso dello scattering Rayleigh si ha quindi

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(\vec{q}) = \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}(\vec{q}) \Big|_e |ZF(\vec{q})|^2 \quad (6.26)$$

dove si è indicata con $d\sigma_{el}/d\Omega|_e$ la sezione d'urto su singolo elettrone. Misurando la sezione d'urto per diversi valori di \vec{q} si può ricostruire il fattore di forma (in realtà il modulo del fattore di forma)

usando il quale si può risalire alla distribuzione di carica iniziale. Nel caso in cui la distribuzione di carica iniziale abbia simmetria sferica la dipendenza del fattore di forma da \vec{q} è in realtà una dipendenza da $q = |\vec{q}|$ (vedi dopo per un esempio esplicito) e dalla definizione $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ segue che (indicando con θ l'angolo di scattering, $\vec{k} \cdot \vec{k}' = k^2 \cos \theta$)

$$q^2 = (\vec{k}' - \vec{k})^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad q = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6.27)$$

quindi la dipendenza da q comprende sia una dipendenza dalla frequenza $\omega = k/c$ della radiazione incidente sia una dipendenza dall'angolo di scattering; quantisticamente $\hbar\vec{q}$ è l'impulso trasferito dal fotone incidente all'atomo.

Dalla definizione di fattore di forma segue subito che $F(0) = 1$, che ha una semplice interpretazione fisica: nel limite $q \rightarrow 0$ si sta indagando come reagisce il sistema a sollecitazioni aventi scale tipiche di lunghezza molto grandi, rispetto alle quali il sistema è approssimabile come un oggetto puntiforme di carica Q . Nel caso specifico dello scattering Rayleigh (fotone su atomo) $q \rightarrow 0$ significa che i fotoni non hanno abbastanza energia da risolvere la struttura atomica, che ha come scala di lunghezza tipica $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$, quindi un fotone è "poco energetico" se

$$E_\gamma = \hbar\omega = 2\pi \frac{\hbar c}{\lambda} \lesssim 2\pi \frac{\hbar c}{1\text{\AA}} \simeq 10\text{KeV}. \quad (6.28)$$

In questo caso la sezione d'urto Rayleigh si riduce quindi a Z^2 volte la sezione d'urto su singolo elettrone e di conseguenza

$$\frac{\sigma_{el}^{Pb}(q \lesssim 10\text{KeV})}{\sigma_{el}^C(q \lesssim 10\text{KeV})} \simeq \left(\frac{82}{6}\right)^2 \simeq 187, \quad (6.29)$$

che è in accordo con i dati mostrati in Fig. (10). Nel limite opposto $q \rightarrow \infty$ si sta analizzando la distribuzione di carica con una sonda sensibile alle piccolissime distanze e ci si aspetta in generale di avere interferenza distruttiva tra i campi prodotti nei vari punti del sistema, cosa che segue formalmente dal lemma di Riemann-Lebesgue.

Se consideriamo una distribuzione di carica avente raggio caratteristico a e supponiamo che la radiazione incidente sia tale che $ak \ll 1$ (e di conseguenza $\vec{r} \cdot \vec{q} \ll 1$ per ogni angolo di scattering), allora si può sviluppare l'esponenziale che compare nella definizione del fattore di forma e si ottiene

$$\begin{aligned} \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{r} \cdot \vec{q}} d^3r &\simeq \int \rho(\vec{r}) \left(1 - i\vec{r} \cdot \vec{q} - \frac{1}{2}(\vec{r} \cdot \vec{q})^2\right) d^3r = \\ &= \int \rho(\vec{r}) d^3r - i\vec{q} \cdot \int \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r - \frac{q_j q_k}{2} \int \rho(\vec{r}) \left(r_j r_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) d^3r - \frac{\vec{q}^2}{6} \int \vec{r}^2 \rho(\vec{r}) d^3r = \\ &= Q - i\vec{q} \cdot \vec{d} - \frac{1}{6} q_j Q_{jk} q_k - \frac{\vec{q}^2}{6} Q \langle \vec{r}^2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.30)$$

dove si è introdotta la carica totale Q , il momento di dipolo \vec{d} , i momenti di quadrupolo Q_{jk} ed il raggio quadratico medio di carica $\langle \vec{r}^2 \rangle$. Per una distribuzione sferica di carica (o più in generale se i momenti di dipolo e quadrupolo si annullano) si ha allora

$$|F(\vec{q})|^2 = \left| 1 - \frac{\vec{q}^2}{6} \langle \vec{r}^2 \rangle + o(\vec{q}^2) \right|^2 = 1 - \frac{\vec{q}^2}{3} \langle \vec{r}^2 \rangle + o(\vec{q}^2) \quad (6.31)$$

e dalla dipendenza della sezione d'urto da \vec{q} si può estrarre raggio quadratico medio di carica.

Analizziamo ora il caso specifico di una sfera di raggio a avente una distribuzione uniforme di carica e carica totale Q :

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi a^3} & \text{se } |\vec{r}| \leq a \\ 0 & \text{se } |\vec{r}| > a \end{cases}. \quad (6.32)$$

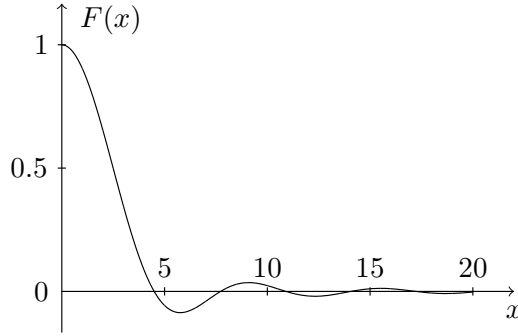


Figura 12: Fattore di forma di una sfera con densità di carica uniforme $F(x) = 3 \left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2} \right)$, dove $x = aq = 2ak \sin(\theta/2)$.

Per dato \vec{q} scegliamo coordinate polari (che indichiamo con θ' e ϕ') aventi l'asse polare diretto lungo \vec{q} , quindi il fattore di forma può essere calcolato come

$$\begin{aligned}
 F(\vec{q}) &= \frac{1}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-irq \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' d\phi' dr = \frac{2\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 e^{-irq \cos \theta'} |\cos \theta'| dr = \\
 &= \frac{4\pi}{Q} \int \rho(r) r^2 \frac{\sin(rq)}{rq} dr = \frac{3}{a^3 q} \int_0^a r \sin(rq) dr = \\
 &= \frac{3}{a^3 q} \left(-\frac{r}{q} \cos(rq) + \frac{1}{q^2} \sin(rq) \right)_0^a = 3 \left(\frac{\sin(aq)}{(aq)^3} - \frac{\cos(aq)}{(aq)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

da cui si vede che, a causa della simmetria per rotazioni, si ha in effetti $F(\vec{q}) = F(q)$. Usando $\sin x \simeq x - x^3/6$ e $\cos x \simeq 1 - x^2/2$ si vede subito che $F(q) = 1 - (aq)^2/10$ per $aq \ll 1$ (consistentemente con il fatto che $\langle r^2 \rangle = 3a^2/5$), mentre si ha chiaramente $\lim_{aq \rightarrow \infty} F(q) \rightarrow 0$, per un grafico completo vedi Fig. (12).

Ricordando che $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, si vede quindi che se si considera un fotone molto energetico, $ak \gg 1$, esso sarà preferenzialmente diffuso in avanti, in quanto il fattore di forma è fortemente piccato per $aq \lesssim \pi$. Per l'angolo di emissione si avrà quindi

$$\sin \frac{\theta}{2} \lesssim \frac{\pi}{2ak} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \theta \lesssim \frac{\pi}{ak} \tag{6.34}$$

e di conseguenza una approssimazione un po' rozza ma efficace del fattore di forma per $ak \gg 1$ risulta essere

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq \theta \leq 1/(ak) \\ 0 & \text{se } 1/(ak) < \theta \leq \pi \end{cases} . \tag{6.35}$$

Notiamo esplicitamente che questa forma approssimata di $F(\theta)$ è vera per qualunque distribuzione di carica avente raggio tipico a , in quanto si basa solo sui seguenti fatti due fatti: $F(0) = 1$ e, per θ fissato, $F(2k \sin(\theta/2))$ è una funzione rapidamente decrescente di k (alcuni metodi per stimare gli andamenti delle trasformate di Fourier per grandi valori dell'argomento sono esposti ad es. in [28] §1.1). Nel caso di radiazione non polarizzata di alta frequenza la sezione d'urto Rayleigh risulta dunque con buona approssimazione essere (usando Eq. (6.16) con $\omega \gg \omega_0$)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{el}(ak \gg 1) &= \int \left. \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \right|_e^{\text{non pol.}} |ZF(\theta)|^2 d\phi \sin \theta d\theta = \\
 &= 2\pi Z^2 r_e^2 \int_0^\pi \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \simeq \\
 &\simeq \pi Z^2 r_e^2 \int_0^{1/ak} (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \simeq \frac{\pi Z^2 r_e^2}{(ak)^2},
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

che ben descrive l'andamento mostrato in Fig. (10) per $E_\gamma \gg 10 \text{ KeV}$ sia ad energia del fotone fissata in funzione del numero atomico, sia per numero atomico fissato in funzione dell'energia del fotone incidente.

6.3 Scattering Compton e produzione di coppie (considerazioni cinematiche)

Analizziamo ora la cinematica dello scattering Compton, in cui un fotone incide su un elettrone libero ed in quiete e viene diffuso con un cambio di frequenza: $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. Usando unità naturali (quindi $c = 1$ e $\hbar = 1$) il quadriimpulso di un fotone si scrive nella forma $P = \omega(1, \hat{n})$, dove ω è la frequenza angolare e \hat{n} è la direzione di propagazione; la conservazione del quadriimpulso nel processo si può scrivere nella forma $P_{\gamma_1} - P_{\gamma_2} = P_{e_2} - P_{e_1}$ dove γ_1 è il fotone incidente (di frequenza angolare ω), e_1 è l'elettrone iniziale in quiete ed il fotone γ_2 ha frequenza ω' (ovviamente $\omega' < \omega$ per la conservazione dell'energia). Considerando il quadrato della precedente relazione, usando $P_{e_1} = (m, 0)$ e chiamando θ l'angolo di scattering del fotone si ottiene

$$-2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = 2m^2 - 2mE_2 = 2m^2 - 2m(\omega + m - \omega') = -2m(\omega - \omega') , \quad (6.37)$$

dove m è la massa elettronica ed E_2 è l'energia dell'elettrone nello stato finale. Reintroducendo le unità fisiche si ha quindi

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar\omega\omega'}{mc^2}(1 - \cos\theta) , \quad (6.38)$$

da cui si vede che ci può essere un cambiamento significativo di frequenza solo se l'energia $\hbar\omega$ del fotone incidente è comparabile all'energia di riposo dell'elettrone mc^2 . Poichè l'energia di legame tipica di un elettrone atomico è molto più piccola della sua energia di riposo, l'approssimazione di elettrone iniziale "fermo" è ragionevole anche per un elettrone atomico su cui incide un fotone di energia tipica mc^2 . Il modo standard in cui la relazione Eq. (6.38) viene di solito scritta è in funzione non delle frequenze ma delle lunghezze d'onda: è semplice verificare che in termini di $\lambda = 2\pi c/\omega$ si ha

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (6.39)$$

dove $\lambda_c = \frac{h}{mc} \simeq 2.5 \times 10^{-12} \text{ m}$ è la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone.

Passiamo ora al caso della produzione di coppie. Notiamo preliminarmente che un fotone nel vuoto non può produrre coppie, cioè il processo $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ è cinematicamente proibito, come si vede considerando il quadrato dell'equazione della conservazione del quadriimpulso: da $P_\gamma = P_+ + P_-$ si ottiene infatti $0 = (P_+ + P_-)^2 \geq 4m^2$ dove m è la massa dell'elettrone (che è uguale alla massa del positrone). La produzione di coppie può quindi avvenire solo se è presente una altra particella spettatrice (che deve essere carica, ma questo cinematicamente è irrilevante) che indicheremo genericamente con X . Il processo può quindi essere schematizzato come $\gamma + X \rightarrow e^+ + e^- + X$ ed i casi sperimentalmente più rilevanti sono quelli in cui X è un nucleo atomico o un elettrone.

Procediamo con il calcolo della soglia del processo (usando unità naturali), assumendo che lo spettatore X sia inizialmente fermo (si vedrà a posteriori che questa approssimazione è ragionevole, come nel caso dell'effetto Compton): si ha $P_\gamma + P_X = P_+ + P_- + P'_X$, in cui $P_X = (M_X, 0)$ è il quadriimpulso iniziale della particella X , P'_X il suo quadriimpulso finale e $P_\gamma = \omega(1, \hat{n})$ il quadriimpulso del fotone. Considerando il quadrato di questa relazione otteniamo

$$2\omega M_X + M_X^2 = (P_+ + P_- + P'_X)^2 \geq (M_X + 2m)^2 , \quad (6.40)$$

dove abbiamo nuovamente indicato con m la massa elettronica, quindi affinché il processo possa avvenire si deve avere

$$\omega \geq 2m + 2\frac{m^2}{M_X} = 2m \left(1 + \frac{m}{M_X} \right) , \quad (6.41)$$

dove il fatto che la soglia non sia esattamente $2m$ è ovviamente una conseguenza del fatto che anche alla particella X viene trasferita una certa quantità di energia. Nel caso in cui la produzione

di coppia sia mediata da un nucleo si ha $M_X \gg m$, quindi la soglia del processo è con ottima approssimazione $E_\gamma \simeq 2m$, se invece lo spettatore è un elettrone si ha $M_X = m$ e la soglia è $E_\gamma = 4m$. In entrambi i casi il fotone è sufficientemente energetico da poter considerare con buona approssimazione lo spettatore X come inizialmente fermo.

Poichè un fotone deve essere piuttosto energetico per produrre coppie, l'impulso trasferito all'elettrone spettatore è sufficientemente grande da poter trascurare le interazioni con gli altri elettroni atomici. Nel caso in cui si consideri la produzione di coppie da parte degli Z elettroni atomici si ha dunque $\kappa_e \propto Z$, che spiega la differenza presente nel valore di κ_e in Fig. (10) tra il caso del carbonio e quello del piombo ($Z^{Pb}/Z^C \simeq 13.7$). Nel caso in cui la produzione di coppia sia invece mediata da un nucleo, l'impulso trasferito al nucleo è tipicamente solo una piccola parte dell'impulso iniziale, che non è in grado di risolvere la struttura nucleare (a meno che il fotone non abbia energie dell'ordine del TeV). Si ha quindi l'equivalente di uno scattering coerente, con $\kappa_{nuc} \propto Z^2$, analogamente al caso $q \rightarrow 0$ nello scattering Rayleigh.

7 Richiami e complementi di cinematica relativistica

In tutta questa sezione si utilizzerà per comodità un sistema di unità di misura in cui la velocità della luce sia stata fissata a $c = 1$.

7.1 Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$

Analizzeremo in questa sezione la cinematica del decadimento in due corpi, in cui una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1 e m_2 . Se indichiamo con P il quadriimpulso della particella M , allora si ha

$$P = p_1 + p_2 \quad (7.1)$$

dove p_1 e p_2 sono i quadriimpulsi di m_1 e m_2 rispettivamente.

Consideriamo dapprima il decadimento come visto nel sistema di riferimento del centro di massa: riscrivendo l'equazione di conservazione del quadriimpulso nella forma $P - p_1 = p_2$ e considerandone il quadrato, si trova

$$M^2 + m_1^2 - 2Pp_1 = m_2^2 \quad (7.2)$$

poichè nel sistema del centro di massa si ha $P = (M, \vec{0})$, si ottiene $Pp_1 = ME_1^c$, da cui la prima delle due equazioni seguenti:

$$E_1^c = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \quad E_2^c = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M}. \quad (7.3)$$

Considerando il quadrato di $P - p_2 = p_1$ si ottiene la seconda.

Consideriamo ora il decadimento come visto da un sistema di riferimento in cui la particella che decade ha una velocità \vec{V} (che chiameremo sistema del laboratorio). Si è appena visto che $Pp_1 = ME_1^c$, dove l'apice c indica che la quantità è considerata nel sistema di riferimento del centro di massa e E_1^c è data dalla prima delle equazioni Eq. (7.3). Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha

$$P = M\gamma(1, \vec{V}), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (7.4)$$

quindi si ottiene

$$E_1^c = \frac{E_1 - \vec{p}_1 \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (7.5)$$

cui si sarebbe potuti arrivare anche con una trasformazione di Lorentz. Utilizzando questa espressione si può studiare la relazione che intercorre tra l'energia di m_1 e l'angolo da essa formato con la velocità \vec{V} . Per fare ciò si può riscrivere l'equazione precedente (usando $|\vec{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ e $\vec{p}_1 \cdot \vec{V} = |\vec{p}_1|V \cos \theta_1$) nella forma

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1 - E_1^c \sqrt{1 - V^2}}{V \sqrt{E_1^2 - m_1^2}} \quad (7.6)$$

da cui, prendendo il quadrato, si ottiene un'equazione di secondo grado in E_1 :

$$E_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) - 2E_1 E_1^c \sqrt{1 - V^2} + (E_1^c)^2(1 - V^2) + m_1^2 V^2 \cos^2 \theta_1 = 0. \quad (7.7)$$

Questa equazione lega l'energia E_1 della particella di massa m_1 al suo angolo di uscita θ_1 , entrambi misurati nel sistema del laboratorio. Il discriminante di questa equazione è

$$\begin{aligned} \Delta &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[(E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[(E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2(1 - \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[|\vec{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 \sin^2 \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

dove \vec{p}_1^c è l'impulso della particella di massa m_1 nel sistema del centro di massa. L'equazione Eq. (7.7) è della forma $aE_1^2 - bE_1 + c = 0$ con $a, b, c > 0$, quindi per ogni valore di $\cos^2 \theta_1$ per il quale $\Delta > 0$ si hanno due valori corrispondenti dell'energia. Affinchè si abbia $\Delta \geq 0$ per ogni valore di θ_1 si deve avere (ricordando che $\vec{v} = \vec{p}/E$)

$$0 \leq |\vec{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 = |\vec{p}_1^c|^2 - (E_1^c)^2 V^2 \Rightarrow V \leq |\vec{v}_1^c|. \quad (7.9)$$

Se questa condizione non è soddisfatta esiste un angolo massimo $\theta_1^{max} < \pi$ dato da

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{|\vec{p}_1^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_1 V}. \quad (7.10)$$

Chiaramente $\lim_{V \rightarrow 1} \theta_1^{max} = 0$, cioè per V grande il decadimento avviene in un cono sempre più stretto lungo la velocità \vec{V} .

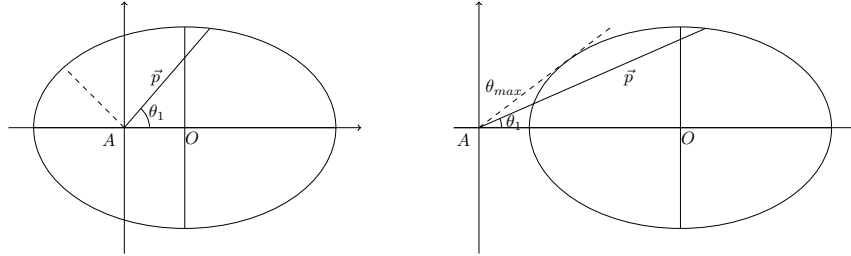


Figura 13: Rappresentazione grafica dell'equazione Eq. (7.12), con la velocità \vec{V} diretta nel verso positivo dell'asse x : a sinistra è mostrato il caso $V < v_1$, a destra il caso $V > v_1$.

Per chiarire questo comportamento si può analizzare esplicitamente il passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa a quello del laboratorio: indichiamo con p_1^c e E_1^c il modulo dell'impulso e l'energia della particella 1 nel sistema del centro di massa e sia θ_1^c l'angolo formato nel sistema del centro di massa dalla direzione di emissione della particella con la direzione della velocità \vec{V} . Se supponiamo per semplicità che la velocità \vec{V} sia diretta lungo il verso positivo dell'asse x , nel sistema del centro di massa le componenti x e y dell'impulso sono $p_1^c \cos \theta_1^c$ e $p_1^c \sin \theta_1^c$. Effettuando il cambiamento di sistema di riferimento otteniamo per le componenti dell'impulso nel sistema del laboratorio le espressioni

$$p_x = \frac{p_1^c \cos \theta_1^c + E_1^c V}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad p_y = p_1^c \sin \theta_1^c \quad (7.11)$$

ed eliminando la dipendenza da θ_1^c si ottiene

$$p_y^2 + (p_x \sqrt{1 - V^2} - E_1^c V)^2 = (p_1^c)^2. \quad (7.12)$$

Se si interpretano p_x e p_y come coordinate del piano questa equazione rappresenta una ellisse di semiassi $p_1^c/\sqrt{1 - V^2}$ e p_1^c il cui centro O è stato spostato lungo il semiasse maggiore ad una distanza $E_1^c V/\sqrt{1 - V^2}$ dal punto $\vec{p} = 0$ (punto A in figura). Il punto A risulta essere ancora all'interno dell'ellisse se è soddisfatta la condizione

$$\frac{E_1^c V}{\sqrt{1 - V^2}} < \frac{p_1^c}{\sqrt{1 - V^2}} \Rightarrow V < v_1^c. \quad (7.13)$$

In Fig. (13) sono mostrati i due casi $V < v_1^c$ e $V > v_1^c$:

$V < v_1^c$ per ogni valore di θ_1 esiste un unico valore di \vec{p} che soddisfa l'equazione Eq. (7.12). Per ogni valore di $\cos^2 \theta_1$ esistono quindi due soluzioni di Eq. (7.7), corrispondenti agli angoli θ_1 e $\pi - \theta_1$.

$V > v_1^c$ per valori di θ_1 sufficientemente piccoli esistono due soluzioni di Eq. (7.12) e Eq. (7.7).
Esiste un angolo massimo θ_1^{max} che corrisponde ad un vettore \vec{p} tangente all'ellisse.

Passiamo infine a studiare la distribuzione angolare delle particelle, assumendo che nel sistema del centro di massa la distribuzione sia isotropa (questo è vero ad esempio per i decadimenti di particelle di spin 0, come i pioni). Il numero di particelle emesse nell'angolo solido $d\omega^c = 2\pi \sin\theta_1^c d\theta_1^c$ (c'è chiaramente invarianza per rotazioni in ϕ quindi si può semplicemente integrare $d\phi$ tra 0 e 2π) è quindi

$$dN = \frac{1}{4\pi} d\omega^c = \frac{1}{2} |d \cos \theta_1^c| \quad (7.14)$$

L'energia della particella m_1 è data da

$$E_1 = \frac{E_1^c + \vec{p}_1^c \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{E_1^c + |\vec{p}_1^c| V \cos \theta_1^c}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad (7.15)$$

dove E_1^c è la costante data dall'equazione Eq. (7.3) e $|\vec{p}_1^c| = \sqrt{(E_1^c)^2 - m_1^2}$, quindi

$$\frac{E_1^c - |\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} \leq E_1 \leq \frac{E_1^c + |\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (7.16)$$

Differenziando l'energia E_1 rispetto a θ_1^c si ottiene

$$dE_1 = \frac{|\vec{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} d \cos \theta_1^c \quad (7.17)$$

e sostituendo questa espressione per $d \cos \theta_1^c$ in Eq. (7.14) si ottiene la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema del laboratorio

$$dN = \frac{1}{2V|\vec{p}_1^c|} \sqrt{1 - V^2} dE_1 \quad (7.18)$$

da cui si vede che la distribuzione dei prodotti di decadimento è isotropa in energia nel sistema del laboratorio, con l'energia che assume valori nell'intervallo Eq. (7.16). Nel sistema di riferimento del centro di massa la distribuzione in energia è invece $dN = \delta(E - E_1^c) dE$.

7.2 La relazione $p_a p_b \geq m_a m_b$

Dimostreremo ora la disuguaglianza $p_a p_b \geq m_a m_b$, in cui l'uguaglianza vale solo quando le particelle a e b sono relativamente ferme.

Consideriamo dapprima il caso in cui almeno una delle due masse sia non nulla, supponiamo $m_a > 0$, allora, poichè $p_a p_b$ è invariante, si può effettuare il calcolo nel sistema di riferimento in cui m_a è ferma, quindi

$$p_a p_b = m_a E_b \quad (7.19)$$

e poichè $E_b \geq m_b$ e l'uguaglianza vale solo quando m_b è ferma abbiamo ottenuto il risultato voluto. Nel caso in cui $m_a = m_b = 0$, si ha $p_a = E_a(1, \hat{n})$ e $p_b = E_b(1, \hat{m})$, con \hat{n} e \hat{m} versori, e quindi

$$p_a p_b = E_a E_b (1 - \cos \theta) \geq 0 \quad (7.20)$$

e l'uguaglianza vale solo per $\theta = 0$, cioè per due particelle che si muovono a velocità c nella stessa direzione.

Una semplice applicazione di questa disuguaglianza si ha nel calcolo dell'energia massima di un prodotto di decadimento: consideriamo una particella di massa M che decade da ferma in n particelle di massa m_1, \dots, m_n . Quale è l'energia massima che può avere la particella di massa m_i ? Per rispondere a questa domanda è conveniente riscrivere la conservazione del quadriimpulso nella forma

$$P - p_i = p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n \quad (7.21)$$

e considerare i quadrati di entrambi i membri. Per quanto riguarda il primo membro si ha, poichè si è supposto la particella di massa M ferma,

$$(P - p_i)^2 = M^2 + m_i^2 - 2ME_i, \quad (7.22)$$

dove E_i è l'energia della particella i -esima. Per quanto riguarda il secondo membro si ha, usando la disuguaglianza appena mostrata,

$$(p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n)^2 \geq (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2 \quad (7.23)$$

e l'uguaglianza è soddisfatta solo se tutte le particelle diverse dalla i -esima hanno identiche velocità. Quindi

$$E_i \leq \frac{M^2 + m_i^2 - (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2}{2M} \quad (7.24)$$

e dal confronto con l'equazione Eq. (7.3) si vede che l'energia massima della particella i -esima è la stessa energia che si avrebbe nel decadimento a due particelle di massa $\tilde{m}_1 = m_i$ e $\tilde{m}_2 = m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n$.

7.3 Scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$

Considereremo in questa sezione la collisione di due particelle di massa m_1 e m_2 . Indichiamo con p_1 e p_2 i quadriimpulsi delle particelle incidenti e con p'_1 e p'_2 quelli delle particelle uscenti. Si hanno allora le relazioni

$$\begin{aligned} p_1^2 &= p'^2_1 = m_1^2, \\ p_2^2 &= p'^2_2 = m_2^2, \\ p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

È conveniente riscrivere l'equazione della conservazione dei quadriimpulsi in due modi differenti

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 - p'_1 &= p'_2 \\ p_1 + p_2 - p'_2 &= p'_1, \end{aligned} \quad (7.26)$$

da cui si ottengono, considerando i quadrati di queste due equazioni ed usando i vincoli cinematici, le relazioni

$$m_1^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_1 - p_2 p'_1 = 0 \quad (7.27)$$

$$m_2^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_2 - p_2 p'_2 = 0. \quad (7.28)$$

Chiamiamo sistema del laboratorio (che sarà indicato da una apice L) il sistema in cui la particella di massa m_2 è ferma prima dell'urto. Si ha allora $p_2^L = (m_2, \vec{0})$, $p_1^L = (E_1^L, \vec{p}_1^L)$ e quindi

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= E_1^L m_2, \\ p'_1 p_2 &= E'^L_1 m_2, \\ p_2 p'_2 &= E'^L_2 m_2, \\ p_1 p'_1 &= E_1^L E'^L_1 - \vec{p}_1^L \vec{p}'^L_1 = E_1^L E'^L_1 - |\vec{p}_1^L| |\vec{p}'^L_1| \cos \theta_1^L, \\ p_1 p'_2 &= E_1^L E'^L_2 - \vec{p}_1^L \vec{p}'^L_2 = E_1^L E'^L_2 - |\vec{p}_1^L| |\vec{p}'^L_2| \cos \theta_2^L, \end{aligned} \quad (7.29)$$

dove θ_1^L e θ_2^L sono gli angoli di scattering delle particelle 1 e 2 nel sistema di riferimento del laboratorio. Utilizzando queste espressioni nelle equazioni Eq. (7.27)-(7.28) si ottengono le relazioni

$$\cos \theta_1^L = \frac{E'^L_1 (E_1^L + m_2) - E_1^L m_2 - m_1^2}{|\vec{p}_1^L| |\vec{p}'^L_1|}, \quad (7.30)$$

$$\cos \theta_2^L = \frac{(E_1^L + m_2)(E'^L_2 - m_2)}{|\vec{p}_1^L| |\vec{p}'^L_2|}, \quad (7.31)$$

che legano gli angoli di scattering alle energie delle particelle entranti e uscenti. La seconda di queste equazioni può essere semplicemente invertita, ottenendo E_2^L in funzione di E_1^L e θ_2^L :

$$\begin{aligned}
|\vec{p}_1^L|^2 |\vec{p}_2^L|^2 \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2)^2 \\
(E_1^{L2} - m_1^2)(E_2^{L2} - m_2^2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2)^2 \\
(E_1^{L2} - m_1^2)(E_2^{L2} + m_2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2) \\
E_2^L \left[(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^{L2} - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L \right] &= m_2 (E_1^L + m_2)^2 + m_2 (E_1^{L2} - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L
\end{aligned} \tag{7.32}$$

e quindi

$$E_2^L = m_2 \frac{(E_1^L + m_2)^2 + (E_1^{L2} - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L}{(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^{L2} - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L}. \tag{7.33}$$

Analizziamo ora la possibilità che θ_1^L e θ_2^L possano avere un limite massimo: per fare ciò è conveniente ricondursi al caso del decadimento in due corpi, pensando lo scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ come $1 + 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1' + 2'$ dove 3 è uno stato intermedio di quadriimpulso $P^L = (m_2 + E_1^L, \vec{p}_1^L)$. In questo modo il problema degli angoli di uscita per lo scattering si riduce all'analogo problema per il decadimento di una particella di massa e velocità

$$M^2 \equiv P^L P^L = (m_2 + E_1^L)^2 - |\vec{p}_1^L|^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L, \quad \vec{V} = \frac{\vec{p}_1^L}{m_2 + E_1^L} \tag{7.34}$$

L'eventuale angolo limite della i -esima particella di questo problema è stato calcolato in precedenza ed è (vedi Eq. (7.10))

$$\sin \theta_i^{Lmax} = \frac{|\vec{p}_i^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_i V}, \tag{7.35}$$

che usando

$$\sqrt{1 - V^2} = \frac{MV}{|\vec{p}_1^L|} \tag{7.36}$$

si può riscrivere come

$$\sin \theta_i^{Lmax} = \frac{M |\vec{p}_i^c|}{m_i |\vec{p}_1^L|}. \tag{7.37}$$

Utilizzando le formule Eq. (7.3) per l'energia nel centro di massa otteniamo

$$\begin{aligned}
E_1^c &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = \frac{m_1^2 + m_2 E_1^L}{M} \\
E_2^c &= \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} = \frac{m_2(m_2 + E_1^L)}{M},
\end{aligned} \tag{7.38}$$

da cui possiamo calcolare i moduli degli impulsi nel centro di massa

$$\begin{aligned}
|\vec{p}_1^c| &= \frac{1}{M} \sqrt{(m_1^2 + m_2 E_1^L)^2 - m_1^2 M^2} = \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 (E_1^L)^2 - m_1^2 m_2^2} = \frac{m_2}{M} |\vec{p}_1^L| \\
|\vec{p}_2^c| &= |\vec{p}_1^c|.
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Sostituendo in Eq. (7.37) otteniamo infine

$$\sin \theta_1^{Lmax} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \sin \theta_2^{Lmax} = 1, \tag{7.40}$$

quindi un angolo limite esiste solo per la particella incidente m_1 se essa è più pesante di m_2 .

Consideriamo ora lo scattering nel sistema del centro di massa: in questo caso si ha

$$E_1^c = E_1'^c \quad E_2^c = E_2'^c, \quad |\vec{p}_1^c| = |\vec{p}_2^c| = |\vec{p}_1'^c| = |\vec{p}_2'^c| \equiv p_0 \tag{7.41}$$

dove E_1^c , E_2^c e p_0 sono dati dalle equazioni Eq. (7.38)-(7.39). Lo scattering nel sistema del centro di massa è quindi completamente determinato dall'energia totale M e dall'angolo di scattering, cioè l'angolo tra \vec{p}_1^c e $\vec{p}_1'^c$, che indicheremo con χ . Può risultare conveniente esprimere in funzione dell'angolo χ anche le energie finali nel sistema di riferimento del laboratorio, ad esempio per trovare i valori limite delle energie trasferite. Per fare ciò è conveniente usare nuovamente l'equazione Eq. (7.27), scrivendo però $p_1 p_1'$ usando le variabili del sistema del centro di massa:

$$p_1 p_1' = E_1^c E_1'^c - \vec{p}_1^c \vec{p}_1'^c = E_1^{c2} - |\vec{p}_1^c|^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2 \quad (7.42)$$

ed ottenendo quindi

$$E_1'^L - E_1^L = -\frac{p_0^2}{m_2} (1 - \cos \chi) . \quad (7.43)$$

Per terminare si deve esprimere p_0 in termini di quantità del sistema del laboratorio usando l'Eq. (7.39) cioè (esplicitando M e scrivendo $|\vec{p}_1^L|$ in termini dell'energia)

$$p_0^2 = \frac{m_2^2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} \quad (7.44)$$

e quindi

$$E_1'^L = E_1^L - \frac{m_2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (7.45)$$

Usando $E_1^L + m_2 = E_1'^L + E_2'^L$ si ottiene anche

$$E_2'^L = m_2 + \frac{m_2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (7.46)$$

Il secondo termine di queste equazioni rappresenta l'energia trasferita dalla prima particella (m_1) alla seconda (m_2) che era inizialmente a riposo.

Se indichiamo con \vec{v}_1^L la velocità con cui la prima particella incide nel sistema del laboratorio ed usiamo le relazioni $E = m\gamma$ e $\gamma^2 - 1 = v^2\gamma^2$, il trasferimento massimo di energia si ha per $\chi = -\pi$ e la particella 2 nello stato finale ha quindi il massimo valore dell'energia cinetica:

$$T_2^{max} = \frac{2m_2 m_1^2 (v_1^L \gamma_1^L)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} . \quad (7.47)$$

Nel caso in cui la particella incidente sia molto più pesante della particella bersaglio ($m_1 \gg m_2$) e l'energia trasferita dalla particella 1 alla particella 2 sia molto più piccola dell'energia iniziale della particella 1 (condizione che usando le formule precedenti si vede corrispondere a $m_1 m_2 \gamma_1^L \ll m_1^2$) la formula dell'energia massima trasferita può essere semplificata in

$$T_2^{max} \simeq 2m_2 (v_1^L \gamma_1^L)^2 . \quad (7.48)$$

Questa relazione può essere ottenuta direttamente con un semplice argomento. Infatti, nel caso in cui $m_1 \gg m_2$ ed in cui nell'urto solo una piccola percentuale di energia cinetica venga trasferita alla particella 2, si può schematizzare il processo d'urto corrispondente al massimo trasferimento di energia nel seguente modo:

- nel sistema di riferimento S' in cui m_1 è inizialmente ferma, la particella m_2 ha velocità $-\vec{v}_1^L$
- in S' , dopo l'urto la particella m_1 sarà all'incirca ferma e la particelle m_2 avrà all'incirca velocità \vec{v}_1^L .

Questo significa che dopo l'urto le particelle avranno nel sistema di riferimento del laboratorio velocità

$$\vec{v}_1'^L \simeq \vec{v}_1^L , \quad \vec{v}_2'^L \simeq \frac{2\vec{v}_1^L}{1 + (v_1^L)^2} . \quad (7.49)$$

Ovviamente queste espressioni sono approssimate e possono essere usate solo nel caso in cui l'energia iniziale della particella 1 sia molto maggiore dell'energia finale della particella 2, in quanto si sta trascurando la perdita di energia della particella 1 nell'urto. Usando questa espressione per \vec{v}'_2^L si ottiene quindi

$$\gamma_2^L \simeq \frac{1 + (v_1^L)^2}{1 - (v_1^L)^2}, \quad T_2^{max} \simeq m_2(\gamma_2^L - 1) \simeq 2m_2(v_1^L \gamma_1^L)^2. \quad (7.50)$$

Invece di usare la composizione delle velocità, per ottenere i risultati nel laboratorio a partire da quelli nel sistema S' si può chiaramente usare una trasformazione di Lorentz per arrivare allo stesso risultato.

7.4 Invarianti cinematici del processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

Vediamo quanti sono gli invarianti cinematici indipendenti che possono essere usati per la descrizione dello scattering generale $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, in cui le particelle finali possono differire dalle particelle iniziali. Nel processo intervengono quattro quadriimpulsi, che indicheremo con p_1, p_2, p_3, p_4 ; questi non sono tutti indipendenti in quanto legati dalla conservazione di energia e impulso, quindi ne restano tre indipendenti, ad es. p_1, p_2, p_3 . Utilizzando questi ultimi si possono costruire sei invarianti $p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_1p_2, p_2p_3, p_1p_3$. I primi tre sono le masse delle particelle, inoltre gli ultimi tre sono legati dalla relazione

$$(p_1 + p_2 - p_3)^2 = p_4^2 = m_4^2 \quad \Rightarrow \quad p_1p_2 - p_2p_3 - p_1p_3 = \left(m_4^2 - \frac{1}{2}m_1^2 - \frac{1}{2}m_2^2 - \frac{1}{2}m_3^2 \right) \quad (7.51)$$

quindi restano due invarianti indipendenti. Con riferimento al caso trattato nella sezione precedente questi due invarianti possono essere ad esempio l'energia del centro di massa M e l'angolo di scattering χ .

Consideriamo per un momento il caso di una reazione generica in cui intervengano n particelle e poniamoci la stessa domanda: quanti invarianti sono necessari per una descrizione della reazione? In questo caso abbiamo $4n$ componenti dei quadriimpulsi coinvolti, 4 equazioni date dalla conservazione di energia ed impulso ed n relazioni di mass-shell $p_i^2 = m_i^2$. Inoltre abbiamo 6 gradi di libertà nella scelta del sistema di riferimento (3 rotazioni e 3 boost). In definitiva in una reazione generica tra n particelle esistono

$$4n - 4 - n - 6 = 3n - 10 \quad (7.52)$$

invarianti cinematici indipendenti.

Ritorniamo al caso dello scattering $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ed introduciamo i quadriettori q_i definiti come $\pm p_i$, in modo che la conservazione del quadriimpulso si possa scrivere in modo simmetrico

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0. \quad (7.53)$$

Le variabili di Mandelstam sono definite dalle espressioni

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2 \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2 \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Poichè si è visto che gli invarianti indipendenti di una reazione a 4 particelle sono 2, queste variabili non possono essere tutte indipendenti. In effetti è semplice vedere che si ha

$$s + t + u = h, \quad h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad (7.55)$$

infatti

$$\begin{aligned} s + t + u &= (q_1 + q_2)^2 + (q_1 + q_3)^2 + (q_1 + q_4)^2 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2q_1q_2 + 2q_1q_3 + 2q_1q_4 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2q_1(q_2 + q_3 + q_4) = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2q_1q_1 = h. \end{aligned} \quad (7.56)$$

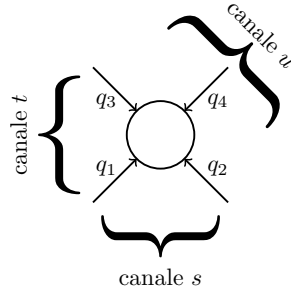


Figura 14: I tre canali di una reazione generalizzata.

Le tre variabili di Mandelstam sono quindi ridondanti per un solo processo ma permettono di stabilire dei legami tra reazioni diverse: indicando con una barra le antiparticelle consideriamo le reazioni

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \\
 (II) \quad & 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \\
 (III) \quad & 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3
 \end{aligned} \tag{7.57}$$

Le variabili s , t ed u rappresentano l'energia nel sistema del centro di massa delle reazioni (I), (II) e (III) che sono anche indicate come canali s , t ed u della reazione generalizzata.

Calcoliamo gli invarianti nel sistema del centro di massa per il canale s : si ha

$$\begin{aligned}
 q_1 = p_1 &= (E_1^c, \vec{p}_1^c), & q_2 = p_2 &= (E_2^c, -\vec{p}_1^c), \\
 q_3 = -p_3 &= (-E_3^c, -\vec{p}_3^c), & q_4 = -p_4 &= (-E_4^c, \vec{p}_3^c),
 \end{aligned} \tag{7.58}$$

quindi

$$s = (E_1^c + E_2^c)^2 = (E_3^c + E_4^c)^2 \tag{7.59}$$

ed utilizzando l'equazione Eq. (7.3) con $M^2 = s$ si ottengono le energie nel sistema di riferimento del centro di massa

$$\begin{aligned}
 E_1^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_1^2 - m_2^2), & E_2^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_2^2 - m_1^2), \\
 E_3^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_3^2 - m_4^2), & E_4^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_4^2 - m_3^2),
 \end{aligned} \tag{7.60}$$

e gli impulsi nel sistema del centro di massa

$$\begin{aligned}
 4s|\vec{p}_1^c|^2 &= (s + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 s = s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2 = \\
 &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2], \\
 4s|\vec{p}_3^c|^2 &= [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2].
 \end{aligned} \tag{7.61}$$

Le restanti variabili t e u valgono

$$\begin{aligned}
 2t &= (q_1 + q_3)^2 + (q_2 + q_4)^2 = h + 4\vec{p}_1^c \vec{p}_3^c - 2(E_1^c E_3^c + E_2^c E_4^c) = \\
 &= h + 4\vec{p}_1^c \vec{p}_3^c - s - (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)/s, \\
 2u &= h - 4\vec{p}_1^c \vec{p}_3^c - s + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)/s.
 \end{aligned} \tag{7.62}$$

Le variabili di Mandelstam possono essere convenientemente rappresentate in un piano con coordinate triangolari, vedi Fig. (15), l'altezza del triangolo essendo uguale ad h , infatti se si indica con ℓ la lunghezza dei lati del triangolo equilatero si hanno per l'area del triangolo le due espressioni

$$A = \frac{h\ell}{2} \quad A = \frac{\ell}{2}(s + t + u) \tag{7.63}$$

da cui si vede che la relazione fondamentale Eq. (7.55) è soddisfatta. Questa relazione è soddisfatta non solo dai punti all'interno del triangolo ma anche da quelli all'esterno, a patto di scegliere adeguatamente i segni delle variabili (come mostrato in figura Fig. (15)). Chiaramente non tutti i punti del piano corrispondono a valori delle variabili di Mandelstam corrispondenti a casi fisici. Si pone quindi il problema di determinare quelli che vengono detti domini fisici.

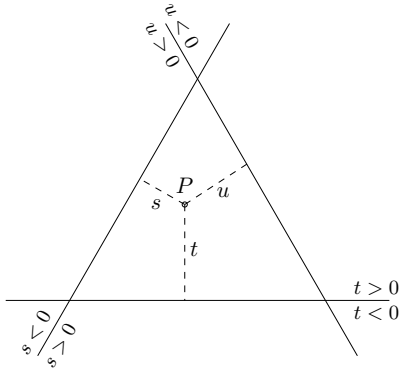


Figura 15: Le variabili di Mandelstam come coordinate triangolari nel piano.

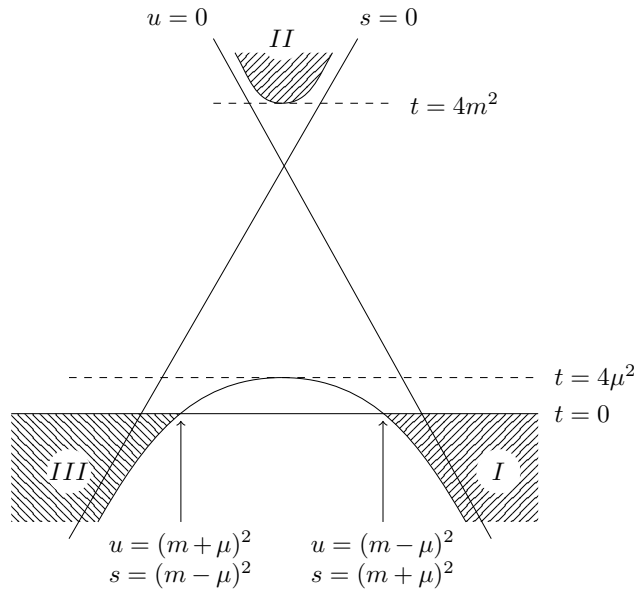


Figura 16: Domini fisici dello scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ con parametri Eq. (7.67). Le regioni I , II e III corrispondono ai canali s , t ed u rispettivamente.

Il prodotto i due quadriimpulsi soddisfa la relazione

$$p_a p_b \geq m_a m_b \quad (7.64)$$

da cui seguono subito le relazioni

$$(p_a + p_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2 \quad (p_a - p_b)^2 \leq (m_a - m_b)^2 \quad (7.65)$$

Utilizzando queste disuguaglianze si ottengono per il canale s le disequazioni

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 &\leq s \leq (m_3 + m_4)^2 \\ (m_1 - m_3)^2 &\geq t \leq (m_2 - m_4)^2 \\ (m_1 - m_4)^2 &\geq u \leq (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{per il canale } s) \quad (7.66)$$

e disequazioni analoghe si hanno negli altri canali.

Queste condizioni sono necessarie ma non sufficienti per l'identificazione dei domini fisici: consideriamo come esempio il caso dello scattering $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$

$$m_1 = m_3 \equiv m, \quad m_2 = m_4 \equiv \mu, \quad m > \mu. \quad (7.67)$$

In questo caso le condizioni Eq. (7.66) si riducono a $s \geq (m + \mu)^2$ e $t \leq 0$, inoltre, effettuando i calcoli nel sistema di riferimento del centro di massa ed indicando con \vec{p} e \vec{k} gli impulsi prima e dopo l'urto della particella m_1 (ovviamente $|\vec{p}| = |\vec{k}|$), si trova

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = 2m^2 - 2(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{k}) = \\ &= 2m^2 - 2(\vec{p}^2 + m^2) + 2\vec{p} \cdot \vec{k} = 2\vec{p}^2(\cos \theta - 1) \end{aligned} \quad (7.68)$$

L'energia della particella m_1 nel sistema del centro di massa è data da Eq. (7.3) in cui $M \rightarrow \sqrt{s}$, quindi

$$E_1 = \frac{s + (m + \mu)(m - \mu)}{2\sqrt{s}} \quad (7.69)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \vec{p}^2 &= E_1^2 - m^2 = \frac{s^2 + (m + \mu)^2(m - \mu)^2 + 2s(m + \mu)(m - \mu) - 4sm^2}{4s} = \\ &= \frac{s^2 + (m + \mu)^2(m - \mu)^2 - 2s(m^2 + \mu^2)}{4s} = \\ &= \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{4s}, \end{aligned} \quad (7.70)$$

da cui si ottiene per t l'espressione

$$t = \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{2s}(\cos \theta - 1). \quad (7.71)$$

Si nota subito che $t \leq 0$, compatibilmente con la disuguaglianza ricavata precedentemente, tuttavia dalla formula precedente si ottiene anche un valore minimo per t , che è dato dall'equazione

$$st = -[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2] \quad (7.72)$$

questa è l'equazione di una iperbole: ricordando che $h = 2m^2 + 2\mu$ e quindi $u = 2m^2 + 2\mu^2 - s - t$ l'equazione precedente può essere scritta nella forma $su = (m^2 - \mu^2)^2$. Il dominio fisico è quindi la zona I della figura Fig. (16).

Un modo per ottenere le condizioni sufficienti nel caso generale è il seguente: consideriamo il quadri-vettore L definito come

$$L_\lambda = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho \quad (7.73)$$

Supponiamo ora che $m_1 \neq 0$, allora nel sistema di riposo della particella 1, L ha solo componenti spaziali ($L_i = \epsilon_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$) e quindi $L^2 \leq 0$. D'altra parte L^2 è un invariante e quindi $L^2 \leq 0$ deve valere in ogni sistema di riferimento. Utilizzando la relazione (vedi Sez. (A.2))

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\rho\nu\sigma\mu} = - \begin{vmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\nu^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\nu^\beta & \delta_\sigma^\beta \\ \delta_\rho^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\sigma^\gamma \end{vmatrix} \quad (7.74)$$

la disequazione $L^2 \leq 0$ si riscrive come

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geq 0, \quad (7.75)$$

che scritta in termini degli invarianti di Mandelstam diventa per tutti i canali¹²

$$stu \geq as + bt + cu , \quad (7.76)$$

dove

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) . \end{aligned} \quad (7.77)$$

Consideriamo nuovamente il caso in cui il canale s della reazione sia uno scattering $1+2 \rightarrow 1'+2'$ con parametri Eq. (7.67). Le costanti h, a, b, c valgono allora

$$h = 2(m^2 + \mu^2) , \quad a = c = 0 , \quad b = (m^2 - \mu^2)^2 , \quad (7.78)$$

e la disequazione Eq. (7.76) diventa $sut \geq (m^2 - \mu^2)^2 t$ cioè

$$t = 0 , \quad \left\{ \begin{array}{l} t > 0 \\ su > (m^2 - \mu^2)^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} t < 0 \\ su < (m^2 - \mu^2)^2 \end{array} \right. , \quad (7.79)$$

quindi i contorni dei domini fisici sono la retta $t = 0$ e l'iperbole $su = (m^2 - \mu^2)^2$. Delle disuguaglianze Eq. (7.66) per il canale s l'unica che non è direttamente implicata dalle Eq. (7.79) è $s \geq (m + \mu)^2$, quindi il dominio fisico corrispondente al canale s è quello indicato con I in Fig. (16). Analogamente nel canale u deve essere soddisfatta la condizione aggiuntiva $u \geq (m + \mu)^2$, quindi il dominio fisico del canale u è quello indicato con III in Fig. (16). Infine nel canale t deve essere soddisfatta la relazione $t \geq (m + \mu)^2$ che però è automaticamente soddisfatta in virtù delle Eq. (7.79), quindi il dominio fisico del canale t è quello indicato in figura con II .

Notiamo infine che se una delle masse è più grande della somma delle altre (ad esempio se $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$) allora un quarto canale può essere aperto, corrispondente al decadimento

$$(IV) \quad 1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4 . \quad (7.80)$$

In questo caso gli invarianti possono essere convenientemente calcolati nel sistema di riferimento di quiete della particella 1, in cui si ha

$$\begin{aligned} q_1 &= (m_1, \vec{0}) , & q_2 &= (-E_2^c, -\vec{p}_2^c) , & q_3 &= (-E_3^c, -\vec{p}_3^c) \\ q_4 &= (-E_4^c, -\vec{p}_4^c) , & E_1^c + E_2^c + E_3^c &= m_1 , & \vec{p}_2^c + \vec{p}_3^c + \vec{p}_4^c &= 0 , \end{aligned} \quad (7.81)$$

e si ottiene quindi

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 E_2^c \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1 E_3^c \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1 E_4^c . \end{aligned} \quad (7.82)$$

Inoltre dalla disequazione in Sez. (7.2) è facile ottenere

$$\left\{ \begin{array}{l} (m_3 + m_4)^2 \leq s \leq (m_1 - m_2)^2 \\ (m_2 + m_4)^2 \leq t \leq (m_1 - m_3)^2 \\ (m_2 + m_3)^2 \leq u \leq (m_1 - m_4)^2 \end{array} \right. \quad (7.83)$$

quindi tutti gli invarianti sono positivi ed il dominio fisico corrispondente a questo canale è completamente contenuto all'interno del triangolo coordinato (in questo caso il grafico in coordinate triangolari si chiama spesso Dalitz plot o plot di Dalitz-Fabri).

Un trattamento più dettagliato delle variabili di Mandelstam nel caso dello scattering $1+2 \rightarrow 1'+2'$ è riportato in [32] §6.4 mentre per il calcolo esplicito di alcuni domini fisici si può vedere la sezione §67 di [27].

¹²Questa disequazione è stata ottenuta per la prima volta in [31] e la dimostrazione, che si effettua per calcolo diretto, è molto lunga e non particolarmente istruttiva.

7.5 Trasformazione delle funzioni di distribuzione

Consideriamo dapprima la trasformazione della funzione di distribuzione nello spazio dei momenti, definita dalla relazione

$$dN = f(\vec{p}) d^3p \quad d^3p = dp_x dp_y dp_z . \quad (7.84)$$

Il numero di particelle dN è un invariante, quindi per determinare la legge di trasformazione di $f(\vec{p})$ basterà studiare come trasforma d^3p . Per fare ciò si potrebbero usare direttamente le leggi per la trasformazione dell'impulso sotto una trasformazione di Lorentz ma è più istruttivo utilizzare un metodo indiretto: indichiamo con $\bar{f}(p)$ la funzione di distribuzione nello spazio dei quadriimpulsi:

$$dN = \bar{f}(p) d^4p \quad d^4p = dp_t dp_x dp_y dp_z . \quad (7.85)$$

Poichè dN è un invariante e d^4p è invariante (le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali nello spazio dei quadriettori) ne segue che $\bar{f}(p)$ è un invariante, cioè $\bar{f}(p) = \bar{f}'(p')$ (dove l'apice indica le quantità calcolate in un diverso sistema di riferimento). Poichè anche p^2 è invariante si può considerare l'identità

$$\bar{f}(p)\delta(p^2 - m^2)d^4p = \bar{f}'(p')\delta(p'^2 - m^2)d^4p' . \quad (7.86)$$

Se a questo punto si integra il primo membro in dp_t tra 0 e ∞ , anche nel secondo membro si deve integrare p'_t tra 0 e ∞ poichè p è un vettore di tipo tempo e quindi nessuna trasformazione di Lorentz propria può cambiare il segno di p_t . Quindi

$$\int_0^\infty \bar{f}(p)\delta(p^2 - m^2)d^3p dp_t = \int_0^\infty \bar{f}'(p')\delta(p'^2 - m^2)d^3p' dp'_t . \quad (7.87)$$

A questo punto si usa la seguente proprietà della distribuzione δ

$$\delta(F(x)) = \sum_{x_i \text{ t.c. } F(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|} , \quad (7.88)$$

con nel caso specifico

$$F(p_t) = p_t^2 - \vec{p}^2 - m^2, \quad p_t|_i = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \pm E, \quad \left| \frac{dF}{dp_t}(p_t|_i) \right| = 2E, \quad (7.89)$$

ottenendo quindi

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_t + E) + \delta(p_t - E)}{2E}, \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} . \quad (7.90)$$

Utilizzando questa espressione in Eq. (7.87) solo $\delta(p_t - E)$ contribuisce (pochè $p_t \geq 0$ ed $E \geq 0$) e si ottiene

$$\bar{f}(E, \vec{p}) \frac{d^3p}{E} = \bar{f}'(E', \vec{p}') \frac{d^3p'}{E'} , \quad (7.91)$$

e pochè si era già mostrato che \bar{f} è invariante si trova infine

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'} , \quad (7.92)$$

che è la formula cercata per la trasformazione dell'elemento di volume tridimensionale nello spazio degli impulsi. A questo punto basta riscrivere la Eq. (7.84) come

$$dN = f(\vec{p}) E \frac{d^3p}{E} \quad (7.93)$$

ed usare l'invarianza di dN e Eq. (7.92) per ottenere la legge di trasformazione di $f(\vec{p})$

$$f'(p') = \frac{E}{E'} f(\vec{p}) \quad (7.94)$$

Per completezza riportiamo anche la dimostrazione esplicita con la trasformazione di Lorentz della relazione Eq. (7.92): dato che sotto rotazioni si ha chiaramente $d^3p = d^3p'$ ci si può limitare a considerare il boost “standard” nella direzione 1:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta p'_1) \\ p_1 &= \gamma(p'_1 + \beta E') \\ p_2 &= p'_2 \\ p_3 &= p'_3 \end{aligned} \quad (7.95)$$

e si ha $d^3p = |J|d^3p'$, dove lo jacobiano è dato da

$$J = \det \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(p'_1, p'_2, p'_3)} = \det \begin{vmatrix} \gamma + \gamma\beta \frac{\partial E'}{\partial p'_1} & \frac{\partial E'}{\partial p'_2} & \frac{\partial E'}{\partial p'_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \gamma + \gamma\beta \frac{\partial E'}{\partial p'_1} = \gamma + \gamma\beta \frac{p'_1}{E'} = \frac{E}{E'} , \quad (7.96)$$

da cui Eq. (7.92).

Consideriamo ora la funzione di distribuzione congiunta delle posizioni e degli impulsi:

$$dN = f(\vec{r}, \vec{p})d^3p dV . \quad (7.97)$$

Nuovamente dN è invariante ed analizziamo come cambia dV . Consideriamo tre sistemi di riferimento: uno in cui le particelle sono a riposo (in cui l'elemento di volume è dV_0) ed altri due in moto con velocità \vec{v} e \vec{v}' rispetto a questo. A causa della contrazione di Lorentz si ha allora per gli elementi di volume la relazione

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2} \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - v'^2} \quad (7.98)$$

da cui si ottiene subito

$$EdV = E'dV' . \quad (7.99)$$

Moltiplicando questa relazione per Eq. (7.92) si ottiene subito l'invarianza di $d^3p dV$ e quindi l'invarianza della funzione di distribuzione congiunta

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f'(\vec{r}', \vec{p}') , \quad (7.100)$$

che è il punto di partenza per lo studio della teoria cinetica relativistica (vedi ad es. [33]).

7.6 Probabilità di transizione e spazio delle fasi

In questa sezione si useranno alcuni risultati basilari ma non elementari di meccanica quantistica (per la cui dimostrazione si rimanda ad altri corsi) per giustificare l'introduzione del cosiddetto “spazio delle fasi”, sia non-relativistico che relativistico.

Prima di addentrarsi nel vivo del problema è necessario discutere alcune premesse sulle normalizzazioni degli stati del continuo ed alcuni argomenti a ciò collegati e, per avere un miglior controllo dei vari passaggi, è conveniente considerare un sistema finito racchiuso in una scatola cubica di lato L , con condizioni periodiche al contorno. Una normalizzazione conveniente per le autofunzioni dell'operatore impulso è in questo caso

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle = \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} , \quad (7.101)$$

normalizzazione che corrisponde ad una particella nel volume L^3 , infatti

$$\int \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) d^3r = \delta_{\vec{p}, \vec{p}'} , \quad (7.102)$$

dove $\delta_{\vec{p}, \vec{p}'} = 1$ se $\vec{p} = \vec{p}'$ e zero altrimenti. Inoltre se il volume è abbastanza grande ($L \gg \hbar/p, \hbar/p'$) si ha anche, usando i risultati di Sez. (A.4)

$$\begin{aligned} \int \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \psi_{\vec{p}'}(\vec{r}) d^3r &\simeq \frac{1}{L^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i \frac{(\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r}}{\hbar}} d^3r = \\ &= \frac{1}{L^3} (2\pi)^3 \delta^3 \left(\frac{\vec{p}' - \vec{p}}{\hbar} \right) = \left(\frac{2\pi\hbar}{L} \right)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) . \end{aligned} \quad (7.103)$$

La corrente di probabilità associata a $\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ è data da

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_{\vec{p}}(\vec{r})^* - \psi_{\vec{p}}(\vec{r})^* \vec{\nabla} \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) \right) = \frac{\vec{p}}{mL^3} = \frac{\vec{v}}{L^3}, \quad (7.104)$$

che è quindi uguale al prodotto della densità $1/L^3$ e della velocità. Infine, poichè le componenti dell'impulso possono assumere solo i valori discreti

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad (7.105)$$

la densità degli stati vale

$$d^3 n_{\vec{p}} = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 d^3 p. \quad (7.106)$$

Che questa sia la corretta relazione tra normalizzazione della funzione d'onda e densità degli stati si vede dal fatto che usando Eq. (7.101) e Eq. (7.106) risulta soddisfatta la relazione di completezza

$$\int d^3 n_{\vec{p}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = 1, \quad (7.107)$$

infatti dato uno stato $|f\rangle$ con funzione d'onda $\langle \vec{r}|f\rangle = f(\vec{r})$ si ha

$$\langle \vec{p}|f\rangle = \int d^3 r \langle \vec{p}|\vec{r}\rangle \langle \vec{r}|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \int f(\vec{r}) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \tilde{f}(\vec{p}/\hbar) \quad (7.108)$$

dove \tilde{f} è la trasformata di Fourier di f , quindi

$$\begin{aligned} \int d^3 n_{\vec{p}} \langle \vec{r}|\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|f\rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} \tilde{f}(\vec{p}/\hbar) d^3 p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k}) d^3 k = f(\vec{r}) = \langle \vec{r}|f\rangle, \end{aligned} \quad (7.109)$$

dove nel penultimo passaggio si è usato il teorema di inversione per la trasformata di Fourier. Affinchè questa relazione rimanga soddisfatta, eventuali cambi di normalizzazione devono essere effettuati modificando contemporaneamente la normalizzazione di $|\vec{p}\rangle$ e la densità degli stati $d^3 n_{\vec{p}}$, secondo la regola

$$\begin{aligned} |\vec{p}\rangle &\rightarrow N|\vec{p}\rangle \\ d^3 n_{\vec{p}} &\rightarrow \frac{1}{N^2} d^3 n_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (7.110)$$

È un risultato fondamentale in meccanica quantistica che la probabilità di transizione per unità di tempo dallo stato i allo stato f si può scrivere nella forma

$$\frac{d\mathcal{P}_{fi}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (7.111)$$

dove T è un operatore che può essere costruito a partire dalla hamiltoniana in rappresentazione dell'interazione (vedi ad es. [27] §72, [34] §4.4) e che al primo ordine in teoria delle perturbazioni coincide con essa. L'espressione precedente è quindi una generalizzazione valida a tutti gli ordini della teoria perturbativa della regola d'oro di Fermi valida al primo ordine. A causa della invarianza per traslazioni conviene inoltre definire un altro operatore M i cui elementi di matrice sono dati da

$$T_{fi} = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i) M_{fi}. \quad (7.112)$$

Per un sistema di particelle interagenti questa ridefinizione corrisponde in rappresentazione di Schrodinger a scrivere la hamiltoniana in termini di variabili del centro di massa e variabili del moto relativo: a causa della invarianza per traslazioni la hamiltoniana dipende dalle variabili del

centro di massa solo attraverso un termine cinetico, che non è quindi presente nella hamiltoniana di interazione. Il fattore $(2\pi\hbar)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)$ proviene dal prodotto scalare delle funzioni d'onda delle variabili associate al centro di massa, mentre M è il corrispettivo di T per la hamiltoniana di interazione che coinvolge le coordinate relative.

Per procedere oltre è necessario riscrivere $|T_{fi}|^2$ in termini di M_{fi} e per procedere in modo formalmente corretto sarebbe necessario utilizzare pacchetti d'onda invece di onde piane (vedi [34] §4.5), tuttavia un modo più semplice è utilizzare il sistema finito di lato L introdotto all'inizio di questa sezione. Confrontando le due espressioni per $\int \psi_{\vec{p}}\psi_{\vec{p}'}d^3r$ scritte in precedenza si ottiene

$$\left((2\pi\hbar)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)\right)^2 \simeq (L^3\delta_{\vec{p}_f, \vec{p}_i})^2 = L^3L^3\delta_{\vec{p}_f, \vec{p}_i} \simeq L^3(2\pi\hbar)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i), \quad (7.113)$$

che è il modo fisicamente sensato di interpretare il quadrato di una δ di Dirac su un volume finito. Siamo quindi arrivati a

$$\frac{d\mathcal{P}_{fi}}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(E_f - E_i)(2\pi\hbar)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)L^3|M_{fi}|^2 \quad (7.114)$$

e se sappiamo che lo stato finale è composto da N_f particelle ma non siamo interessati ai dettagli cinematici di queste particelle si può sommare su tutti gli stati finali che consideriamo equivalenti, pesando ogni particella con la sua densità degli stati ed ottenendo

$$\frac{d\mathcal{P}_i}{dt} = \sum_f \frac{d\mathcal{P}_{fi}}{dt} = \frac{1}{\hbar} \int 2\pi\delta(E_f - E_i)(2\pi\hbar)^3\delta^3(\vec{P}_f - \vec{P}_i)L^3|M_{fi}|^2 \prod_{a=1}^{N_f} \frac{L^3d^3p_a}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (7.115)$$

Vediamo ora quale è la dipendenza dal lato L di questo risultato: nel quadrato dell'elemento di matrice $|M_{fi}|^2$ entrano i quadrati di N_f funzioni d'onda per lo stato finale ed ognuna ha il suo fattore di normalizzazione $1/\sqrt{L^3}$, quindi tutte queste potenze di L cancellano il termine $\prod_{a=1}^{N_f} L^3$ che proviene dalle densità degli stati. Nel caso in cui lo stato iniziale sia composto da una singola particella (decadimento) lo stato iniziale contribuisce a $|M_{fi}|^2$ con un $1/L^3$, che cancella il termine L^3 presente in $d\mathcal{P}_i/dt$ ed il risultato risulta quindi indipendente da L . Nel caso in cui lo stato iniziale sia composto da due particelle (scattering), allo stato iniziale è associato un fattore $1/L^6$ in $|M_{fi}|^2$ e quindi $d\mathcal{P}_i/dt \propto L^{-3}$; la dipendenza da L si cancella tuttavia quando si considera la sezione d'urto σ (vedi Sez. (7.8)), in quanto per il calcolo di σ si deve dividere $d\mathcal{P}_i/dt$ per la corrente incidente j che a sua volta ha un fattore L^{-3} . Poichè alla fine tutte le potenze di L si semplificano sempre, esse possono direttamente essere sottointese nelle espressioni, tuttavia tenerle esplicite può essere utile per verificare la loro effettiva cancellazione.

Data l'espressione di $d\mathcal{P}_i/dt$ risulta naturale introdurre l'elemento di spazio delle fasi non relativistico a N corpi tramite la definizione¹³

$$d\Phi_N^{(NR)} = \delta(E_f - E_i)\delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \prod_{a=1}^N d^3p_a. \quad (7.116)$$

Si vede subito che $d\Phi_N^{(NR)}$ è invariante per rotazioni ma non per trasformazioni di Lorentz, come naturale attendersi da una quantità ottenuta usando le convenzioni non relativistiche. Per ottenere una espressione relativisticamente invariante è conveniente fare un passo indietro e ritornare alla normalizzazione degli stati. Per quanto notato in precedenza (cancellazione dei fattori L) si può sopprimere L usando Eq. (7.110) con $N = L^{3/2}$, quindi il calcolo precedente è a tutti gli effetti equivalente al calcolo effettuato usando la normalizzazione "standard" degli stati dello spettro continuo

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p} \rangle = (2\pi\hbar)^3 \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}), \quad (7.117)$$

¹³Sopprimiamo per semplicità di notazione le potenze di 2π e \hbar , che contribuiscono solo con termini costanti e sono irrilevanti nel presente contesto in cui comunque non conosciamo la forma specifica di M_{fi} .

normalizzazione che non è invariante di Lorentz.

Si è però visto in Sez. (7.5) che $\frac{d^3p}{2E}$ è invariante di Lorentz e di conseguenza $2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p})$ è invariante di Lorentz, poichè la relazione

$$f(\vec{p}_1) = \int \frac{d^3p}{2E} 2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) f(p) \quad (7.118)$$

deve essere valida in ogni sistema di riferimento.

L'invarianza di $2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p})$ (con $E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$) può anche mostrata direttamente usando la generalizzazione per le δ di Dirac multidimensionali delle proprietà usate nella sezione precedente:

$$\delta^3(\vec{F}(\vec{x})) = \sum_{\vec{x}_i \text{ t.c. } \vec{F}(\vec{x}_i)=0} \frac{\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|J(\vec{x}_i)|}, \quad (7.119)$$

dove J è lo Jacobiano di \vec{F} . Per il caso specifico della trasformazione di Lorentz dell'impulso si era visto nella sezione precedente che $J = \det \frac{\partial(p_1, p_2, p_3)}{\partial(p'_1, p'_2, p'_3)} = E/E'$ quindi si ottiene

$$2E\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) = 2E \frac{\delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{p}')}{E/E'} = 2E' \delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{p}') . \quad (7.120)$$

In un contesto relativistico è quindi conveniente usare la normalizzazione invariante

$$\langle \vec{p}_1 | \vec{p} \rangle = (2\pi\hbar)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}) , \quad (7.121)$$

e le espressioni corrispondenti si ottengono dalle precedenti usando Eq. (7.110) con $N = \sqrt{2E}$. Si arriva quindi allo spazio delle fasi ad N particelle relativistico, definito (nuovamente a meno di fattori costanti) da

$$d\Phi_N = \delta^4(P_f - P_i) \prod_a^N \frac{d^3p_a}{2E_a} \quad (7.122)$$

dove $E_a = \sqrt{\vec{p}_a^2 + m_a^2}$ è l'energia della a -esima particella e P_f e P_i sono i quadriimpulsi finale ed iniziale. Poichè le trasformazioni di Lorentz hanno valore assoluto dello Jacobiano uguale ad uno, $\delta^4(P_f - P_i)$ è invariante e di conseguenza $d\Phi_N$ è invariante. Usando in ordine inverso le manipolazioni di Sez. (7.5) si può infine riscrivere lo spazio delle fasi relativistico nella forma

$$d\Phi_N = \delta^4(P_f - P_i) \prod_a^N \delta(p_a^2 - m_a^2) \Theta(p_a^0) d^4p_a . \quad (7.123)$$

È importante per concludere notare che le due espressioni con convenzioni non relativistiche e relativistiche per $d\mathcal{P}_i/dt$ portano esattamente alle stesse conclusioni fisiche e che le differenze nelle due espressioni sono dovute esclusivamente all'introduzione, nel caso relativistico, di fattori convenzionali che rendono il risultato covariante a vista termine per termine.

7.7 Spazio delle fasi a 2 e 3 corpi

In questa sezione calcoleremo gli integrali dello spazio delle fasi relativistico introdotto nella sezione precedente per il caso di 2 e 3 particelle nello stato finale. Questo calcolo risulta utile poichè corrisponde (sempre a parte fattori di proporzionalità) ad effettuare il calcolo di $d\mathcal{P}_i/dt$ nell'ipotesi di $|M_{fi}|^2$ costante, identificando così quelle caratteristiche del processo che dipendono solo dalla cinematica e, specularmente, ottenendo risultati utili ad identificare gli aspetti legati alla dinamica sottostante.

Partiamo dal caso dello spazio delle fasi a due corpi: dato che $d\Phi_N$ è invariante di Lorentz si possono effettuare i calcoli nel sistema di riferimento del centro di massa. Si ha allora

$$\begin{aligned} \int d\Phi_2 &= \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} = \\ &= \int \frac{1}{4E_1 E_2(\vec{p}_1)} \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2(\vec{p}_1)) d^3p_1 , \end{aligned} \quad (7.124)$$

dove si è integrato in d^3p_2 usando $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ e si è introdotta la notazione $E_2(\vec{p}_1) = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_2^2}$. Per poter effettuare l'ultimo integrale rimanente è necessario calcolare il valore di $|\vec{p}_1|$ che annulla l'argomento della δ ; questo è ovviamente l'impulso della particella 1 nel centro di massa, che si può calcolare usando Eq. (7.3):

$$\begin{aligned} p_{1c}^2 &= E_{1c}^2 - m_1^2 = \frac{s^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 + 2s(m_1^2 - m_2^2)}{4s} - m_1^2 = \\ &= \frac{s^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2)}{4s} = \frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}. \end{aligned} \quad (7.125)$$

Utilizzando la proprietà della δ per cambio di variabili si ottiene allora (usando anche $p_{1c} = p_{2c}$)

$$\int d\Phi_2 = \int \frac{p_1^2 dp_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2(\vec{p}_1)} \frac{\delta(p_1 - p_{1c})}{\frac{p_{1c}}{E_{1c}} + \frac{p_{1c}}{E_{2c}(\vec{p}_1)}} = \int \frac{p_{1c} d\Omega_1}{4(E_{1c} + E_{2c})} = \frac{\pi p_{1c}}{\sqrt{s}}. \quad (7.126)$$

Assumendo che $|M_{fi}|^2$ non abbia un andamento troppo brusco alla soglia, la presenza di p_{1c} nell'espressione di Φ_2 determina un andamento caratteristico in $d\mathcal{P}_i/dt$ per valori dell'energia nel centro di massa vicino alla soglia della reazione: se consideriamo ad esempio il caso in cui le due particelle finali abbiano massa $m_1 = m_2 = m$, allora $p_{1c}^2 = (s - 4m^2)/4$, la soglia corrisponde al valore $s = 4m^2$ dell'energia nel centro di massa e lo spazio delle fasi a due corpi assume la forma

$$\int d\Phi_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}. \quad (7.127)$$

Ad esempio la sezione d'urto elettromagnetica $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ si può scrivere nella forma (vedi ad es. [27] §81 problema 8)

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}^{QED} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{1}{s} \left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \quad (7.128)$$

dove $m_\mu \simeq 105.66$ MeV è la massa del muone e poichè $m_e \ll m_\mu$ si è usato $m_e \simeq 0$. Si vede che l'andamento per $s \simeq 4m_\mu^2$ è dominato dall'andamento a radice dello spazio delle fasi.

Passiamo ora ad analizzare il caso di un decadimento in tre corpi: il punto di partenza è

$$\int d\Phi_3 = \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{d^3p_3}{2E_3} \quad (7.129)$$

e di nuovo il calcolo può essere effettuato nel sistema del centro di massa. Effettuando l'integrale su d^3p_3 si arriva a

$$\int d\Phi_3 = \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)) \frac{d^3p_1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{2E_2} \frac{1}{2E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}, \quad (7.130)$$

dove si è introdotta la notazione $E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2}$. Si vogliono ora effettuare gli integrali angolari: consideriamo per il momento fisso \vec{p}_1 ed introduciamo per d^3p_2 un sistema di coordinate polari avente asse polare diretto lungo \vec{p}_1 . La funzione E_3 dipende chiaramente da $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2| \cos \theta$ ma non dall'angolo ϕ , inoltre si ha

$$\frac{dE_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{d \cos \theta} = \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}{E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} \quad (7.131)$$

quindi effettuando l'integrazione in $d \cos \theta$ usando le regole di trasformazione della delta (e quella banale in $d\phi$) si ottiene

$$\int d\Phi_3 = \frac{2\pi}{8} \int \frac{E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|} \frac{d^3p_1 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2|}{E_1 E_2 E_3(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} = \frac{\pi}{4} \int \frac{|\vec{p}_2| d^3p_1 d|\vec{p}_2|}{|\vec{p}_1| E_1 E_2}. \quad (7.132)$$

A questo punto l'integrando non dipende in modo esplicito dalla direzione di \vec{p}_1 , quindi il corrispondente integrale angolare è banale e si trova infine (poichè $|\vec{p}|d|\vec{p}| = E dE$)

$$\int d\Phi_3 = \pi^2 \int \frac{|\vec{p}_1||\vec{p}_2|d|\vec{p}_1|d|\vec{p}_2|}{E_1 E_2} = \pi^2 \int dE_1 dE_2 . \quad (7.133)$$

Lo spazio delle fasi è quindi uniforme nelle variabili E_1 e E_2 (le energie delle particelle 1 e 2 nel sistema di riferimento del centro di massa) all'interno del dominio fisico. Eventuali non-uniformità nella distribuzione sperimentale sono quindi da imputare interamente al fattore dinamico $|M_{fi}|^2$.

Il bordo del dominio fisico nelle variabili E_1, E_2 si determina dalla δ in Eq. (7.130): si deve avere

$$\sqrt{s} - E_1 - E_2 - \sqrt{m_3^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = 0 , \quad (7.134)$$

ovvero

$$(\sqrt{s} - E_1 - E_2)^2 = m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 + E_1^2 + E_2^2 + 2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2}\cos\theta , \quad (7.135)$$

che può essere riscritta nella forma

$$-2\sqrt{E_1^2 - m_1^2}\sqrt{E_2^2 - m_2^2}\cos\theta = m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 - s + 2\sqrt{s}(E_1 + E_2) - 2E_1 E_2 ; \quad (7.136)$$

il dominio fisico è quindi determinato nel piano (E_1, E_2) dalla relazione

$$4(E_1^2 - m_1^2)(E_2^2 - m_2^2) \geq (m_3^2 - m_1^2 - m_2^2 - s + 2\sqrt{s}(E_1 + E_2) - 2E_1 E_2)^2 . \quad (7.137)$$

Variabili che sono spesso usate nei decadimenti a 3 corpi sono le masse invarianti di coppie di particelle:

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2 , \quad s_{13} = (p_1 + p_3)^2 = (P - p_2)^2 . \quad (7.138)$$

Queste variabili (e la similmente definita s_{12}) sono l'analogo delle variabili di Mandelstam per il caso di un decadimento a tre corpi e tutte le relazioni ottenute in Sez. (7.4) usando s, t, u hanno degli analoghi in s_{12}, s_{13}, s_{23} . Si hanno quindi in particolare le relazioni

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 &\leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2 \\ (m_1 + m_3)^2 &\leq s_{13} \leq (\sqrt{s} - m_2)^2 \\ (m_2 + m_3)^2 &\leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_1)^2 , \end{aligned} \quad (7.139)$$

la relazione $s + t + u = h$ diventa $s_{12} + s_{13} + s_{23} = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ e la disuguaglianza di Kibble Eq. (7.76) è semplicemente Eq. (7.137) riscritta in termini di s_{12}, s_{13} ed s_{23} .

Probabilmente la caratteristica più importante di queste variabili è che mantengono l'uniformità dello spazio delle fasi che era stata dedotta in precedenza per le energie nel sistema di riferimento del centro di massa E_1, E_2 . Nel centro di massa si ha infatti

$$s_{23} = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_1 , \quad s_{13} = s + m_2^2 - 2\sqrt{s}E_2 , \quad (7.140)$$

quindi

$$ds_{23}ds_{13} = 4s dE_1 dE_2 \quad (7.141)$$

e

$$\int d\Phi_3 = \frac{\pi^2}{4s} \int ds_{23}ds_{13} . \quad (7.142)$$

7.8 Sezione d'urto in un generico sistema di riferimento

Supponiamo di avere un fascio di particelle con densità numerica n_1 (indichiamo con n_1^0 la densità nel sistema di riposo) incidente con velocità \vec{v}_r su un bersaglio fermo di densità numerica n_2^0 . La sezione d'urto totale σ è legata a questi dati ed al numero di collisioni dN avvenute in un volume (tridimensionale) dV nell'intervallo di tempo dt dalla relazione:

$$dN = \sigma v_r n_1 n_2^0 dV dt \quad (7.143)$$

Questa equazione può essere usata come definizione di σ , che risulta pertanto essere una quantità invariante di Lorentz, in quanto la sua definizione assume di essere in uno specifico sistema di riferimento. Vedremo ora come riscrivere questa espressione in un sistema di riferimento generico, in cui il fascio di particelle ha una velocità \vec{v}_1 ed il bersaglio una velocità \vec{v}_2 .

Appare innanzitutto naturale supporre che in ogni sistema di riferimento sussista una relazione della forma

$$dN = An_1n_2dVdt \quad (7.144)$$

dove A è una funzione da determinarsi, che nel sistema del laboratorio deve ridursi a σv_r . Notiamo inoltre che dN , il numero di particelle che ha subito un urto, deve essere un invariante relativistico e che $dVdt$ è pure invariante, in quanto le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali dello spazio quadridimensionale. Da Eq. (7.144) segue allora che anche An_1n_2 debba essere invariante. Le densità trasformano con l'inverso della contrazione di Lorentz, cioè si ha in generale

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1-V^2}} = \frac{n_0 E}{m} \quad (7.145)$$

dove abbiamo indicato con E l'energia di una particella, con m la sua massa e con n_0 la densità di riposo. Segue allora che AE_1E_2 debba pure essere invariante.

Vediamo ora di ottenere una forma esplicita di A : è conveniente notare che, poichè p_1p_2 è un invariante, pure la seguente espressione è invariante

$$B = A \frac{E_1E_2}{p_1p_2} = A \frac{E_1E_2}{E_1E_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2} . \quad (7.146)$$

Inoltre nel sistema di riferimento del laboratorio si ha $A = \sigma v_r$, $E_2 = m_2$ e $\vec{p}_2 = 0$, quindi $B = \sigma v_r$ in ogni sistema di riferimento, quindi

$$A = \sigma v_r \frac{p_1p_2}{E_1E_2} . \quad (7.147)$$

Dobbiamo ora scrivere v_r in funzione delle due velocità \vec{v}_1 e \vec{v}_2 : usando il fatto che p_1p_2 è un invariante e che nel sistema del laboratorio si ha $p_1p_2 = E_1^L m_2 = m_1m_2\gamma_r$ si ottiene

$$v_r = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2}} \quad (7.148)$$

da cui, scrivendo esplicitamente $p_1 = m_1\gamma_1(1, \vec{v}_1)$ ed analogamente per p_2 , si trova

$$\begin{aligned} A &= \sigma \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} = \\ &= \frac{\sigma m_1 m_2}{E_1 E_2 \sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}} \sqrt{(1-\vec{v}_1\vec{v}_2)^2 - (1-v_1^2)(1-v_2^2)} = \\ &= \sigma \sqrt{(1-\vec{v}_1\vec{v}_2)^2 - (1-v_1^2)(1-v_2^2)} = \sigma \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2} , \end{aligned} \quad (7.149)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'identità:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 - (\epsilon_{ijk}v_1^j v_2^k)(\epsilon_{ilm}v_1^l v_2^m) = \\ &= v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 - (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})v_1^j v_2^k v_1^l v_2^m = \\ &= v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\vec{v}_2 - v_1^2 v_2^2 + (\vec{v}_1\vec{v}_2)^2 = \\ &= (1 - \vec{v}_1\vec{v}_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2) . \end{aligned} \quad (7.150)$$

Rimettendo insieme i pezzi si ottiene infine l'espressione

$$dN = \sigma \sqrt{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2} n_1 n_2 dV dt , \quad (7.151)$$

che è la generalizzazione cercata: Eq. (7.151) è invariante per costruzione e si riduce alla espressione corretta Eq. (7.143) nel sistema del laboratorio, quindi è l'espressione corretta in ogni sistema di riferimento.

8 Radiazione Cherenkov

8.1 Richiami di elettromagnetismo nei mezzi

Le equazioni di Maxwell nei mezzi si scrivono nella forma¹⁴ (vedi ad es. [4] §6.6 per una deduzione microscopica e [6] §6, §29, §75 per un approccio più macroscopico)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho_{ext} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{ext} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{8.1}$$

dove ρ_{ext} e \vec{j}_{ext} denotano la densità di carica libera e di corrente di conduzione, indicate con il perfixe “ext” per distinguerle dalle densità di carica e di corrente dovute ad effetti di polarizzazione del mezzo. I campi ausiliari $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ sono legati al campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ed al campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dalle relazioni (valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo¹⁵)

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega)\vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad \vec{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega)\vec{H}(\vec{k}, \omega),\tag{8.2}$$

dove \vec{k} è il vettore d’onda e ω è la frequenza angolare dei campi, ϵ è la permittività dielettrica e μ è la permeabilità magnetica. Le relazioni precedenti sono talvolta chiamate relazioni costitutive.

I campi \vec{D} e \vec{H} possono anche essere descritti introducendo la densità di polarizzazione elettrica $\vec{P}(\vec{r}, t)$ ed il vettore $\vec{M}(\vec{r}, t)$ (che nel limite quasi-statico è la densità di magnetizzazione¹⁶) tramite le quali si scrivono come

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}, t), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{M}(\vec{r}, t).\tag{8.3}$$

In questo caso, al posto della permittività dielettrica e della permeabilità magnetica si introducono la suscettività dielettrica χ_e e la suscettività magnetica χ_m tramite le relazioni (nuovamente valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo)

$$\vec{P}(\vec{k}, \omega) = \chi_e(\vec{k}, \omega)\vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad \vec{M}(\vec{k}, \omega) = \chi_m(\vec{k}, \omega)\vec{H}(\vec{k}, \omega),\tag{8.4}$$

da cui si vede che la suscettività dielettrica è legata alla permittività dielettrica da $\chi_e = (\epsilon - 1)/(4\pi)$ e che la suscettività magnetica è legata alla permeabilità magnetica da $\chi_m = (\mu - 1)/(4\pi)$. La densità di carica di polarizzazione $\rho_{ind}(\vec{r}, t)$ e la densità di corrente di magnetizzazione $\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t)$ indotte dai campi nel mezzo si possono infine scrivere in termini delle polarizzazioni tramite

$$\rho_{ind} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad \vec{j}_{ind} = c\vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t},\tag{8.5}$$

come si vede dal fatto che usando Eq. (8.3) in Eq. (8.1) si ottengono le equazioni valide nel vuoto quando sono presenti la densità di carica $\rho_{ext} + \rho_{ind}$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ext} + \vec{j}_{ind}$.

Un mezzo in cui i valori di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono indipendenti dal valore della frequenza ω è detto un mezzo non dispersivo, mentre un mezzo in cui ϵ e μ sono reali è detto mezzo non dissipativo. La dispersività e la dissipatività, per come sono state definite, sembrano due proprietà indipendenti, tuttavia è possibile mostrare che non è così: un mezzo dispersivo deve essere dissipativo ed un mezzo dissipativo deve essere dispersivo, vedi ad es. [4] §7.10, [30] §123, [6] §82.

¹⁴Vedi Sez. (A.3) per le equazioni nel sistema di unità di misura SI.

¹⁵Vedi [6] §76 per le relazioni che legano i campi \vec{E} , \vec{B} ed i campi \vec{D} , \vec{H} per il caso di un mezzo non a riposo.

¹⁶Vedi [6] §79 per i limiti della interpretazione di \vec{M} come densità di magnetizzazione.

Poichè le equazioni di Maxwell senza sorgenti sono rimaste identiche al caso del vuoto, si possono ancora scrivere il campo elettrico ed il campo magnetico in termini del potenziale scalare e del potenziale vettore esattamente come nel vuoto:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} . \quad (8.6)$$

Poichè le relazioni che legano il campo elettrico \vec{E} ed il campo magnetico \vec{B} ai vettori \vec{D} , \vec{H} sono lineari per le trasformate di Fourier dei campi, è conveniente scrivere tutto quello che appare in Eq. (8.1) in trasformata e si useranno le convenzioni in Sez. (A.1); ad esempio

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 k d\omega , \quad \tilde{\vec{E}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \vec{E}(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r dt . \quad (8.7)$$

Utilizzando queste stesse convenzioni di segni e π nelle trasformate di Fourier anche per $\tilde{\rho}_{ext}$, \tilde{j}_{ext} e $\tilde{\vec{B}}$ le prime due equazioni di Eq. (8.1) diventano

$$\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}} &= \frac{4\pi}{c} \mu \tilde{j}_{ext} - i\frac{\omega}{c} \mu \epsilon \tilde{\vec{E}} \end{aligned} \quad (8.8)$$

ed usando anche $\tilde{\vec{A}}$ si trova

$$\tilde{\vec{B}} = i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}} , \quad \tilde{\vec{E}} = -i\vec{k} \tilde{\phi} + i\frac{\omega}{c} \tilde{\vec{A}} . \quad (8.9)$$

Arriviamo quindi alle equazioni

$$\begin{aligned} k^2 \tilde{\phi} - \frac{\omega}{c} \vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ -\vec{k} (\vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}}) + k^2 \tilde{\vec{A}} + \mu \epsilon \frac{\omega}{c} \vec{k} \tilde{\phi} - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\vec{A}} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_{ext} , \end{aligned} \quad (8.10)$$

che corrispondono nel vuoto, cioè quando $\epsilon = \mu = 1$, a Eq. (2.5). Per semplificare queste equazioni è conveniente usare la scelta di gauge

$$\vec{k} \cdot \tilde{\vec{A}} - \mu \epsilon \frac{\omega}{c} \tilde{\phi} = 0 , \quad (8.11)$$

che è l'equivalente della gauge di Lorenz nel caso dell'elettromagnetismo nei mezzi, ottenendo infine

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\phi} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ \left(k^2 - \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\vec{A}} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{j}_{ext} . \end{aligned} \quad (8.12)$$

Nel caso in cui nel mezzo non siano presenti cariche e correnti esterne si vede che le equazioni precedenti ammettono soluzione non nulla solo nel caso in cui sia verificata la relazione

$$\omega^2 \mu \epsilon = c^2 k^2 , \quad (8.13)$$

che è l'equivalente nel mezzo della relazione $\omega = ck$ valida per le onde elettromagnetiche nel vuoto. Tuttavia in generale ϵ e μ sono numeri complessi (vedi ad es. l'espressione Eq. (6.5) ottenuta con il modello dell'elettrone legato elasticamente) ed un'onda piana monocromatica nel senso proprio del termine (cioè con ω e \vec{k} reali) non è soluzione delle equazioni del moto. In generale si definisce l'indice di rifrazione complesso tramite l'equazione

$$n(\omega) = \sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} , \quad (8.14)$$

la parte reale di questo numero è l'indice di rifrazione propriamente detto, mentre la sua parte immaginaria viene spesso chiamata indice di assorbimento (vedi dopo per la relazione tra le parti immaginarie di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ e la dissipazione). Nel caso di dissipazione trascurabile (o comunque debole), da Eq. (8.13) segue che una onda piana è soluzione delle equazioni nel mezzo e propaga con velocità di fase $\omega/k = c/n(\omega)$.

Notiamo esplicitamente che alla velocità di fase non è associata una trasmissione di informazione, in quanto è relativa ad una onda piana che si estende già da $t = -\infty$ a $t = +\infty$; di conseguenza la velocità di fase può essere maggiore di c . Nel caso di dispersione debole ed in cui si considerino pacchetti d'onda la velocità più ragionevole da usare è la velocità di gruppo $\partial\omega/\partial k$, tuttavia vicino alle risonanze (cioè quando si ha dispersione forte) anche questa velocità può risultare maggiore di c . Per una discussione delle varie definizioni di velocità che si possono utilizzare per un onda in un mezzo dispersivo vedi [4] §7.11, [17] §22 e soprattutto [35].

Quando $\rho_{ext} = 0$ e $\vec{j}_{ext} = 0$ si può eliminare il potenziale scalare usando la libertà di gauge residua di Eq. (8.11), in analogia con quanto si era fatto nel caso del vuoto, vedi Sez. (2.2). Dalla condizione di gauge e da $\tilde{\phi} = 0$ segue allora che $\vec{k} \cdot \vec{A} = 0$; da Eq. (8.9) segue allora anche $\vec{k} \cdot \vec{B} = \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ e $\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$. Se si considera il quadrato di questa ultima equazione si ottiene infine $\vec{B}^2 = \mu\epsilon\vec{E}^2$. Essendo queste relazioni invarianti di gauge, esse sono valide per ogni scelta di gauge, infatti si sarebbero anche potute ottenere a partire dalle equazioni di Maxwell scritte in termini di \vec{E} e \vec{B} , senza effettuare il passaggio ai potenziali.

Nel vuoto il flusso di energia è dato dal vettore di Poynting $\vec{S}_v = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$, dove il pedice v è stato usato per indicare che questa espressione è vera nel vuoto. Supponiamo ora di considerare il caso in cui un campo elettrico \vec{E} ed un campo magnetico \vec{B} siano presenti all'esterno di un dielettrico; il flusso di energia nella direzione ortogonale alla superficie del dielettrico deve essere continuo (si suppongono trascurabili i meccanismi di trasmissione dell'energia nel mezzo diversi dalla propagazione di onde elettromagnetiche, quali ad esempio la propagazione di onde sonore) e dall'espressione di \vec{S}_v segue che alla componente normale del flusso di energia contribuiscono le componenti del campo elettrico e magnetico nel piano della superficie. D'altra parte da Eq. (8.1) segue (integrando lungo un percorso infinitesimo che attraversa il bordo del dielettrico ed usando il teorema di Stokes) che le componenti parallele alla superficie di \vec{E} e di \vec{H} sono continue al bordo di un dielettrico, inoltre nel vuoto $\vec{H} = \vec{B}$, quindi il vettore di Poynting nel mezzo è dato da¹⁷

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} . \quad (8.15)$$

Usando le equazioni di Maxwell Eq. (8.1) si ottiene

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}_{ext} - \frac{1}{4\pi} \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (8.16)$$

e se non fosse presente dispersione (e quindi $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \mu \vec{B}(\vec{r}, t)$ con ϵ e μ costanti) questa equazione potrebbe essere riscritta nella forma del teorema di Poynting

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{8\pi} \left[\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right] \right) = -\vec{E} \cdot \vec{j}_{ext} \quad (\text{caso non dispersivo}) \quad (8.17)$$

in cui $\frac{1}{8\pi} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right)$ può essere interpretata come la densità di energia del campo nel mezzo.

Nel caso di un mezzo dispersivo una simile interpretazione non è in generale possibile¹⁸, tuttavia l'espressione in Eq. (8.16) può essere usata per calcolare l'energia dissipata: consideriamo ad

¹⁷Per come è stata dedotta, questa è l'espressione del flusso di energia elettromagnetica nel mezzo. La relazione di questa espressione con la densità di impulso del campo elettromagnetico nel mezzo presenta invece, rispetto al caso del vuoto, alcune sottigliezze, vedi [36].

¹⁸Vedi [4] §6.8 o [6] §80 per le espressioni della densità di energia che si possono ottenere nel caso di dispersione debole.

esempio il caso in cui \vec{E} e \vec{B} siano campi stazionari monocromatici e $\vec{j}_{ext} = 0$. Considerando la media su un periodo di Eq. (8.16) si ottiene un flusso costante di energia che viene immesso nel sistema dalle sorgenti che mantengono i campi e, poichè si è in una condizione stazionaria, l'energia dissipata per unità di tempo e di volume è quindi data da

$$Q = -\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{1}{4\pi} \left\langle \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle, \quad (8.18)$$

che nel caso di una campo monocromatica con andamento $e^{-i\omega t}$ diventa (come al solito è necessario considerare esplicitamente le parti reali dei campi in quanto l'espressione precedente è quadratica)

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi} \left[(\epsilon^*(\omega) - \epsilon(\omega)) |\vec{E}|^2 + (\mu^*(\omega) - \mu(\omega)) |\vec{H}|^2 \right] = \frac{\omega}{8\pi} \left(\Im \epsilon(\omega) |\vec{E}|^2 + \Im \mu(\omega) |\vec{H}|^2 \right), \quad (8.19)$$

da cui si vede in un mezzo dissipativo si deve avere $\omega \Im \epsilon(\omega) > 0$ e $\omega \Im \mu(\omega) > 0$. Queste proprietà generali di $\epsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono necessarie per determinare l'andamento asintotico di alcune espressioni integrali che compariranno in Sez. (8.4), vedi Sez. (A.7) per i dettagli matematici.

Terminiamo questa sezione notando che è possibile effettuare un cambio di variabili per ricondurre le equazioni d'onda del campo elettromagnetico nel mezzo a quelle nel vuoto: introducendo le variabili primare

$$\begin{aligned} c &= c' \sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}, & \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) &= \tilde{\phi}'(\vec{k}, \omega) / \sqrt{\epsilon(\omega)}, & \tilde{A}(\vec{k}, \omega) &= \tilde{A}'(\vec{k}, \omega) \sqrt{\mu(\omega)}, \\ \tilde{\rho}_{ext}(\vec{k}, \omega) &= \tilde{\rho}'_{ext}(\vec{k}, \omega) \sqrt{\epsilon(\omega)}, & \tilde{j}_{ext}(\vec{k}, \omega) &= \tilde{j}'_{ext}(\vec{k}, \omega) \sqrt{\epsilon(\omega)}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

si vede infatti senza difficoltà che le equazioni Eq. (8.11) e Eq. (8.12) si riducono per le variabili primare alla forma

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c'} \frac{\partial \phi'}{\partial t} &= 0 \\ \left(\frac{1}{(c')^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \phi' &= 4\pi \rho'_{ext} \\ \left(\frac{1}{(c')^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \vec{A}' &= \frac{4\pi}{c'} \vec{j}'_{ext}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

che sono, a parte la ridefinizione $c \rightarrow c'$, l'equazione per la gauge di Lorenz nel vuoto e le equazioni d'onda nel vuoto.

8.2 Il caso senza dispersione

In questa sezione considereremo solamente il caso ideale di un mezzo non dispersivo e non dissipativo, quindi con ϵ, μ reali ed indipendenti da ω . Supponiamo che una particella di carica e si muova con velocità costante \vec{v} nel mezzo. Con il cambio di variabili Eq. (8.20) ci si riduce a studiare un problema che è l'analogo nel mezzo del problema la cui soluzione sono i potenziali di Lienard-Wiechert ottenuti in Sez. (3.3), tuttavia rispetto a questo caso è presente una notevole differenza. Nel vuoto la velocità che compare nelle equazioni di campo è c ; dal fatto che tutte le particelle cariche si muovono con velocità minore di c segue allora che, per dati t ed \vec{r} , esiste sempre una unica coppia di valori t' e \vec{r}' che soddisfano l'equazione per il tempo ritardato $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ con $t - t' > 0$. Nel caso del mezzo l'equazione per il tempo ritardato diventa $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c'$, dove $c' = c/n$ è la velocità di fase della luce nel mezzo, che può essere minore di c ; in questo caso vedremo ora che si possono avere diverse possibilità.

Introduciamo per semplicità le notazioni $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\Delta t = t - t'$, allora l'equazione per il tempo ritardato si può scrivere nella forma compatta $R = c' \Delta t$ e si ha in generale $\vec{R} = \vec{v} \Delta t + \vec{R}_i$, dove il vettore \vec{R}_i (mostrato in figura Fig. (17)) è la posizione del punto di osservazione relativamente alla

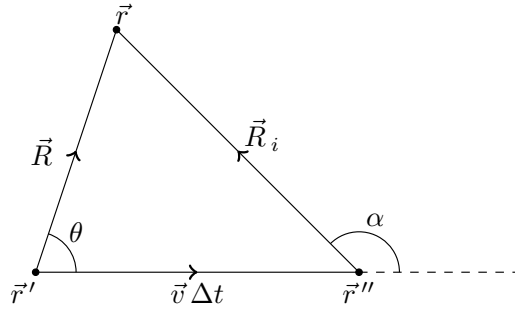


Figura 17: Figura per il calcolo del tempo ritardato; la posizione \vec{r}'' è la posizione dove si trova la particella che al tempo t' era in \vec{r}' all'istante di tempo $t = t' + \Delta t$.

posizione istantanea della particella. Se consideriamo il quadrato di questa equazione vettoriale ed usiamo la condizione $R = c' \Delta t$ otteniamo l'equazione di secondo grado in $\Delta t/R_i$

$$(c'^2 - v^2) \left(\frac{\Delta t}{R_i} \right)^2 - 2v \cos \alpha \frac{\Delta t}{R_i} - 1 = 0, \quad (8.22)$$

dove α è l'angolo tra la velocità \vec{v} ed il vettore \vec{R}_i , vedi Fig. (17). È ovvio che l'equazione debba essere nella variabile $\Delta t/R_i$ e non Δt in quanto riscaldando sia \vec{R} che Δt l'equazione del tempo ritardato rimane invariante ed il vettore \vec{R}_i viene riscaldato della stessa quantità. Affinchè l'equazione Eq. (8.22) ammetta soluzioni è necessario che il suo discriminante sia positivo, quindi

$$c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha \geq 0, \quad (8.23)$$

inoltre si deve imporre che Δt sia positivo, in modo da selezionare il tempo ritardato.

Nel caso $v < c'$ il discriminante è sempre positivo per qualunque valore dell'angolo α e le due soluzioni sono

$$\frac{\Delta t}{R_i} = \frac{v \cos \alpha \pm \sqrt{c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha}}{c'^2 - v^2} \quad (8.24)$$

inoltre si ha $c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha > v^2 \cos^2 \alpha$, quindi solo una delle due soluzioni è accettabile come tempo ritardato. Questo caso è quello che si presenta nel vuoto, in cui $c' = c$ e $v < c$.

Supponiamo ora che si abbia $v > c'$; in questo caso il comportamento dipende dall'angolo e si devono distinguere le seguenti possibilità ($c'/v < 1$):

$|\sin \alpha| > c'/v$: il discriminante è negativo e non si hanno soluzioni

$|\sin \alpha| = c'/v$: il discriminante è nullo e si ha una soluzione degenera

$|\sin \alpha| < c'/v$: il discriminante è positivo e si hanno due soluzioni distinte

Poichè $v > c'$ si ha $c'^2 - v^2 \sin^2 \alpha < v^2 \cos^2 \alpha$ e $c'^2 - v^2 < 0$, quindi nel terzo caso si hanno due soluzioni con $\Delta t < 0$ se $\cos \alpha > 0$, che non sono accettabili in quanto non "ritardate", e due soluzioni con $\Delta t > 0$ se $\cos \alpha < 0$ (il caso $\cos \alpha = 0$ non può presentarsi in quanto altrimenti si avrebbe $|\sin \alpha| = 1$ ma $|\sin \alpha| < c'/v < 1$ nel terzo caso). La regione in cui si hanno soluzioni accettabili e quindi potenziali ritardati non nulli è quella caratterizzata da

$$\cos \alpha < 0, \quad |\sin \alpha| \leq \frac{c'}{v} = \frac{1}{\beta n} \quad (8.25)$$

(dove $n = \sqrt{\mu \epsilon}$ è l'indice di rifrazione) e consiste in una superficie semiconica avente come vertice la posizione istantanea della particella carica ed apertura angolare $2 \arcsin[1/(\beta n)]$.

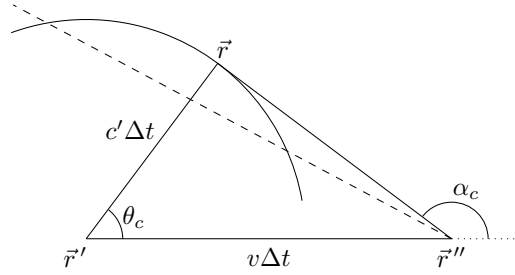


Figura 18: Determinazione geometrica dell'angolo critico Cherenkov.

La presenza di queste tre possibilità nel caso $c'/v < 1$ si può spiegare qualitativamente nel modo seguente: se, per dati t' e r' , le quantità t e r soddisfano l'equazione $t - t' = |\vec{r} - \vec{r}'|/c'$, allora anche tutti i vettori sulla superficie della sfera di raggio $R = c'\Delta t$ centrata in \vec{r}' soddisfano la stessa equazione. Questo significa che per valori dell'angolo α abbastanza vicini a π si avranno due soluzioni dell'equazione Eq. (8.22), corrispondenti ai punti in cui la linea tratteggiata interseca la circonferenza di raggio $c'\Delta t$ centrata in \vec{r}' in Fig. (18). Il valore critico dell'angolo α_c , per cui è presente una unica soluzione due volte degenere, corrisponde al caso di una retta tangente alla circonferenza, mentre per $|\alpha| < \alpha_c$ la retta non interseca la circonferenza e non si hanno soluzioni. I valori critici degli angoli α e θ sono a questo punto facili da determinare geometricamente tramite le equazioni

$$v\Delta t \sin(\pi - \alpha_c) = c'\Delta t, \quad v\Delta t \cos \theta_c = c'\Delta t, \quad (8.26)$$

ottenendo quindi

$$\sin \alpha_c = \frac{1}{\beta n}, \quad \cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}, \quad (8.27)$$

dove $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ è l'indice di rifrazione del mezzo.

Si può ora calcolare la forma esplicita del potenziale scalare e del potenziale vettore associati ad una particella in moto uniforme nel mezzo partendo dai potenziali ritardati. Le espressioni generali che si ottengono sono praticamente identiche a quelle dedotte in Sez. (3.3), con un paio di differenze:

$$\phi'(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{e'}{R|1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c'|} \Big|_{t_r^{(i)}}, \quad \vec{A}'(\vec{r}, t) = \sum_i \frac{e'\vec{v}}{Rc'|1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c'|} \Big|_{t_r^{(i)}}, \quad (8.28)$$

dove come al solito $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ e $\hat{n} = \vec{R}/R$. La prima differenza consiste nel fatto che si deve sommare sui tempi ritardati, in quanto si è appena visto che in alcuni casi si hanno due soluzioni dell'equazione che definisce il tempo ritardato. La seconda differenza è la presenza dei valori assoluti nel denominatore delle precedenti espressioni; questi originano dal fatto che nella regola di trasformazione della δ di Dirac compare il modulo dello Jacobiano. In Sez. (3.3) i valori assoluti non erano stati scritti poichè si era mostrato che non erano necessari quando $v < c'$. È conveniente scrivere i potenziali in termini della posizione istantanea della particella carica, quindi usiamo nuovamente $\vec{R} = \vec{v}\Delta t + \vec{R}_i$, da cui si ottiene (usando $R = c'\Delta t$)

$$1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c'} = 1 - \frac{(\vec{v}\Delta t + \vec{R}_i) \cdot \vec{v}}{c'R} = 1 - \frac{v^2}{c'^2} - \frac{R_i v \cos \alpha}{c'^2 \Delta t}. \quad (8.29)$$

Usando le espressioni esplicite Eq. (8.24) si ha quindi

$$R \left(1 - \frac{\hat{n} \cdot \vec{v}}{c'} \right) = c'\Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c'^2} - \frac{R_i v \cos \alpha}{c'^2 \Delta t} \right) = \pm R_i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c'^2} \sin^2 \alpha} \quad (8.30)$$

da cui si vede che, per $v > c'$, i potenziali nella regione caratterizzata da $|\sin \alpha| < c'/v$, $\cos \alpha < 0$ (chiamata cono Cherenkov) sono dati da (usando $\phi = \phi'/\sqrt{\epsilon}$, $A = A'\sqrt{\mu}$ ed $e' = e/\sqrt{\epsilon}$, vedi Eq. (8.20))

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{2e}{\epsilon R_i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c'^2} \sin^2 \alpha}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \mu \epsilon \frac{\vec{v}}{c} \phi(\vec{r}, t), \quad (8.31)$$

dove il fattore 2 (che non comparirebbe per $v < c'$) è dovuto alla somma sui due tempi ritardati, la dipendenza temporale è nascosta nella definizione di R_i e α e si vede che i potenziali sono singolari sul cono Cherenkov.

Per calcolare i campi supponiamo a questo punto che la particella carica si stia muovendo lungo l'asse \hat{x} con legge oraria $\vec{s}(t) = vt\hat{x}$; si ha $R_i^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2$ e $R_i^2 \sin^2 \alpha = y^2 + z^2$ e quindi

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{2e}{\epsilon R_*}, \quad A_1(\vec{r}, t) = \mu \epsilon \frac{v}{c} \phi(\vec{r}, t), \quad A_2 = A_3 = 0, \\ R_* &= \sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c'^2}\right) (y^2 + z^2)}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Il campo elettrico ed il campo magnetico possono a questo punto essere calcolati semplicemente, ottenendo

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{2e\vec{R}_i}{\epsilon R_*^3} \left(1 - \frac{v^2}{c'^2}\right), \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (8.33)$$

ed è evidente la analogia di questo campo elettrico con il campo di una carica in moto uniforme nel vuoto Eq. (3.6), da cui l'espressione precedente si differenzia per la presenza di un ϵ a denominatore, per il fattore 2, per la sostituzione $c \rightarrow c'$ e per il fatto di essere definita solo all'interno del cono Cherenkov $x < vt$ e $(x - vt)^2 > \left(\frac{v^2}{c'^2} - 1\right) (y^2 + z^2)$.

Il campo elettrico è diretto lungo \vec{R}_i , cioè lungo la retta che congiunge il punto di osservazione alla posizione istantanea della carica, mentre il campo magnetico si avvolge in cerchi attorno alla direzione della velocità \vec{v} . Il vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi\mu} \vec{E} \times \vec{B}$ diventa singolare sul cono Cherenkov (come anche i campi) e nei punti vicini al cono punta in direzione ortogonale alla superficie del cono. È quindi ragionevole attendersi che il moto attraverso un mezzo uniforme di una carica con velocità costante e superiore alla velocità di fase della luce nel mezzo ($v > c'$) determini la produzione di radiazione (radiazione Cherenkov) che propaga come una onda d'urto nel mezzo. Tuttavia nella trattazione che si è seguita fino ad ora è presente una singolarità spuria dei campi sul cono Cherenkov, indotta dall'aver trascurato la dispersione, che impedisce di calcolare l'energia irraggiata.

8.3 Deduzione della formula di Frank-Tamm

In questa sezione si presenterà una deduzione della formula di Frank-Tamm, cioè dell'espressione che descrive la perdita di energia per unità di lunghezza e di frequenza per effetto Cherenkov di una particella che si muove con velocità costante in un mezzo. Si utilizzerà come punto di partenza l'espressione Eq. (3.105) per l'energia irraggiata per angolo solido, per unità di frequenza e per unità di tempo, che riportiamo qui per comodità

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2}{(2\pi)^2 c^3} \int \left(\vec{j}(\vec{r}, T + \tau/2)^* \cdot \vec{j}(\vec{r}', T - \tau/2) + \right. \\ &\quad \left. - c^2 \rho(\vec{r}, T + \tau/2)^* \rho(\vec{r}', T - \tau/2) \right) e^{-i\omega \left(\tau - \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') / c \right)} d\tau d\vec{r}' d\vec{r}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Usando Eq. (8.20) le equazioni del moto si riducono al caso del vuoto, vediamo ora cosa succede ai campi se si usano sistematicamente queste sostituzioni:

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{B}} &= i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}} = \sqrt{\mu(\omega)}i\vec{k} \times \tilde{\vec{A}}' = \sqrt{\mu(\omega)}\tilde{\vec{B}}' \\ \tilde{\vec{E}} &= -i\vec{k}\tilde{\phi} + i\frac{\omega}{c}\tilde{\vec{A}} = -i\vec{k}\frac{\tilde{\phi}'}{\sqrt{\epsilon(\omega)}} + i\frac{\omega}{c'\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)}}\tilde{\vec{A}}'\sqrt{\mu(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}\tilde{\vec{E}}'\end{aligned}\quad (8.35)$$

ed il vettore di Poynting medio diventa (trascurando la dissipazione, quindi $\epsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$)

$$\langle \tilde{\vec{S}} \rangle = \frac{c}{16\pi} \langle \tilde{\vec{E}} \times \tilde{\vec{H}}^* + \tilde{\vec{E}}^* \times \tilde{\vec{H}} \rangle = \frac{c'}{16\pi} \langle \tilde{\vec{E}}' \times (\tilde{\vec{B}}')^* + (\tilde{\vec{E}}')^* \times \tilde{\vec{B}}' \rangle = \langle \tilde{\vec{S}}_v' \rangle, \quad (8.36)$$

quindi se si usano sistematicamente le variabili primato e si usano le formule valide per il vuoto si ottiene il corretto valore del vettore di Poynting nel mezzo e quindi il corretto valore dell'energia irraggiata.

Consideriamo quindi l'equivalente "primato" di Eq. (8.34) ed usiamo le espressioni della densità di carica e della densità di corrente corrispondenti ad una particella in moto con velocità \vec{v} costante:

$$\rho'_{ext}(\vec{r}, t) = e'\delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}'_{ext}(\vec{r}, t) = \vec{v}\rho'_{ext}(\vec{r}, t). \quad (8.37)$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dTd\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2(e')^2(v^2 - (c')^2)}{(2\pi)^2(c')^3} \int \delta(\vec{r} - \vec{v}T - \vec{v}\tau/2)\delta(\vec{r}' - \vec{v}T + \vec{v}\tau/2) \times \\ &\quad \times e^{-i\omega[\tau - \hat{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/c']} d^3r d^3r' d\tau = \\ &= \frac{\omega^2(e')^2}{(2\pi)^2 c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau(\omega - \omega\hat{n} \cdot \vec{v}/c')} d\tau = \\ &= \frac{\omega^2(e')^2}{2\pi c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \delta(\omega - \omega\hat{n} \cdot \vec{v}/c'),\end{aligned}\quad (8.38)$$

mentre la perdita per unità di percorso è data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega d\Omega} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dT d\omega d\Omega} = \frac{\omega^2(e')^2}{2\pi v c'} \left(\frac{v^2}{(c')^2} - 1 \right) \delta(\omega - \omega\hat{n} \cdot \vec{v}/c'), \quad (8.39)$$

che riscrivendo le variabili "primato" in termini delle originali usando Eq. (8.20) diventa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega d\Omega} &= \frac{\omega^2 e^2 n(\omega)}{2\pi v c \epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(\omega - \omega n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}) = \\ &= \frac{\omega e^2 n(\omega)}{2\pi v c \epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(1 - n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}).\end{aligned}\quad (8.40)$$

Da questa espressione si vede che si ha emissione di radiazione di frequenza ω solo nelle direzioni \hat{n} per le quali si ha $n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta} = 1$; se indichiamo con θ l'angolo tra la direzione della particella e la direzione di emissione della radiazione si ha allora $\cos\theta = \frac{1}{n(\omega)\beta}$, che non è nient'altro che l'equazione del cono Cherenkov ottenuta nella sezione precedente per il caso senza dispersione. Affinchè questa equazione ammetta soluzioni deve ovviamente essere soddisfatta la condizione $n(\omega)\beta \geq 1$, ovvero la particella carica deve avere velocità superiore alla velocità di fase della luce nel mezzo.

Il prossimo passo è calcolare la perdita totale di energia per unità di lunghezza e per unità di frequenza, che si ottiene integrando l'equazione precedente su tutte le direzioni. Si ha quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} = \frac{e^2}{2\pi v c} \int d\Omega \frac{\omega n(\omega)}{\epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \delta(1 - n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}). \quad (8.41)$$

ed usando

$$\int \delta(1 - n(\omega) \hat{n} \cdot \vec{\beta}) d\Omega = \int \delta(1 - n(\omega) \beta \cos \theta) d\phi d \cos \theta = \frac{2\pi}{n(\omega)\beta} \Theta(n(\omega)\beta - 1) \quad (8.42)$$

(dove $\Theta(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $\Theta(x) = 0$ se $x < 0$) si trova

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} &= \frac{e^2}{c^2 \beta^2} \frac{\omega}{\epsilon(\omega)} (\beta^2 n(\omega)^2 - 1) \Theta(n(\omega)\beta - 1) = \\ &= \frac{\mu(\omega) e^2 \omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2} \right) \Theta(n(\omega)\beta - 1) \end{aligned} \quad (8.43)$$

Questa è la formula di Frank-Tamm, che di solito viene scritta in forma integrale (in modo da non dover scrivere esplicitamente la funzione Θ) e senza il $\mu(\omega)$ a moltiplicare, in quanto per praticamente tutti i materiali non ferromagnetici $\mu(\omega) \simeq 1$ è una ottima approssimazione.

Ricordando che l'energia di un fotone di frequenza ω è data da $E_\gamma = \hbar\omega$, la formula di Frank-Tamm può essere riscritta come il numero di fotoni emessi per unità di lunghezza e per unità di energia (dei fotoni):

$$\frac{dN}{dx dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{d\mathcal{E}}{dx dE_\gamma} = \frac{1}{\hbar^2 \omega} \frac{d\mathcal{E}}{dx d\omega} = \mu(E_\gamma/\hbar) \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{n^2(E_\gamma/\hbar)\beta^2} \right), \quad (8.44)$$

dove α è la costante di struttura fine e $\frac{\alpha}{\hbar c} \simeq 370 \frac{1}{\text{eV cm}}$. Per ottenere il numero totale di fotoni emessi (l'energia totale emessa) è necessario integrare l'espressione precedente su tutti i valori di E_γ (di ω) per i quali si ha $n(E_\gamma)\beta \geq 1$ ($n(\omega)\beta \geq 1$).

8.4 Deduzione alla Fermi della formula di Frank-Tamm

In questa sezione si dedurrà la formula di Frank-Tamm calcolando esplicitamente l'energia irraggiata per unità di tempo da una particella che si muove con velocità costante in un mezzo seguendo l'approccio di [37]. L'idea dell'approccio è la seguente: si calcola l'energia che attraversa nell'unità di tempo un cilindro di raggio a con asse coincidente con la traiettoria della particella, quindi si effettua il limite $a \rightarrow \infty$ in modo da selezionare la componente di radiazione; in questo modo si ottiene l'energia irraggiata per unità di tempo della particella. Per poter applicare questo metodo è ovviamente necessario supporre il mezzo non dissipativo, quindi $\epsilon(\omega), \mu(\omega) \in \mathbb{R}$, altrimenti si otterrebbe sempre un risultato nullo nel limite $a \rightarrow \infty$.

È prima di tutto necessario calcolare il campo elettrico ed il campo magnetico generati dalla particella, partendo dalle equazioni Eq. (8.12), che riportiamo qui per praticità

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \mu(\omega) \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\phi} &= \frac{4\pi}{\epsilon} \tilde{\rho}_{ext} \\ \left(k^2 - \mu(\omega) \epsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\vec{A}} &= \mu \frac{4\pi}{c} \tilde{\vec{j}}_{ext}, \end{aligned} \quad (8.45)$$

dove le trasformate sono definite usando le convenzioni Eq. (8.7) e la densità di carica e la densità di corrente associate ad una particella in moto con velocità \vec{v} costante sono date da

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v} \rho(\vec{r}, t). \quad (8.46)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e \delta(\vec{r} - \vec{v}t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 r dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e e^{i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})t} dt = \frac{e}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned} \quad (8.47)$$

e $\tilde{j}(\vec{k}, \omega) = \vec{v} \tilde{\rho}(\vec{k}, \omega)$; usando queste espressioni in Eq. (8.45) si ottengono le trasformate dei potenziali¹⁹:

$$\tilde{\phi}(\vec{k}, \omega) = \frac{e}{2\pi^2 \epsilon(\omega)} \left(\frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)} \right), \quad \tilde{A}(\vec{r}, t) = \epsilon(\omega) \mu(\omega) \frac{\vec{v}}{c} \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega), \quad (8.48)$$

da cui si trovano le trasformate dei campi:

$$\tilde{B}(\vec{k}, \omega) = i\epsilon(\omega) \mu(\omega) \vec{k} \times \frac{\vec{v}}{c} \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega), \quad \tilde{E}(\vec{k}, \omega) = i \left(\epsilon(\omega) \mu(\omega) \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \vec{k} \right) \tilde{\phi}(\vec{k}, \omega). \quad (8.49)$$

Supponiamo ora per semplicità che la velocità della particella sia diretta lungo l'asse x , quindi $\vec{v} = v \hat{x}$, e calcoliamo la dipendenza da ω del campo elettrico nel punto di coordinate $a \hat{y}$ (per semplicità di notazione scriveremo d'ora in poi semplicemente ϵ invece di $\epsilon(\omega)$ ed analogamente per μ):

$$\tilde{E}(a; \omega) = \int \tilde{E}(\vec{k}, \omega) e^{iak_2} d^3k = \frac{ie}{2\pi^2 \epsilon} \int e^{iak_2} \left(\epsilon \mu \frac{\omega \vec{v}}{c^2} - \vec{k} \right) \frac{\delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} d^3k. \quad (8.50)$$

Partiamo dalla componente x :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1(a; \omega) &= \frac{ie}{2\pi^2 \epsilon} \int e^{iak_2} \left(\epsilon \mu \frac{\omega v}{c^2} - k_1 \right) \frac{\delta(\omega - vk_1)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} d^3k = \\ &= \frac{ie}{2\pi^2 \epsilon} \frac{\omega}{v^2} (\epsilon \mu \beta^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3, \end{aligned} \quad (8.51)$$

dove

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu; \quad (8.52)$$

usando il fatto che $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ si vede subito che l'integrale in dk_3 da come risultato $\pi/\sqrt{\Lambda + k_2^2}$, quindi si ottiene

$$\tilde{E}_1(a; \omega) = \frac{ie}{2\pi \epsilon} \frac{\omega}{v^2} (\epsilon \mu \beta^2 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iak_2}}{\sqrt{\Lambda + k_2^2}} dk_2. \quad (8.53)$$

Per $\tilde{E}_2(a; \omega)$ si ottiene analogamente

$$\begin{aligned} \tilde{E}_2(a; \omega) &= -\frac{ie}{2\pi^2 \epsilon} \int e^{iak_2} k_2 \frac{\delta(\omega - vk_1)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} d^3k = \\ &= -\frac{ie}{2\pi^2 \epsilon v} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_2^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3 = \\ &= -\frac{ie}{2\pi \epsilon v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 e^{iak_2}}{\sqrt{\Lambda + k_2^2}} dk_2, \end{aligned} \quad (8.54)$$

mentre è semplice vedere che $\tilde{E}_3(a; \omega) = 0$. Passiamo ora al campo magnetico: poichè $\vec{v} = v \hat{x}$ si ha ovviamente $\tilde{B}_1(a; \omega) = 0$, $\tilde{B}_2(a; \omega)$ si annulla analogamente ad \tilde{E}_3 ed infine si ha

$$\begin{aligned} \tilde{B}_3(a; \omega) &= -\frac{ie\mu v}{2\pi^2 c} \int \frac{k_2 e^{iak_2} \delta(\omega - k_1 v)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu} d^3k = \\ &= -\frac{ie\mu}{2\pi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2 e^{iak_2} dk_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + k_3^2 + \Lambda} dk_3 = \\ &= -\frac{ie\mu}{2\pi c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_2 e^{iak_2}}{\sqrt{k^2 + \Lambda}} dk_2 = \epsilon \mu \beta \tilde{E}_2(a, \omega). \end{aligned} \quad (8.55)$$

¹⁹È immediato verificare che questi potenziali soddisfano la condizione di gauge Eq. (8.11) che è necessaria per la validità delle equazioni Eq. (8.45).

Introduciamo inoltre per semplicità le notazioni

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau \quad (8.56)$$

per rappresentare gli integrali che compaiono nelle espressioni di \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 e \tilde{B}_3 . Questi integrali non sono esprimibili tramite trascendenti elementari e sono legati alle funzioni di Bessel modificate K_0 e K_1 , tuttavia questo fatto non sarà usato nel seguito.

Passiamo ora al calcolo del flusso di energia attraverso un cilindro di raggio a : data la simmetria cilindrica del problema è sufficiente calcolare la componente lungo \hat{y} del vettore di Poynting $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ nei punti con coordinate $(x, a, 0)$, che è data da

$$S_2(x, a, 0, t) = -\frac{c}{4\pi} E_1(x, a, 0, t) H_3(x, a, 0, t) \quad (8.57)$$

e quindi l'energia che attraversa il cilindro nell'unità di tempo al tempo t_0 è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t_0) = -2\pi a \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(x, a, 0, t_0) H_3(x, a, 0, t_0) dx. \quad (8.58)$$

Dato che la particella si muove con velocità costante v lungo l'asse \hat{x} , si ha

$$E_1(x, a, 0, t_0) = E_1(0, a, 0, t_0 - x/v) \quad (8.59)$$

ed analogamente per H_3 , quindi la perdita di energia per unità di tempo è costante nel tempo e può essere riscritta nella forma

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{cva}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} E_1(0, a, 0, t) H_3(0, a, 0, t) dt, \quad (8.60)$$

che può essere riscritta, usando il teorema di Parsefall ed il fatto che i campi sono reali, nella forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} &= -cva\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_1(a; \omega) \tilde{H}_3^*(a; \omega) d\omega = \\ &= -2\pi cva \int_0^{+\infty} \text{Re}[\tilde{E}_1(a; \omega) \tilde{H}_3^*(a; \omega)] d\omega. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Usando le espressioni precedentemente trovate per i campi si ha quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^{\infty} \frac{e^2}{2\pi} \frac{\omega a}{v\epsilon} (\epsilon\mu\beta^2 - 1) \text{Re}[\mathcal{K}_0(a, \Lambda) \mathcal{K}_1^*(a, \Lambda)] d\omega, \quad (8.62)$$

dove parte della dipendenza da ω dell'integrando è nascosta dentro Λ , vedi Eq. (8.52).

Per procedere oltre è necessario conoscere gli sviluppi asintotici degli integrali $\mathcal{K}_0(a, \Lambda)$ e $\mathcal{K}_1(a, \Lambda)$ quando $a \rightarrow \infty$. È mostrato in Sez. (A.7) che se $\Lambda > 0$ si hanno gli andamenti asintotici (con $0 < \lambda = \sqrt{\Lambda}$)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{a\lambda}} e^{-a\lambda}, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq i\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{a}} e^{-a\lambda} \quad (8.63)$$

mentre se $\Lambda < 0$ si hanno gli andamenti ($0 < \lambda = \sqrt{-\Lambda}$)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{a\lambda}} e^{ia\lambda}, \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq (1+i)\sqrt{\frac{\pi\lambda}{a}} e^{ia\lambda}. \quad (8.64)$$

Si vede quindi che se $\Lambda > 0$ le funzioni \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1 vanno a zero esponenzialmente al crescere di a , quindi per i valori di ω per i quali $\Lambda > 0$ (ovvero per i quali $v < c/n(\omega)$ ricordando Eq. (8.52))

non si ha emissione di radiazione. Si può quindi limitare l'integrale alle sole frequenze per le quali si abbia $\Lambda < 0$, nel qual caso si ha (per a grande)

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \mathcal{K}_1^*(a; \Lambda) \simeq \frac{2\pi}{a}, \quad (8.65)$$

quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{v \geq c/n(\omega)} \frac{e^2 \omega}{v \epsilon} (\epsilon \mu \beta^2 - 1) d\omega \quad (8.66)$$

ed infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{v \geq c/n(\omega)} \frac{e^2 \omega \mu(\omega)}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\omega)^2} \right) d\omega, \quad (8.67)$$

che è la formula di Frank-Tamm.

9 Perdita di energia di particelle cariche nell'attraversamento della materia

9.1 La sezione d'urto Rutherford

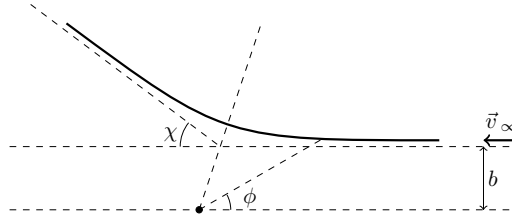


Figura 19: La geometria della sezione d'urto Rutherford.

Consideriamo il caso in cui un fascio di particelle puntiformi (non interagenti tra loro) di massa μ incida su un centro diffusore fisso che interagisce con le particelle con un campo centrale. La sezione d'urto differenziale di diffusione si definisce come il numero di particelle che vengono deflesse da un certo angolo solido nell'unità di tempo per unità di densità di corrente incidente, quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{J} \frac{dN(\Omega)}{dt}, \quad (9.1)$$

dove $N(\Omega)d\Omega$ è il numero di particelle che vengono diffuse nell'angolo solido $d\Omega$ intorno ad Ω e J è il valore della densità di corrente di particelle incidenti (numero di particelle per unità di superficie per unità di tempo).

Il problema ha ovviamente una simmetria cilindrica, in cui l'asse è l'asse del fascio, e per il calcolo della sezione d'urto risulta conveniente fare uso del parametro di impatto b (vedi Fig. (19)). Supponiamo infatti di conoscere la relazione che intercorre tra il valore l'angolo di scattering χ ed il valore del parametro di impatto b , sia essa $b(\chi)$. Il numero di particelle che verranno deflesse con angolo compreso tra χ e $\chi + d\chi$ è allora il numero di particelle che incidono con parametro di impatto compreso tra $b(\chi)$ e $b(\chi) + |db(\chi)|$ e questo numero è (usando la simmetria cilindrica)

$$N(\Omega) d\Omega = 2\pi b |db| Jt = Jt 2\pi b(\chi) \left| \frac{db(\chi)}{d\chi} \right| d\chi \quad (9.2)$$

A causa della simmetria cilindrica è conveniente scrivere l'elemento di angolo solido nella forma $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ e quindi si ottiene infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (9.3)$$

Per procedere oltre è necessario trovare la relazione tra il parametro d'impatto b e l'angolo di scattering χ , che ovviamente dipende dalla forma specifica del potenziale di interazione. Nel caso dell'interazione Coulombiana $U(r) = \frac{e_1 e_2}{r}$ si riesce a scrivere la relazione $b(\chi)$ in forma chiusa e si può procedere in diversi modi (vedi ad es. [38] §18-19, [39] §11.6, [40] §2.2).

Se indichiamo con v_∞ il valore assoluto della velocità delle particelle del fascio quando sono lontane dal bersaglio, allora la conservazione del momento angolare assiale assume la forma

$$L_z = \mu r^2 \dot{\phi} = \mu v_\infty b, \quad (9.4)$$

dove ϕ è l'angolo tra l'asse del fascio e la posizione della particella (vedi Fig. (19)). Se identifichiamo il piano di scattering mostrato in Fig. (19) con il piano xy , allora l'impulso ha inizialmente componente nulla lungo la direzione \hat{y} , quindi si ha

$$p_y = \Delta p_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt, \quad (9.5)$$

dove F_y è la componente y della forza. Dalla conservazione del momento angolare assiale si ha inoltre $dt = \frac{r^2}{v_\infty b} d\phi$, quindi (usando il fatto che l'urto è elastico, quindi il modulo dell'impulso è lo stesso prima e dopo l'urto)

$$\mu v_\infty \sin \chi = \frac{1}{v_\infty b} \int_0^{\pi-\chi} F_y r^2 d\phi . \quad (9.6)$$

Dalla forma esplicita di \vec{F} si ha allora

$$\mu v_\infty \sin \chi = \frac{e_1 e_2}{v_\infty b} \int_0^{\pi-\chi} \sin \phi d\phi = \frac{e_1 e_2}{v_\infty b} (1 + \cos \chi) , \quad (9.7)$$

che usando $\sin \chi = 2 \sin(\chi/2) \cos(\chi/2)$ e $\cos(\chi) = 2 \cos^2(\chi/2) - 1$ si può scrivere come

$$b = \frac{e_1 e_2}{\mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\chi/2)} \quad (9.8)$$

La derivata del parametro di impatto rispetto all'angolo di scattering è quindi data da

$$\frac{db}{d\chi} = - \frac{e_1 e_2}{2\mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\chi/2)} \quad (9.9)$$

ed abbiamo tutti gli ingredienti da usare nell'espressione Eq. (9.3), quindi si ottiene infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)} \quad (9.10)$$

che è la forma standard della sezione d'urto Rutherford. Un modo diverso di riscrivere questa sezione d'urto usa l'impulso trasferito $\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$, dove \vec{p} e \vec{p}' sono gli impulsi prima e dopo l'urto. Poichè l'urto è elastico si ha $p = p'$, quindi

$$q^2 = (\vec{p}' - \vec{p})^2 = 2p^2(1 - \cos \chi) = 4p^2 \sin^2(\chi/2) \quad (9.11)$$

e poichè si ha ovviamente $p = \mu v_\infty$ si può scrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2\mu e_1 e_2}{q^2} \right)^2 . \quad (9.12)$$

9.2 Radiazione di frenamento (Bremsstrahlung)

In questa sezione si tratterà la cosiddetta radiazione di frenamento o Bremsstrahlung, che è la radiazione elettromagnetica emessa da una particella carica in conseguenza della accelerazione dovuta agli urti con i nuclei del mezzo. Gli urti con gli elettroni, più leggeri dei nuclei di tre o più ordini di grandezza, comportano accelerazioni molto minori e possono pertanto essere trascurati ai fini del calcolo della radiazione di frenamento. È bene notare fin da subito che, poichè la radiazione viene emessa a causa della accelerazione dovuta ai singoli urti di tipo coulombiano, in condizioni ordinarie l'effetto del mezzo sui campi elettromagnetici è praticamente trascurabile²⁰.

Una trattazione quantitativamente precisa della radiazione di frenamento richiederebbe strumenti molto più raffinati di quelli che è qui possibile usare (vedi ad es. [27] §92-93), quindi ci si limiterà in pratica ad argomenti semi-quantitativi. Il punto di partenza è l'espressione Eq. (3.93) dell'energia irradiata per unità di angolo solido ($d\Omega$) e di frequenza ($d\omega$) da una particella di carica ze che si muove nel vuoto con legge oraria $s(t)$, che riportiamo qui per convenienza

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})^2} dt \right|^2 . \quad (9.13)$$

²⁰Per elettroni con energie dell'ordine di TeV o PeV il ruolo del mezzo diventa importante e si ha una soppressione della radiazione di frenamento nota come effetto Landau-Pomeranchuk-Migdal.

9.2.1 Il caso non relativistico

Consideriamo inizialmente il caso non relativistico, nel qual caso l'espressione generale si può semplificare notevolmente:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \simeq \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) dt \right|^2. \quad (9.14)$$

Una particella carica di velocità v ($\ll c$) che urti contro un atomo di raggio caratteristico a , subirà una deviazione significativa solo se il parametro di impatto risulta essere $b \lesssim a$, nel qual caso il tempo caratteristico dell'urto sarà dato da $\tau \simeq b/v$. $d\mathcal{E}/(d\Omega d\omega)$ risulta essere molto soppressa se $\omega\tau \gg 1$, in quanto si ha interferenza distruttiva tra le varie componenti in frequenza di $\dot{\vec{\beta}}$, che ha frequenza tipica $1/\tau$, mentre nel caso $\omega\tau \ll 1$ si ha

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \Big|_{\omega\tau \ll 1} \simeq \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{n} \times (\hat{n} \times \dot{\vec{\beta}}) dt \right|^2 = \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c^3} |\hat{n} \times \Delta\vec{v}|^2, \quad (9.15)$$

dove abbiamo indicato con $\Delta\vec{v}$ il cambio di velocità della particella dovuto all'urto. Se indichiamo con θ l'angolo tra $\Delta\vec{v}$ e \hat{n} si avrà allora in prima approssimazione

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{(ze)^2}{4\pi^2 c^3} |\Delta\vec{v}|^2 \sin^2 \theta & \omega\tau \lesssim 1 \\ 0 & \omega\tau \gtrsim 1 \end{cases} \quad (9.16)$$

ed integrando su tutto l'angolo solido si ottiene (usando $\int_0^\pi \sin^2 \theta d\cos \theta = 4/3$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{2(ze)^2}{3\pi c^3} |\Delta\vec{v}|^2 & \omega\tau \lesssim 1 \\ 0 & \omega\tau \gtrsim 1 \end{cases}. \quad (9.17)$$

Passiamo ora al calcolo di $\Delta\vec{v}$ nel caso di un urto coulombiano. Il calcolo potrebbe essere effettuato in modo esatto notando che in un urto elastico si ha $|\Delta\vec{v}| = 2v \sin(\chi/2)$ (dove χ è l'angolo di scattering) ed usando la relazione Eq. (9.8) tra il parametro di impatto b e l'angolo di scattering χ , tuttavia nella maggior parte dei casi la particella incidente subirà solo una piccola deflessione, quindi si possono usare delle espressioni approssimate che corrispondono al caso di piccolo χ . Approssimando il moto della particella con un moto rettilineo uniforme di parametro di impatto b , indicando con \vec{p} l'impulso della particella e con \vec{E} il campo elettrico coulombiano si ha allora

$$|\Delta\vec{p}| \simeq ze \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dt \simeq \frac{ze}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dx = \frac{ze}{2\pi bv} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi b |\vec{E}_\perp| dx = \frac{2zZe^2}{bv}, \quad (9.18)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss e si è indicata con Ze la carica del nucleo. Indicando con M la massa della particella incidente si ha quindi infine

$$|\Delta\vec{v}| \simeq \frac{2zZe^2}{bMv}. \quad (9.19)$$

Usando questo risultato in Eq. (9.17) si ottiene per l'energia emessa per unità di frequenza da una particella che collide con parametro d'impatto b l'espressione (ricordando che $\tau \simeq b/v$)

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} \simeq \begin{cases} \frac{8(ze)^2 (zZe^2)^2}{3\pi c^3} \frac{1}{(bMv)^2} & \omega \lesssim v/b \\ 0 & \omega \gtrsim v/b \end{cases} \quad (9.20)$$

che dovrà essere integrata in $2\pi b db$ e moltiplicata per la densità di corrente incidente se si vuole calcolare l'energia persa per unità di frequenza nell'unità di tempo, quindi si introduce

$$\chi_\omega \equiv \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} db = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{M^2 v^2 c^3} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{1}{b} db \quad (9.21)$$

che è nota come sezione d'urto di irraggiamento (nonostante non abbia le unità di misura di una sezione d'urto: $[\chi_\omega] = \frac{J}{Hz} m^2$).

Serve quindi determinare i limiti integrazione del parametro d'impatto b . L'estremo superiore b_{max} deve sicuramente essere minore del raggio atomico a , tuttavia per ottenere un risultato non nullo si deve anche avere $b \lesssim v/\omega$ (vedi le espressioni precedenti), condizione che è generalmente più restrittiva per piccole velocità, quindi si può usare $b_{max} = v/\omega$. L'estremo inferiore deve sicuramente essere maggiore del raggio nucleare, tuttavia nel limite non relativistico il principio di indeterminazione impone un limite più stringente: da $\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ e $\Delta p \lesssim Mv$ segue $\Delta x \gtrsim \hbar/(Mv)$, quindi $b_{min} = \hbar/(Mv)$ ($b_{min} \gtrsim 1$ fm se $Mv \lesssim 200$ MeV/c).

Fino ad ora si è schematizzato il problema calcolando l'energia irraggiata da una particella che percorre una legge oraria equivalente a quella di uno scattering coulombiano senza irraggiamento. È evidente che in questo modo non stiamo conservando l'energia totale, ma questa approssimazione è giustificata fintanto che l'energia irraggiata è molto minore dell'energia cinetica della particella; in particolare stiamo assumendo che tutti i fotoni emessi abbiano energia molto minore dell'energia cinetica della particella. Un modo per migliorare l'accordo con i dati sperimentali per frequenze non "molto piccole" consiste nel sostituire nelle espressioni di b_{min} e b_{max} la velocità v con una velocità effettiva $\langle v \rangle$, ottenuta mediando la velocità della particella prima e dopo l'emissione di un fotone di energia $\hbar\omega$:

$$v \rightarrow \langle v \rangle = \frac{1}{\sqrt{2M}} (\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}) , \quad (9.22)$$

dove abbiamo indicato con E l'energia cinetica della particella. Usando quindi

$$b_{max} = \frac{\langle v \rangle}{\omega} , \quad b_{min} = \frac{\hbar}{M\langle v \rangle} \quad (9.23)$$

si trova

$$\chi_\omega = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{MEc^3} \log \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) \quad (9.24)$$

dove λ (che nel caso specifico varrebbe 1) è un parametro che dipende dai dettagli di b_{min} e b_{max} ; con un calcolo più preciso si otterrebbe $\lambda = 2$ e nel seguito useremo questo valore. Si può notare che, a causa della sostituzione $v \rightarrow \langle v \rangle$, questa espressione si annulla per $E = \hbar\omega$, compatibilmente con la conservazione dell'energia.

La sezione d'urto di irraggiamento χ_m può essere convertita in una sezione d'urto per produzione di fotoni: $\chi_\omega d\omega$ è l'energia irraggiata a frequenza ω nell'unità di tempo da una corrente incidente unitaria di particelle (1particella/(m²s)) e questa stessa quantità può essere riscritta nella forma $E_\gamma \frac{d\sigma}{dE_\gamma} dE_\gamma$, dove $E_\gamma = \hbar\omega$ e $(d\sigma/dE_\gamma)dE_\gamma$ è il numero di fotoni di energia E_γ prodotti nell'unità di tempo dalla corrente incidente unitaria di particelle. Poichè $[d\sigma/dE_\gamma] = m^2/J$, σ ha le corrette unità di misura di una sezione d'urto e si ha

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{E_\gamma} \frac{d\omega}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{\hbar^2\omega} = \frac{16}{3} \frac{1}{\hbar c} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{Mc^2} \frac{1}{E} \log \left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) , \quad (9.25)$$

da cui si vede che per $\hbar\omega \ll E$ si ha il tipico andamento $d\sigma/dE_\gamma \propto 1/(\hbar\omega)$.

Supponiamo ora che il mezzo considerato abbia una densità numerica n (atomi/m³), allora l'energia persa in radiazione di frenamento da un fascio di densità di corrente unitaria attraversando uno spessore dx sarà data da

$$d\mathcal{E} = ndx \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi b db \int_0^{E/\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega = ndx \int_0^{E/\hbar} \chi_\omega d\omega , \quad (9.26)$$

dove E/\hbar è la massima frequenza possibile per un fotone prodotto da una particella incidente di energia cinetica E , quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} n \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{MEc^3} \int_0^{E/\hbar} \log \left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}} \right) d\omega . \quad (9.27)$$

L'integrale può essere riscritto usando la variabile $x = \hbar\omega/E$, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^{E/\hbar} \log\left(\frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega}}{\sqrt{\hbar\omega}}\right) d\omega &= \frac{E}{\hbar} \int_0^1 \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) dx = \\ &= \frac{E}{\hbar} \left(\int_0^1 \log(1 + \sqrt{1-x}) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \log(x) dx \right), \end{aligned} \quad (9.28)$$

inoltre integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1 + \sqrt{1-x}) dx &= x \log(1 + \sqrt{1-x}) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x} + 1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} - 1 + x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2} = -\sqrt{1-x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (9.29)$$

e analogamente $\int_0^1 \log(x) dx = -1$, quindi infine

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} n \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{Mc^2 \hbar c} \quad (9.30)$$

è l'energia media persa per unità di lunghezza da una particella di massa M e carica ze nell'attraversare un mezzo di numero atomico Z e densità numerica n nella approssimazione non relativistica. La densità numerica del mezzo può essere riscritta come $n = \frac{N_A \rho}{A(g)}$, dove $N_A \simeq 6.02 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro, ρ è la densità di massa del materiale ed $A(g)$ il suo peso atomico espresso in grammi; l'espressione precedente si può quindi riscrivere nella forma

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{16}{3} \frac{N_A}{A(g)} \frac{z^4 Z^2}{Mc^2} \alpha r_e^2 (m_e c^2)^2, \quad (9.31)$$

dove $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ è la costante di struttura fine, $m_e c^2 \simeq 0.51$ MeV è l'energia di riposo di un elettrone e $r_e = e^2/(m_e c^2) \simeq 2.8$ fm è il raggio classico dell'elettrone. Se consideriamo ad esempio il caso di un elettrone ($z = 1$) che attraversa del piombo ($A(g) \simeq 207$ g, $Z = 82$, $\rho = 11.35$ g/cm³) si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \simeq 29.74 \frac{\text{KeV}}{\text{g/cm}^2} \quad (9.32)$$

e quindi $\frac{d\mathcal{E}}{dx} \simeq 338$ KeV/cm.

9.2.2 Il caso relativistico

Se indichiamo con S il sistema di riferimento in cui il nucleo è fermo e la particella incidente di massa M ha velocità iniziale \vec{v} , per studiare il caso relativistico è conveniente partire dal sistema S' in cui la particella di massa M è ferma ed il nucleo si muove con velocità $-\vec{v}$. Se si suppone nuovamente che in un singolo urto solo una piccola percentuale dell'energia cinetica iniziale venga convertita in radiazione, allora per descrivere l'irraggiamento dovuto alla accelerazione della particella di massa M si possono usare le espressioni nonrelativistiche usate nella sezione precedente. In particolare si arriva ad una espressione equivalente alla Eq. (9.21), in cui si può approssimare $v \simeq c$,

$$\chi'_{\omega'} = \frac{16}{3} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{M^2 c^5} \int_{b'_{min}}^{b'_{max}} \frac{1}{b'} db' \quad (9.33)$$

e dove con gli apici si sono indicate le variabili nel sistema di riferimento S' .

Rispetto al caso non relativistico gli estremi di integrazione sono tuttavia diversi: esiste ancora un cut-off sulle frequenze a $\omega' \tau \lesssim 1$, dove τ è il tempo caratteristico della collisione, però nel caso relativistico si ha $\tau = b/(v\gamma)$ (vedi Sez. (3.1)), quindi si deve avere $b \lesssim \frac{v\gamma}{\omega'}$ oltre alla ovvia

condizione $b \lesssim a$, dove a è il raggio atomico, che può essere ben approssimato dall'espressione (vedi ad es. [24] §70) $a \simeq 1.4a_0/Z^{1/3}$, con $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$ il raggio di Bohr. Per capire quale di queste due espressioni sia da usare per b'_{max} si può procedere come segue: nel sistema S quasi tutta la radiazione viene emessa ad un angolo (rispetto alla velocità della particella di massa M) $\bar{\theta} \simeq 1/\gamma$, quindi la corrispondente frequenza in S' sarà approssimativamente $\omega' \simeq \gamma\omega(1 - \beta \cos \bar{\theta})$, che usando $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ diventa $\omega' \simeq \frac{\omega}{\gamma}$. Dalla conservazione dell'energia segue che $\omega \leq (\gamma - 1)Mc^2/\hbar$, quindi $\omega' \lesssim Mc^2/\hbar$ e

$$\frac{v\gamma/\omega'}{a} \gtrsim \frac{\gamma\hbar}{aMc} = \frac{\gamma Z^{1/3} e^2 m_e}{1.4 \hbar c M} \simeq \frac{Z^{1/3} \gamma m_e}{192 M}, \quad (9.34)$$

da cui si vede che per γ sufficientemente grandi si ha sempre $v\gamma/\omega' \gtrsim a$ e quindi il corretto estremo superiore da usare è $b'_{max} = a$ (in questa condizione si parla di "schermaggio completo"). Questo è particolarmente vero per il caso degli elettroni ($M = m_e$) per i quali energie dell'ordine delle decine di MeV sono sufficienti a rendere l'estremo destro dell'equazione precedente maggiore di uno.

Per quanto riguarda b'_{min} , usando il principio di indeterminazione in modo analogo a come fatto nel caso non relativistico si otterrebbe $b \gtrsim \Delta x = \frac{\hbar}{Mc\gamma}$ tuttavia questa stima risulta eccessivamente piccola. Poichè $\tau = b/(c\gamma)$ è il tempo caratteristico dell'urto, il campo elettrico agisce in modo significativo ad un dato istante su una regione di estensione lineare b/γ e questa non può essere molto più piccola di Δx , altrimenti ci sarebbero cancellazioni dovute all'interferenza. Si deve quindi imporre $b/\gamma \gtrsim \Delta x$ da cui segue $b'_{min} = \frac{\hbar}{Mc}$ esattamente come nel caso non relativistico. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \chi'_{\omega'} &= \frac{16}{3} \frac{(ze)^2 (zZe^2)^2}{M^2 c^5} \log \left(\frac{aMc}{\hbar} \right) = \\ &= \frac{16}{3} z^4 Z^2 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{m_e^2 \hbar}{M^2} \log \left(1.4 \frac{\hbar c M}{e^2 m_e} Z^{-1/3} \right) = \\ &= \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \hbar \log \left(\frac{192 M}{Z^{1/3} m_e} \right), \end{aligned} \quad (9.35)$$

dove nuovamente si sono usate la costante di struttura fine $\alpha = e^2/(\hbar c) \simeq 1/137$ ed il raggio classico dell'elettrone $r_e = e^2/(m_e c^2)$.

È ora necessario legare $\chi'_{\omega'}$ nel sistema S' a χ_{ω} nel sistema S ed a questo fine si deve ricordare la definizione Eq. (9.21): b è una distanza nel piano trasverso alla velocità ed è quindi invariante, all'energia totale emessa nel sistema non relativistico S' , $d\mathcal{E}'$, non è associato un irraggiamento di impulso quindi $d\mathcal{E} = \gamma d\mathcal{E}'$ (vedi ad esempio Sez. (3.4) per un argomento analogo), inoltre si è visto prima che nel limite ultrarelativistico si ha $\omega' \simeq \omega/\gamma$, quindi si ha $\chi_{\omega} \simeq \chi'_{\omega'}$.

Se si considera nuovamente un mezzo con densità numerica n ($= \rho N_A/A(g)$) si ottiene per l'energia persa in radiazione di frenamento per unità di lunghezza nel limite ultrarelativistico l'espressione

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \int_0^{E/\hbar} n \chi_{\omega} d\omega = \frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log \left(\frac{192 M}{Z^{1/3} m_e} \right) E, \quad (9.36)$$

in cui nuovamente E è l'energia cinetica della particella. Poichè $\frac{dE}{dx} + \frac{d\mathcal{E}}{dx} = 0$ si ottiene allora per l'energia cinetica in funzione dello spessore attraversato x l'equazione

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0} \quad (9.37)$$

che ha soluzione $E(x) = E(x=0)e^{-x/X_0}$, dove la lunghezza di radiazione X_0 è data dall'espressione

$$X_0 = \frac{1}{\frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 \log \left(\frac{192 M}{Z^{1/3} m_e} \right)}. \quad (9.38)$$

Questa espressione è stata ottenuta con diverse approssimazioni e rappresenta quindi un valore ragionevole ma non necessariamente molto preciso, come si può vedere dal confronto in Tab. (1) con

materiale	X_0 Eq. (9.38)	X_0 PDG		Z	A	ρ
	[cm]	[cm]	[g/cm ²]			
C (grafite)	17.67	19.32	42.70	6	12.0	2.210
Si	7.68	9.37	21.82	14	28.1	2.329
Pb	0.39	0.56	6.37	82	207.2	11.35

Tabella 1: Confronto tra i valori della lunghezza di radiazione elettronica X_0 ottenuti usando Eq. (9.38) ed i dati sperimentali riportati sul Particle Data Group [26].

i dati riportati sul Particle Data Group (spesso viene riportato non il valore X_0 in cm ma il valore ρX_0 in g/cm²). Le lunghezze di radiazione sono tipicamente tabulate solo per il caso degli elettroni, in quanto già per la seconda particella carica più leggera (il muone, di massa $m_\mu \simeq 105$ MeV) si ha $X_0^{(\mu)} \simeq 4 \times 10^4 X_0^{(e)}$, quindi il meccanismo di perdita di energia per irraggiamento è per un muone molto meno importante che per un elettrone.

Analogamente al caso non relativistico si può introdurre una sezione d'urto per produzione di fotoni da parte di una particella di massa M che collide con un nucleo, ottenendo

$$\frac{d\sigma}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{E_\gamma} \frac{d\omega}{dE_\gamma} = \frac{\chi_\omega}{\hbar^2 \omega} = \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right) \frac{1}{E_\gamma} = \frac{A(g)}{\rho N_A X_0} \frac{1}{E_\gamma}, \quad (9.39)$$

che ha ancora la caratteristica dipendenza $\frac{d\sigma}{dE_\gamma} \propto 1/E_\gamma$.

9.2.3 Emissione di radiazione elettromagnetica nei decadimenti β

Si considererà in questa sezione l'emissione di radiazione elettromagnetica associata ad un decadimento β (effetto noto anche con il nome di "inner Bremsstrahlung"). In un generico decadimento β si ha ${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} X_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e$, quindi un elettrone viene espulso dal nucleo e durante questo processo viene emessa radiazione elettromagnetica.

Consideriamo dapprima il caso non relativistico, in cui il Q -valore della reazione

$$Q = M({}^A_Z X_N) c^2 - M({}^A_{Z+1} X_{N-1}) c^2 - m_e c^2 \quad (9.40)$$

(dove abbiamo indicato con M le masse nucleari, con m_e la massa elettronica ed approssimato $m_\nu \simeq 0$) è molto minore di $m_e c^2$. Poichè il Q -valore quantifica l'energia cinetica disponibile ai prodotti di decadimento, se $Q \ll m_e c^2$ in particolare il moto dell'elettrone sarà non relativistico. In queste condizioni si può applicare Eq. (9.17) (con $z = 1$) per calcolare l'energia persa nel decadimento per unità di frequenza e per ottenere l'energia totale irraggiata serve integrare questa espressione sulle frequenze fino a $\omega_{max} \simeq Q/\hbar$. In Eq. (9.17) τ è ora il tempo tipico in cui avviene il decadimento (*non* il tempo di decadimento), che dal principio di indeterminazione ci si aspetta essere dell'ordine di \hbar/Q , quindi l'energia totale irraggiata è

$$\mathcal{E} = \int_0^{Q/\hbar} \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} |\Delta \vec{v}|^2 d\omega = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} |\Delta \vec{v}|^2 \frac{Q}{\hbar}. \quad (9.41)$$

La frazione dell'energia disponibile che viene emessa in radiazione elettromagnetica durante un decadimento beta nonrelativistico è quindi

$$\frac{\mathcal{E}}{Q} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} |\Delta \vec{\beta}|^2 \lesssim \frac{2}{3\pi} \alpha \simeq 1.5 \times 10^{-3}, \quad (9.42)$$

dove si è usato il valore della costante di struttura fina $\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \simeq 1/137$.

Nel caso relativistico si può usare Eq. (3.95), che riportiamo qui per comodità

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t - \hat{n} \cdot \vec{s}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right) dt \right|^2, \quad (9.43)$$

ed useremo il limite di “emissione istantanea”

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \vec{v} & t \geq 0 \end{cases}, \quad (9.44)$$

che corrisponde ad approssimare $\tau \simeq 0$. Poichè in questo limite tutte le frequenze sono piccole rispetto alla frequenza caratteristica $1/\tau$ si può approssimare $e^{i\omega(t-\hat{n}\cdot\vec{s}(t)/c)} \simeq 1$ (un modo più formale di procedere che conduce al solito risultato consiste nell’usare la relazione $f'(t) = (\Delta f)\delta(t)$ per la derivata di una funzione in un punto di discontinuità), quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left| \frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta})}{1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta}} \right|^2 = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \beta^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2}, \quad (9.45)$$

dove abbiamo indicato con θ l’angolo tra \hat{n} e $\vec{\beta}$.

Per calcolare l’energia totale emessa in questo caso dobbiamo prima di tutto integrare su tutto l’angolo solido; a tal fine si può usare il fatto che

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^2} d \cos \theta = \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right), \quad (9.46)$$

che segue da

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - x^2}{(1 - \beta x)^2} dx \stackrel{(y=\beta x)}{=} \frac{1}{\beta} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1}{(1 - y)^2} dy - \frac{1}{\beta^3} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{y^2}{(1 - y)^2} dy \quad (9.47)$$

notando che

$$\frac{y^2}{(1 - y)^2} = \frac{1}{(1 - y)^2} + 1 - \frac{2}{1 - y} \quad (9.48)$$

ed usando integrali elementari. Si ottiene quindi

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi c} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right) \quad (9.49)$$

ed infine

$$\mathcal{E} = \int_0^{Q/\hbar} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 2 \right) Q. \quad (9.50)$$

Usando lo sviluppo $\log(1+x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$ si vede che il limite non relativistico di questa espressione coincide con il risultato trovato in precedenza, mentre nel limite ultrarelativistico si può approssimare $\beta \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ ottenendo

$$\mathcal{E} \simeq \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} (\log(4\gamma^2) - 2) Q \simeq \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} (\log(\gamma) - 0.307) Q, \quad (9.51)$$

in cui $m_e c^2 \gamma \lesssim Q$. Si vede quindi che anche usando $\gamma \simeq 20$, che corrisponde ad un Q -valore di circa 10 MeV, si ottiene $\mathcal{E}/Q \simeq 1.2 \times 10^{-2}$ e l’energia irraggiata è sempre una piccola frazione dell’energia totale disponibile.

9.3 Perdita di energia per collisioni

Considereremo in questa sezione un diverso meccanismo di perdita di energia che agisce sulle particelle cariche che attraversano la materia, la cosiddetta perdita di energia per collisioni: nell’attraversare un mezzo una particella collide con i costituenti elementari del mezzo (elettroni e nuclei) e trasferisce loro energia. Gli urti con i nuclei erano i più importanti nel caso della radiazione di frenamento, in quanto ad essi corrispondevano accelerazioni maggiori del proiettile e quindi una maggiore energia irraggiata, tuttavia nel caso trattato in questa sezione sono più importanti gli urti

con gli elettroni, poichè negli scattering nucleari non si ha praticamente trasferimento di energia dal proiettile al bersaglio. Anche in questa sezione, come in quella precedente, ci si limiterà ad argomenti semiquantitativi.

Consideriamo una particella di massa M e carica ze che incide a velocità \vec{v} contro un elettrone che considereremo come praticamente fermo. Questo significa le espressioni che si otterranno saranno valide fintantochè $|\vec{v}|$ è maggiore della velocità tipica di un elettrone all'interno di un atomo²¹, che vale approssimativamente

$$\frac{\hbar}{am_e} \simeq \frac{\hbar Z^{1/3}}{1.4a_0m_e} \simeq \frac{c}{1.4} \frac{e^2}{\hbar c} Z^{1/3} \simeq \frac{c}{192} Z^{1/3}, \quad (9.52)$$

dove si è usato $a \simeq 1.4a_0Z^{-1/3}$, con $a_0 = \hbar^2/(e^2m_e)$ il raggio di Bohr (vedi ad es. [24] §70). Procedendo analogamente a come si è fatto nella sezione precedente si può approssimare il moto della particella con un moto rettilineo uniforme di parametro di impatto b e velocità \vec{v} . Considerando il limite di “urto rapido”, in cui l'elettrone si muove poco durante l'urto, l'impulso $\Delta\vec{p}_e$ trasferito all'elettrone può essere calcolato come

$$|\Delta\vec{p}_e| \simeq e \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dt \simeq \frac{e}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_\perp| dx = \frac{e}{2\pi bv} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi b |\vec{E}_\perp| dx = \frac{2ze^2}{bv}, \quad (9.53)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il teorema di Gauss ed il fatto che la particella incidente ha carica ze . L'energia trasferita all'elettrone in un urto con parametro di impatto b sarà quindi data da

$$T(b) = \frac{|\Delta\vec{p}_e|^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{b^2v^2m_e} = \frac{2z^2}{b^2v^2} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 m_e c^4 = \frac{2z^2 r_e^2 m_e c^2}{b^2 \beta^2}. \quad (9.54)$$

Notiamo esplicitamente che la perdita di energia per collisioni è anche spesso chiamata perdita di energia per ionizzazione, tuttavia solo gli urti corrispondenti a valori di $T(b)$ maggiori del potenziale di ionizzazione producono elettroni liberi, mentre energia può essere persa anche portando un atomo ad un livello eccitato, che poi decade emettendo fotoni.

Per calcolare l'energia media persa per unità di lunghezza in un mezzo con densità numerica di elettroni $n_e = \frac{\rho N_A Z}{A(g)}$ (dove come al solito ρ è la densità di massa, $N_A \simeq 6 \times 10^{23}$ è il numero di Avogadro, Z il numero atomico ed $A(g)$ il peso atomico espresso in grammi) si deve quindi calcolare

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} n_e T(b) 2\pi b db = \frac{\rho N_A Z}{A(g)} \frac{4\pi z^2 r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \log \frac{b_{max}}{b_{min}} \equiv \frac{\rho Z z^2 K}{A(g) \beta^2} \log \frac{b_{max}}{b_{min}}, \quad (9.55)$$

dove si è introdotta la notazione

$$K = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 \simeq 0.3 \text{ MeV cm}^2. \quad (9.56)$$

Come nel caso della radiazione di frenamento si presenta il problema della scelta dei limiti di integrazione e discuteremo tre possibili scelte.

1. Dall'espressione di $T(b)$ si vede che $b \propto 1/\sqrt{T(b)}$, quindi un possibile modo di imporre limiti su b è usare dei limiti su $T(b)$: l'energia massima trasferibile vale approssimativamente $T_{max} \approx 2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2$ (vedi Eq. (7.48) in Sez. (7.3)) mentre chiamiamo I il valore minimo di $T(b)$ per il quale si può avere perdita di energia (per ionizzazione o per eccitazione elettronica). Con questa scelta si ha $\log(b_{max}/b_{min}) = \frac{1}{2} \log(T_{max}/I)$ e quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Z z^2 K}{A(g) \beta^2} \frac{1}{2} \log \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{I}. \quad (9.57)$$

²¹Un interessante argomento per capire cosa succede nel limite opposto in cui la particella incidente abbia velocità molto piccola è presentato in [41].

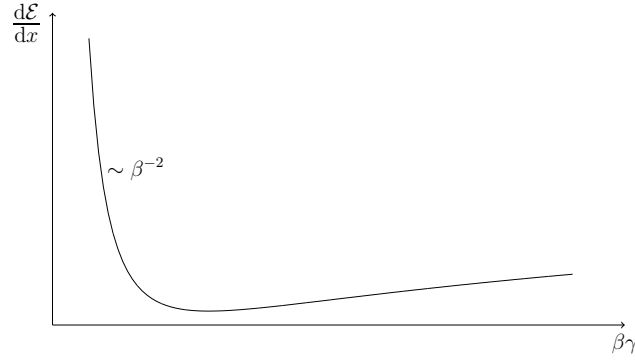


Figura 20: Andamento qualitativo della funzione $\frac{d\mathcal{E}}{dx}$ in Eq. (9.61).

2. Una altra possibilità è fissare b_{min} usando T_{max} come nel punto precedente (quindi $b_{min} = zr_e/(\gamma\beta^2)$), ma usare per b_{max} il vincolo che l'elettrone “si muova poco” sulla scala di tempi $\Delta t = b/(v\gamma)$ caratteristica dell'urto (vedi Sez. (3.1)). Si può quindi imporre $\omega_e\Delta t \ll 1$ dove ω_e è una frequenza tipica dell'atomo, quindi $b_{max} = \frac{v\gamma}{\omega_e}$. Una ulteriore giustificazione di $\omega_e\Delta t \ll 1$ segue dal fatto che se questa condizione non fosse soddisfatta si sarebbe nel limite adiabatico, in cui non ci sono transizioni quantistiche e non potrebbe quindi essere assorbita energia da parte degli elettroni. Si trova quindi in questo caso

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Zz^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{\beta^3 \gamma^2 c}{zr_e \omega_e} . \quad (9.58)$$

3. Si può infine usare $b_{max} = \frac{v\gamma}{\omega_e}$ come nel punto precedente e fissare b_{min} con il principio di indeterminazione: nel sistema di riferimento in cui la particella incidente è ferma, l'elettrone ha un impulso $m_e v \gamma$ ed il parametro d'impatto deve quindi soddisfare $b \gtrsim b_{min} = \frac{\hbar}{m_e v \gamma}$. Si ottiene quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Zz^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{\hbar \omega_e} . \quad (9.59)$$

Se si usa $\hbar \omega_e = I/2$ si vede che questo risultato è esattamente la metà di quello ottenuto nel caso 1).

Un calcolo più accurato porterebbe alla seguente espressione (nota come formula di Bethe-Bloch) per l'energia media persa per unità di lunghezza da una particella di massa M e carica ze a causa delle collisioni:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Zz^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2 T_{max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta)}{2} \right] , \quad T_{max} = \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{1 + 2 \frac{m_e \gamma}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} , \quad (9.60)$$

dove T_{max} è l'espressione completa per il massimo trasferimento di energia cinetica (vedi Eq. (7.47) in Sez. (7.3)), I è una energia di eccitazione media dell'atomo (vedi ad es. [27] §82 per la definizione precisa o [24] §149 per l'analogo non relativistico) e la funzione δ rappresenta un termine correttivo noto come effetto densità (vedi ad es. [37], [4] §13.3 o [6] §114). Usando $I = 2\hbar\omega_e$ questa espressione si riduce a quella del caso 3) nei casi in cui è lecito trascurare l'effetto densità, la correzione $-\beta^2$ e si ha $m_e \gamma \ll M$. Una approssimazione più maneggevole di Eq. (9.60) ma ancora ragionevolmente accurata è quindi

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{Zz^2}{A(g)} \frac{K}{\beta^2} \log \frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{I} , \quad (9.61)$$

in cui per l'energia di eccitazione media si ha approssimativamente

$$I \approx 16Z^{0.9} \text{ eV} . \quad (9.62)$$

materiale	Z	Eq. (9.63) [MeVcm ² /g]	PDG [MeVcm ² /g]
C (grafite)	6	1.79	1.742
Si	14	1.67	1.664
Pb	82	1.44	1.122

Tabella 2: Confronto tra i valori al minimo di $\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx}$ calcolati usando Eq. (9.63) con $z = 1$ ed i valori sperimentali riportati sul Particle Data Group [26].

Un grafico qualitativo di questa espressione in funzione di $\beta\gamma$ è mostrato in Fig. (20): esso presenta un minimo per $\beta\gamma \simeq 3.5$ (punto noto come minimum ionization point), oltre il quale l'andamento è logaritmico e sotto il quale si ha una crescita $\propto \beta^{-2}$. Ricordando che $K \simeq 0.3 \text{ MeV cm}^2$ ed usando $Z/A \simeq 1/2$, al minimo si ha quindi approssimativamente

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{min} &\simeq z^2 0.15 \frac{\text{MeV cm}^2}{g} \left(\log(0.765 \times 10^6) - 0.9 \log Z \right) \simeq \\ &\simeq z^2 \left(2.03 - 0.135 \log Z \right) \frac{\text{MeV cm}^2}{g}, \end{aligned} \quad (9.63)$$

da cui si ottengono, per alcuni casi di esempio, i valori riportati in Tab. (2). Una misura congiunta dell'impulso di una particella e della sua perdita di energia per collisioni può essere usata per discriminare il tipo di particella, infatti l'andamento di $d\mathcal{E}/dx$ in funzione dell'impulso presenta una dipendenza dalla massa piuttosto caratteristica, vedi Fig. (21). A parità di impulso, maggiore di quello corrispondente al minimum ionization point, la perdita di energia per collisioni dipende dalla massa secondo la relazione

$$\left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{M_1} - \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{E}}{dx} \right|_{M_2} \simeq \frac{Zz^2 K}{A(g)} 2 \log \frac{M_2}{M_1}. \quad (9.64)$$

Data la dipendenza non banale del membro di destra di Eq. (9.61) dall'energia cinetica E (implicita nella dipendenza da β e γ) non è possibile ottenere una espressione analitica per la dipendenza dell'energia E dallo spessore di materiale attraversato; è tuttavia possibile calcolare numericamente, ad esempio, lo spessore medio che una particella di energia iniziale E_i attraverserà prima di fermarsi (range), stimando numericamente l'integrale

$$R = \int_0^R dx = \int_{E_i}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_0^{E_i} \frac{1}{d\mathcal{E}/dx} dE. \quad (9.65)$$

Per particelle ultrarelativistiche, la perdita di energia per unità di lunghezza dovuta alla radiazione di frenamento è lineare nell'energia cinetica E mentre la perdita di energia dovuta alle collisioni cresce logaritmicamente con E ; è quindi evidente che per valori sufficientemente grandi di E dominerà la perdita di energia dovuta alla radiazione di frenamento. D'altro canto per piccole velocità la perdita di energia per irraggiamento diventa piccola (per poi tende ad una costante nel limite non relativistico) ed è irrilevante rispetto a quella dovuta alle collisioni, che cresce come β^{-2} . Si chiama energia critica il valore dell'energia per il quale i due contributi sono uguali. Riscrivamo qui per comodità le espressioni trovate in precedenza:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}^{rad}}{dx} &= \frac{\rho N_A}{A(g)} \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha r_e^2 \frac{m_e^2}{M^2} \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right) E \\ \frac{d\mathcal{E}^{coll}}{dx} &= \frac{\rho N_A}{A(g)} 4\pi Z z^2 \frac{r_e^2 m_e c^2}{\beta^2} \log \left(\frac{2\beta^2 \gamma^2 m_e c^2}{I} \right) \end{aligned} \quad (9.66)$$

e stimiamo l'energia critica di un elettrone nel piombo (quindi $z = 1$, $M = m_e$ e $Z = 82$). Approssimando $\beta \simeq 1$ ed usando $E = m_e c^2 (\gamma - 1)$ si ottiene

$$\frac{16}{3} Z \alpha \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \right) (\gamma - 1) \simeq 4\pi \log \left(\frac{2\gamma^2 m_e c^2}{I} \right) \quad (9.67)$$

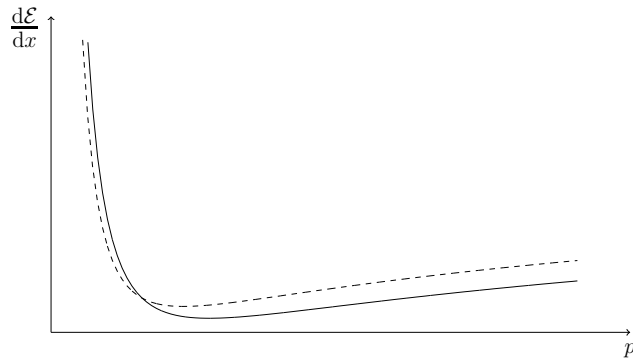


Figura 21: Andamento di $\frac{dE}{dx}$ in funzione dell'impulso $p = Mv\gamma$ della particella incidente per due valori diversi di M . La massa corrispondente alla linea continua è più grande di quella corrispondente alla linea tratteggiata.

che usando Eq. (9.62) diventa $12.09(\gamma - 1) \simeq 89.20 + 25.13 \log \gamma$ e che ha soluzione $\gamma \simeq 13.84$ (oltre ad una soluzione spuria con $\gamma < 1$), quindi $E_c \simeq 7.07$ MeV. Una formula empirica che ben riproduce i dati sperimentali per le energie critiche degli elettroni nei vari materiali è $E_c \simeq \frac{610 \text{ MeV}}{Z+1.24}$ (vedi [26] §33.4.4), da cui si ottiene nel caso del piombo $E_c \simeq 7.33$ MeV.

9.4 Scattering coulombiano multiplo

Nelle due sezioni precedenti si è calcolata la perdita di energia per unità di lunghezza di una particella di massa M e carica ze che si muove in un mezzo, in questa sezione studieremo l'angolo di deflessione della particella rispetto alla sua traiettoria originale indotto dagli urti con i costituenti del mezzo. Ai fini di questo calcolo gli urti con gli elettroni saranno ovviamente trascurabili rispetto agli urti con i nuclei, che producono deflessioni medie molto maggiori.

Iniziamo con il definire i dettagli di quello che si vuole studiare: supponiamo di avere una particella che inizialmente si muove lungo l'asse \hat{z} e che a causa di un urto viene deflessa lungo una traiettoria di versore $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. L'angolo di deflessione è quello che è stato indicato con θ e che è compreso tra 0 e π , tuttavia può in alcuni casi essere conveniente considerare anche gli angoli di deflessione della traiettoria proiettata sui piani $\hat{x}\hat{z}$ e $\hat{y}\hat{z}$, che indicheremo rispettivamente con θ_x e θ_y , che sono definiti in $[-\pi, \pi]$ e che sono legati a θ e ϕ dalle relazioni

$$\begin{aligned} \sin \theta_x &= \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta}}, & \cos \theta_x &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta}} \\ \sin \theta_y &= \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta}}, & \cos \theta_y &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta}}. \end{aligned} \quad (9.68)$$

A causa della simmetria cilindrica attorno all'asse \hat{z} del problema si avrà in media (media sugli urti) $\langle \theta_x \rangle = \langle \theta_y \rangle = 0$, mentre si ha $\langle \theta \rangle > 0$ per costruzione poichè $0 \leq \theta \leq \pi$.

Studieremo solo il caso in cui l'angolo di deflessione dovuto ad un singolo urto è molto piccolo $\theta \ll 1$, poichè questo è il caso tipico se la particella incidente ha energia sufficientemente grande. In questo caso anche θ_x e θ_y sono molto piccoli e si ha semplicemente $\theta_x \simeq \theta \cos \phi$ e $\theta_y \simeq \theta \sin \phi$, da cui segue in particolare

$$\theta^2 \simeq \theta_x^2 + \theta_y^2. \quad (9.69)$$

A causa della simmetria cilindrica si ha $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle$ e quindi $\langle \theta^2 \rangle = 2\langle \theta_x^2 \rangle$.

Supponiamo ora che ci siano stati due urti, che la direzione di moto della particella iniziale prima del primo urto fosse \hat{n}_0 , per poi diventare \hat{n}_1 dopo il primo urto ed infine \hat{n}_2 dopo il secondo. Se indichiamo con Θ l'angolo di deflessione totale e con $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$ i due angoli di deflessione dei

singoli urti si hanno allora le relazioni

$$\cos \Theta = \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_2, \quad \cos \theta^{(1)} = \hat{n}_0 \cdot \hat{n}_1, \quad \cos \theta^{(2)} = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2, \quad (9.70)$$

inoltre si ha inoltre la semplice relazione algebrica

$$\vec{n}_0 \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_0) = (\hat{n}_0 - \hat{n}_1) \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_1) + \hat{n}_1 \cdot (\hat{n}_2 - \hat{n}_1) + \hat{n}_0 \cdot (\hat{n}_1 - \hat{n}_0). \quad (9.71)$$

Nel limite di piccoli angoli di deflessione tutti i termini a secondo membro sono genericamente dello stesso ordine (quadratico negli angoli di deflessione), in quanto $|\hat{n}_1 - \hat{n}_0| \approx \sin \theta^{(1)}$, $|\hat{n}_2 - \hat{n}_1| \approx \sin \theta^{(2)}$ e $\hat{n}_1 - \hat{n}_0$ e $\hat{n}_2 - \hat{n}_1$ possono essere approssimativamente paralleli. Tuttavia questo non è più vero se si effettua la media sugli urti: usando la simmetria cilindrica del problema si vede che $\langle \hat{n}_1 - \hat{n}_0 \rangle$ (media sulle direzioni di uscita \hat{n}_1) è diretto lungo \hat{n}_0 (con verso discorde) e intensità $\langle 1 - \cos \theta^{(1)} \rangle$. Supponendo che due urti consecutivi siano indipendenti si vede quindi che il primo termine a secondo membro può essere trascurato, ottenendo infine $\langle \Theta^2 \rangle = \langle (\theta^{(1)})^2 \rangle + \langle (\theta^{(2)})^2 \rangle$, relazione che può essere semplicemente generalizzata al caso di N urti:

$$\langle \Theta^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle (\theta^{(i)})^2 \rangle. \quad (9.72)$$

Nel limite $\theta \ll 1$ la sezione d'urto Rutherford per collisione di una particella di carica ze su di un nucleo di carica Ze si riduce alla forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(zZe^2)^2}{4p^2v^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \simeq \frac{\ell^2}{\theta^4} \quad (9.73)$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\ell = \frac{2zZr_e(m_e c^2)}{pv}, \quad (9.74)$$

e $r_e = e^2/(m_e c^2)$ è il raggio classico dell'elettrone. Con lo stesso livello di approssimazione abbiamo anche la seguente relazione tra il parametro di impatto e l'angolo di scattering

$$b = \frac{zZe^2}{vp} \frac{1}{\tan \frac{\theta}{2}} \simeq \frac{\ell}{\theta}. \quad (9.75)$$

Ad ogni singolo urto si può associare la deflessione quadratica media

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\sigma_{ms}}, \quad \sigma_{ms} = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega, \quad (9.76)$$

dove σ_{ms} è una sezione d'urto effettiva di multiplo scattering. La sezione d'urto totale coulombiana che si otterrebbe usando $\theta_{min} = 0$ è divergente, tuttavia in questo modo non si terrebbe conto del fatto che gli elettroni schermano la carica nucleare quando il parametro di impatto è più grande del raggio atomico, effetto che pone un cut-off sui piccoli angoli. Poichè stiamo considerando solo gli scattering a piccolo angolo si può approssimare $d\Omega \simeq 2\pi\theta d\theta$ e quindi si ha

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \simeq 2\pi \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{\ell^2}{\theta} d\theta = 2\pi\ell^2 \log \frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}. \quad (9.77)$$

Si è appena visto che $b \simeq \ell/\theta$ e si può quindi usare $\theta_{max}/\theta_{min} \simeq b_{max}/b_{min}$, con $b_{max} \simeq a \simeq 1.4 \frac{\hbar^2}{m_e c^2} Z^{-1/3}$ raggio atomico e $b_{min} \simeq r_0 A^{1/3}$ (con $r_0 \simeq 1.4$ fm) raggio nucleare, ottenendo l'espressione

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \log \left(\frac{1.4 \times 0.53 \times 10^{-10} Z^{-1/3}}{1.4 \times 10^{-15} A^{1/3}} \right) \simeq \frac{4\pi\ell^2}{\sigma_{ms}} \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right), \quad (9.78)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $A \simeq 2Z$.

Se supponiamo ora che la particella attraversi uno spessore L di un materiale con densità numerica n , usando la relazione Eq. (9.72) abbiamo per l'angolo di deflessione totale Θ la relazione

$$\langle \Theta^2 \rangle = N_{urti} \langle \theta^2 \rangle = nL\sigma_{ms} \langle \theta^2 \rangle = nL4\pi\ell^2 \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right), \quad (9.79)$$

che scritta più esplicitamente ed usando $n = \rho N_A / A(g)$ diventa

$$\langle \Theta^2 \rangle = 16\pi L \frac{\rho N_A}{A(g)} z^2 Z^2 r_e^2 \frac{(m_e c^2)^2}{(pv)^2} \log \left(\frac{205}{Z^{1/3}} \right). \quad (9.80)$$

Ricordando l'equazione per la lunghezza di radiazione elettronica trovata in precedenza, Eq. (9.38) con $M = m_e$ e $z = 1$,

$$\frac{1}{X_0^{(e)}} = \frac{16}{3} \frac{\rho N_A}{A(g)} Z^2 \alpha r_e^2 \log \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \right), \quad (9.81)$$

si vede che si ha approssimativamente

$$\langle \Theta^2 \rangle \simeq \frac{3\pi(m_e c^2)^2}{\alpha} z^2 \frac{L}{X_0^{(e)}} \frac{1}{(pv)^2} \quad (9.82)$$

da cui si ottiene

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} \simeq 13 \text{MeV} \frac{z}{pv} \sqrt{\frac{2L}{X_0^{(e)}}}. \quad (9.83)$$

L'espressione completa che si otterrebbe con calcoli più accurati è ([26] §33.3)

$$\sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} \simeq 13.6 \text{MeV} \frac{z}{pv} \sqrt{\frac{2L}{X_0^{(e)}}} \left[1 + 0.038 \log \left(\frac{z^2 L}{X_0^{(e)} \beta^2} \right) \right]. \quad (9.84)$$

Come nel caso di un singolo urto, si possono introdurre le proiezioni dell'angolo di deflessione totale Θ sui due piani $\hat{x}\hat{z}$ e $\hat{y}\hat{z}$, che indicheremo con Θ_x e Θ_y , ed analogamente al caso di un singolo urto si hanno le relazioni

$$\langle \Theta_x \rangle = \langle \Theta_y \rangle = 0, \quad \langle \Theta_x^2 \rangle = \langle \Theta_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \Theta^2 \rangle \equiv \theta_0^2. \quad (9.85)$$

Se $\theta_0 \ll \pi$ la funzione di distribuzione di Θ_x (che è uguale a quella di Θ_y) può essere approssimata da una distribuzione gaussiana

$$P(\Theta_x) \simeq \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Theta_x^2}{2\theta_0^2}}, \quad (9.86)$$

che soddisfa i "requisiti base" (ovviamente si ha $-\pi \leq \Theta_x \leq \pi$, ma se $\theta_0 \ll \pi$ si commette solo un piccolo errore estendendo Θ_x a tutto l'asse reale)

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\Theta_x) d\Theta_x = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x P(\Theta_x) d\Theta_x = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x^2 P(\Theta_x) d\Theta_x = \theta_0^2, \quad (9.87)$$

in cui l'ultima equazione segue dalla relazione generale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \left(\sqrt{\pi} a^{-1/2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \quad (9.88)$$

usando $a = 1/(2\theta_0^2)$. Utilizzando le regole di trasformazione delle funzioni di distribuzione si può inoltre mostrare che la funzione di distribuzione di Θ è della forma (in cui si assume $0 \leq \Theta < \infty$)

$$\mathcal{P}(\Theta) \simeq \frac{\Theta}{\theta_0^2} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}}. \quad (9.89)$$

Questa distribuzione soddisfa i requisiti base

$$\int_0^{\infty} \mathcal{P}(\Theta) d\Theta = \int_0^{\infty} \frac{\Theta}{\theta_0} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} d\Theta = - \int_0^{\infty} \frac{d}{d\Theta} \left(e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} \right) d\Theta = 1 \quad (9.90)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Theta^2 \mathcal{P}(\Theta) d\Theta &\stackrel{(\Theta=\theta_0 x)}{=} \theta_0^2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2/2} dx \stackrel{(x^2=2y)}{=} 2\theta_0^2 \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \\ &= 2\theta_0^2 (-y e^{-y})_0^{\infty} + 2\theta_0^2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 2\theta_0^2 ; \end{aligned} \quad (9.91)$$

usando Eq. (9.88) si ha inoltre

$$\int_0^{\infty} \Theta \mathcal{P}(\Theta) d\Theta \stackrel{(\Theta=\theta_0 x)}{=} \frac{\theta_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \theta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \quad (9.92)$$

Per arrivare a Eq. (9.89) si può prima di tutto calcolare la funzione di distribuzione della variabile $X = \Theta_x^2$ a partire da Eq. (9.86), ottenendo

$$P_X(X) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{X}} e^{-\frac{X}{2\theta_0^2}} , \quad (9.93)$$

in cui un fattore $\times 2$ è dovuto al fatto che due diversi valori di Θ_x danno lo stesso valore di X . A questo punto possiamo calcolare la funzione di distribuzione della variabile $Z = X + Y$, dove $Z = \Theta^2$ e $Y = \Theta_y^2$. Usando il fatto che X e Y hanno la stessa funzione di distribuzione si trova

$$P_Z(Z) = \int_0^Z P_X(X) P_X(Z-X) dX = \frac{1}{2\pi\theta_0^2} e^{-\frac{Z}{2\theta_0^2}} \int_0^Z \frac{1}{\sqrt{X(Z-X)}} dX \quad (9.94)$$

e con il cambio di variabile $X = Z\xi^2$ si ha

$$\int_0^Z \frac{1}{\sqrt{X(Z-X)}} dX = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 2 \arcsin \xi \Big|_0^1 = \pi , \quad (9.95)$$

quindi

$$P_Z(Z) = \frac{1}{2\theta_0^2} e^{-\frac{Z}{2\theta_0^2}} , \quad (9.96)$$

che per $\theta_0 = 1$ non è altro che una distribuzione χ^2 con due gradi di libertà. Passando ora alla variabile $\Theta = \sqrt{Z}$ si ottiene infine

$$\mathcal{P}(\Theta) \simeq \frac{\Theta}{\theta_0^2} e^{-\frac{\Theta^2}{2\theta_0^2}} . \quad (9.97)$$

A Appendici

A.1 Convenzioni

In relatività ristretta si userà la metrica “west coast”, a dominanza di segni meno:

$$\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) , \quad (\text{A.1})$$

e la componente 0 del quadrivettore di posizione sarà data da $x^0 = ct$. Si ha allora

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (\text{A.2})$$

e (salvo esplicito avviso) si indicheranno con lettere greche gli indici che possono assumere i valori 0, 1, 2, 3, mentre si riserveranno le lettere latine per gli indici spaziali. Si userà per il tensore completamente antisimmetrico la convenzione $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$.

La quadrivelocità sarà definita come

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (\text{A.3})$$

dove

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt \quad (\text{A.4})$$

è l'elemento infinitesimo di tempo proprio, quindi la quadrivelocità soddisfa la relazione $u^2 = c^2$. Di conseguenza il quadriimpulso $p^\mu = mu^\mu$ di una particella di massa m soddisfa la relazione

$$p^2 = m^2 c^2 . \quad (\text{A.5})$$

In elettromagnetismo si userà il sistema di unità di misura di Gauss, in cui le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

e la forza di Lorentz è data da

$$\vec{F} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) . \quad (\text{A.7})$$

Per le trasformate di Fourier si useranno le seguenti convenzioni di π e segni:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= \int \tilde{f}(\vec{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3k d\omega \\ \tilde{f}(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3r dt \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

con le quali l'identità di Parsefall diventa

$$\int |f(\vec{r}, t)|^2 d^3r dt = (2\pi)^4 \int |\tilde{f}(\vec{k}, \omega)|^2 d^3k d\omega . \quad (\text{A.9})$$

Nel caso in cui si debbano considerare trasformate solo rispetto al tempo o solo rispetto allo spazio si useranno delle convenzioni compatibili con quelle scritte sopra, ovvero ad esempio:

$$\tilde{f}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt , \quad \tilde{f}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r . \quad (\text{A.10})$$

A.2 Alcune proprietà del tensore completamente antisimmetrico

In questa sezione si dimostreranno alcune proprietà del tensore di Levi-Civita che risultano talvolta utili per le applicazioni (le espressioni per il caso euclideo tridimensionale si possono ottenere in modo analogo, con qualche cambio di segno e di alcuni fattori numerici).

Mostriamo prima di tutto che si ha

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \det \begin{pmatrix} \delta_0^\alpha & \delta_1^\alpha & \delta_2^\alpha & \delta_3^\alpha \\ \delta_0^\beta & \delta_1^\beta & \delta_2^\beta & \delta_3^\beta \\ \delta_0^\mu & \delta_1^\mu & \delta_2^\mu & \delta_3^\mu \\ \delta_0^\nu & \delta_1^\nu & \delta_2^\nu & \delta_3^\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Questa relazione è banalmente vera per $\alpha = 0, \beta = 1, \mu = 2, \nu = 3$, in quanto

$$\epsilon^{0123} = 1 = \det(1), \quad (\text{A.12})$$

ed il caso generico segue dalla proprietà di antisimmetria del determinante per scambio di righe e colonne. In modo identico si vede che

$$\epsilon_{\rho\sigma\gamma\phi} = -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^0 & \delta_\rho^1 & \delta_\rho^2 & \delta_\rho^3 \\ \delta_\sigma^0 & \delta_\sigma^1 & \delta_\sigma^2 & \delta_\sigma^3 \\ \delta_\gamma^0 & \delta_\gamma^1 & \delta_\gamma^2 & \delta_\gamma^3 \\ \delta_\phi^0 & \delta_\phi^1 & \delta_\phi^2 & \delta_\phi^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

Considerando il prodotto di Eq. (A.11) e di Eq. (A.13), usando il fatto che $\det A = \det A^t$ e che $\delta_i^\alpha \delta_\beta^i = \delta_\beta^\alpha$ si trova

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\phi} = -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \\ \delta_\rho^\nu & \delta_\sigma^\nu & \delta_\gamma^\nu & \delta_\phi^\nu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Sviluppando l'espressione precedente rispetto all'ultima riga usando le formule di Laplace si ottiene

$$\begin{aligned} -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \\ \delta_\rho^\nu & \delta_\sigma^\nu & \delta_\gamma^\nu & \delta_\phi^\nu \end{pmatrix} &= \delta_\rho^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} - \delta_\sigma^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} + \\ &+ \delta_\gamma^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\phi^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\phi^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\phi^\mu \end{pmatrix} - \delta_\phi^\nu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e se ora si considera la somma su $\nu = \phi$ si ottiene, usando la multilinearità dei determinanti e le proprietà di antisimmetria

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\gamma\nu} &= \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\rho^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\rho^\beta \\ \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\rho^\mu \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta & \delta_\sigma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\gamma^\mu & \delta_\sigma^\mu \end{pmatrix} + \\ &+ \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} = \\ &= -\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Sviluppando di nuovo rispetto all'ultima riga si trova

$$\begin{aligned}
-\det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \\ \delta_\rho^\mu & \delta_\sigma^\mu & \delta_\gamma^\mu \end{pmatrix} &= -\delta_\rho^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\gamma^\beta \end{pmatrix} + \delta_\sigma^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\gamma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\gamma^\beta \end{pmatrix} - \\
&-\delta_\gamma^\mu \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix}, \tag{A.17}
\end{aligned}$$

e sommando su $\mu = \gamma$ si trova quindi

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} &= -\det \begin{pmatrix} \delta_\sigma^\alpha & \delta_\rho^\alpha \\ \delta_\sigma^\beta & \delta_\rho^\beta \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} - \\
&-4 \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} = -2 \det \begin{pmatrix} \delta_\rho^\alpha & \delta_\sigma^\alpha \\ \delta_\rho^\beta & \delta_\sigma^\beta \end{pmatrix} = \\
&= -2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha). \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Contraendo ancora si trova

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\beta\mu\nu} = -2(4\delta_\rho^\alpha - \delta_\rho^\alpha) = -6\delta_\rho^\alpha, \tag{A.19}$$

ed infine

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = -24, \tag{A.20}$$

risultato questo facile da ottenere direttamente in quanto si stà sommando sulle $4! = 24$ permutazioni di $\epsilon^{0123} \epsilon_{0123} = -1$.

A.3 Sistemi di unità di misura: SI e Gauss

I due principali sistemi di unità di misura usati in elettromagnetismo classico²² sono il sistema di Gauss o CGS (indicato nel seguito con il pedice G) ed il sistema internazionale o MKS (indicato nel seguito con il pedice SI), in cui le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G &= 4\pi\rho_G, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{SI} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{SI}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{B}_G &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}_G + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{B}_{SI} &= \mu_0\vec{j}_{SI} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}_{SI}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}_G &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{E}_{SI} &= -\frac{\partial \vec{B}_{SI}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{SI} &= 0.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

In entrambi i casi l'equazione di continuità si scrive $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

Per capire la relazione tra i due sistemi di unità di misura è utile partire analizzando la forza di Coulomb, che nei due casi si scrive

$$\vec{F} = e_G^{(1)} e_G^{(2)} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{e_{SI}^{(1)} e_{SI}^{(2)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{A.22}$$

Da questa equazione si ottiene la relazione che intercorre tra le cariche nei due sistemi: $e_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} e_G$. Da questa relazione segue in particolare che le densità di carica e corrente sono legate da

$$\{\rho, \vec{j}\}_G = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \{\rho, \vec{j}\}_{SI} \tag{A.23}$$

²²In elettrodinamica quantistica si usa di solito il sistema di Gauss razionalizzato, che differisce dal sistema di Gauss per alcuni 4π .

Se usiamo ora il fatto che la forza di Lorentz si scrive nei due sistemi come

$$\dot{\vec{p}} = e_G \left(\vec{E}_G + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G \right) = e_{SI} (\vec{E}_{SI} + \vec{v} \times \vec{B}_{SI}) , \quad (\text{A.24})$$

usando la relazione precedentemente trovata tra le cariche si ottiene (ricordiamo che $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$)

$$\begin{aligned} \{\vec{E}, \phi\}_G &= \sqrt{4\pi\epsilon_0} \{\vec{E}, \phi\}_{SI} \\ \{\vec{B}, \vec{A}\}_G &= c\sqrt{4\pi\epsilon_0} \{\vec{B}, \vec{A}\}_{SI} = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} \{\vec{B}, \vec{A}\}_{SI} . \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Si vede facilmente che usando queste conversioni le equazioni di Maxwell in SI e nel sistema di Gauss sono equivalenti.

Anche la relazione che lega i campi ai potenziali è leggermente diversa nei due sistemi di unità: in entrambi i casi si ha $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, tuttavia essendo l'equazione collegata alla legge di Faraday diversa in SI ed in Gauss, si ottengono le relazioni

$$\vec{E}_G = -\vec{\nabla} \phi_G - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} , \quad \vec{E}_{SI} = -\vec{\nabla} \phi_{SI} - \frac{\partial \vec{A}_{SI}}{\partial t} . \quad (\text{A.26})$$

Le densità di energia W ed il vettore Poynting (densità di flusso di energia) \vec{S} sono dati nei due sistemi da

$$W = \frac{\vec{E}_G^2 + \vec{B}_G^2}{8\pi} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}_{SI}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{SI}^2 \right) , \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_G \times \vec{B}_G = \frac{\vec{E}_{SI} \times \vec{B}_{SI}}{\mu_0} \quad (\text{A.27})$$

Nel formalismo quadridimensionale si ha

$$\begin{aligned} j_G^\mu &= (c\rho, \vec{j})_G = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} (c\rho, \vec{j})_{SI} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} j_{SI}^\mu \\ A_G^\mu &= (\phi, \vec{A})_G = \sqrt{4\pi\epsilon_0} (\phi, c\vec{A}) = \sqrt{4\pi\epsilon_0} A_{SI}^\mu ; \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

in entrambi i sistemi si ha $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ e le equazioni di Maxwell omogenee si scrivono sempre nella forma $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, mentre quelle disomogenee assumono la forma

$$\partial_\mu F_G^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_G^\nu , \quad \partial_\mu F_{SI}^{\mu\nu} = c\mu_0 j_{SI}^\nu . \quad (\text{A.29})$$

Le equazioni di Maxwell macroscopiche nei due sistemi sono (vedi ad es. [4] §6.6 per una deduzione microscopica e [6] §6, §29, §75 per un approccio più macroscopico)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_G &= 4\pi\rho_G^{ext} , & \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_{SI} &= \rho_{SI}^{ext} , \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}_G &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_G^{ext} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}_G}{\partial t} , & \vec{\nabla} \times \vec{H}_{SI} &= \vec{j}_{SI}^{ext} + \frac{\partial \vec{D}_{SI}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_G &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t} , & \vec{\nabla} \times \vec{E}_{SI} &= -\frac{\partial \vec{B}_{SI}}{\partial t} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G &= 0 , & \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{SI} &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

dove $\rho_{G/SI}^{ext}$ e $\vec{j}_{G/SI}^{ext}$ sono la densità di carica e di corrente esterne nel sistema di unità G oppure SI . Le relazioni che legano i campi ausiliari $\vec{D}(\vec{r}, t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t)$ al campo elettrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ed al campo magnetico $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sono le stesse nei due sistemi e in regime lineare per materiali isotropi ed a riposo²³) si scrivono tramite la permittività dielettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ (in generale dipendenti dalla lunghezza d'onda):

$$\tilde{D}(\vec{k}, \omega) = \epsilon(\vec{k}, \omega) \tilde{E}(\vec{k}, \omega) , \quad \tilde{B}(\vec{k}, \omega) = \mu(\vec{k}, \omega) \tilde{H}(\vec{k}, \omega) , \quad (\text{A.31})$$

²³Vedi [6] §76 per il caso di un mezzo non a riposo.

Queste relazioni sono talvolta chiamate relazioni costitutive.

In termini della densità di polarizzazione \vec{P} e densità di magnetizzazione \vec{M} si ha ²⁴

$$\begin{aligned}\vec{D}_G(\vec{r}, t) &= \vec{E}_G(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{P}_G(\vec{r}, t), & \vec{D}_{SI}(\vec{r}, t) &= \epsilon_0\vec{E}_{SI}(\vec{r}, t) + \vec{P}_{SI}(\vec{r}, t), \\ \vec{B}_G(\vec{r}, t) &= \vec{H}_G(\vec{r}, t) + 4\pi\vec{M}_G(\vec{r}, t), & \vec{B}_{SI}(\vec{r}, t) &= \mu_0\vec{H}_{SI}(\vec{r}, t) + \mu_0\vec{M}_{SI}(\vec{r}, t).\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

In questo caso, al posto della permittività dielettrica e della permeabilità magnetica si introducono la suscettività elettrica χ_e e la suscettività magnetica χ_m tramite le relazioni (nuovamente valide nel limite di campi deboli, materiali isotropi ed a riposo)

$$\begin{aligned}\tilde{P}_G(\vec{k}, \omega) &= \chi_e^{(G)}(\vec{k}, \omega) \tilde{E}_G(\vec{k}, \omega), & \tilde{P}_{SI}(\vec{k}, \omega) &= \epsilon_0\chi_e^{(SI)}(\vec{k}, \omega) \tilde{E}_{SI}(\vec{k}, \omega) \\ \tilde{M}_G(\vec{k}, \omega) &= \chi_m^{(G)}(\vec{k}, \omega) \tilde{H}_G(\vec{k}, \omega), & \tilde{M}_{SI}(\vec{k}, \omega) &= \chi_m^{(SI)}(\vec{k}, \omega) \tilde{H}_{SI}(\vec{k}, \omega),\end{aligned}\quad (\text{A.33})$$

da cui si vede che la suscettività elettrica e la suscettività magnetica sono legata alla permittività dielettrica e alla permeabilità magnetica da

$$\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e^{(G)} = \epsilon_0(1 + \chi_e^{(SI)}), \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m^{(G)} = \mu_0(1 + \chi_m^{(SI)}). \quad (\text{A.34})$$

La densità di carica $\rho_{ind}(\vec{r}, t)$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ind}(\vec{r}, t)$ indotte dai campi nel mezzo si possono infine scrivere in termini delle polarizzazioni tramite

$$\begin{aligned}\rho_{ind}^{(G)} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_G, & \rho_{ind}^{(SI)} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_{SI}, \\ \vec{j}_{ind}^{(G)} &= c\vec{\nabla} \times \vec{M}_G + \frac{\partial \vec{P}_G}{\partial t}, & \vec{j}_{ind}^{(SI)} &= \vec{\nabla} \times \vec{M}_{SI} + \frac{\partial \vec{P}_{SI}}{\partial t},\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

come si vede dal fatto che sostituendo le relazioni costitutive scritte in termini delle densità di polarizzazione e di magnetizzazione nelle equazioni di Maxwell nel mezzo si ottengono le equazioni valide nel vuoto quando sono presenti la densità di carica $\rho_{ext} + \rho_{ind}$ e la densità di corrente $\vec{j}_{ext} + \vec{j}_{ind}$.

Terminiamo ricordando i valori di ϵ_0 e μ_0 e dell'impedenza del vuoto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\simeq 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \\ \mu_0 &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \simeq 12.57 \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \simeq 377\Omega,\end{aligned}\quad (\text{A.36})$$

dove N=Newton, m=metro, C=Coulomb, A=Ampere e Ω =Ohm, $A = \frac{\text{C}}{\text{s}}$ e $\Omega = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} \times \frac{\text{s}}{\text{C}}$.

A.4 Alcuni integrali singolari

Mostriamo preliminarmente che si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \quad (\text{A.37})$$

Sia $f(x)$ la funzione che vale 1 sull'intervallo $[-1, 1]$ e zero altrove, allora si ha

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 e^{i\omega x} dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} \quad (\text{A.38})$$

²⁴Vedi [6] §79 per i limiti della interpretazione di \vec{M} come densità di magnetizzazione.

e dall'identità di Parsefall $\int |f(x)|^2 dx = 2\pi \int |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ si ottiene allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi . \quad (\text{A.39})$$

Integrando per parti si trova

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = \\ &= \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{\sin 2x}{x} dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x} \right]_{-L}^L + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

passando al limite per $L \rightarrow \infty$ usando il risultato precedente si ottiene Eq. (A.37).

Consideriamo ora l'integrale $\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx$: con una integrazione elementare si trova

$$\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} \quad (\text{A.41})$$

e sia ora $f(k)$ una funzione continua e derivabile un numero arbitrario di volte a supporto compatto e consideriamo

$$I_L = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} dk . \quad (\text{A.42})$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni k esiste un $x_k \in [0, k]$ tale che $f(k) = f(0) + k f'(x_k)$, quindi se il supporto di $f(k)$ è compreso in $[-a, a]$ si ha

$$I_L = \int_{-a}^a f(k) 2 \frac{\sin(kL/2)}{k} dk = 2f(0) \int_{-a}^a \frac{\sin(kL/2)}{k} dk + 2 \int_{-a}^a f'(x_k) \sin(kL/2) dk \quad (\text{A.43})$$

Per $L \rightarrow \infty$ il secondo integrale si annulla per il lemma di Riemann-Lebesgue, mentre scrivendo il primo in termini della variabile $x = kL/2$ si ottiene subito

$$\lim_{L \rightarrow \infty} I_L = 2\pi f(0) , \quad (\text{A.44})$$

e quindi

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ikx} dx = 2\pi \delta(k) . \quad (\text{A.45})$$

Procedendo analogamente con un integrale del tipo

$$J_L = \int_{-\infty}^{\infty} f(k) 4 \frac{\sin^2(kL/2)}{k^2} dk \quad (\text{A.46})$$

si ottiene

$$J_L = f(0) 2L \int_{-aL/2}^{aL/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx + \int_{-a}^a f'(x_k) \frac{\sin^2(kL/2)}{k} dk \quad (\text{A.47})$$

e dato che esiste un numero tale che $|f'(x)| < M$ per ogni x è semplice vedere che il secondo integrale è uniformemente limitato in L , si ha quindi

$$J_L \rightarrow 2\pi L f(0) . \quad (\text{A.48})$$

Consideriamo infine l'integrale che compare in Eq. (5.42): questo si può scrivere nella forma

$$K(L_x, L_y) = \int_{n_z > 0} n_z^2 |F(\vec{k})|^2 d\Omega = 16 \int_{n_z > 0} n_z^2 \frac{\sin^2(k n_x L_x / 2)}{k^2 n_x^2} \frac{\sin^2(k n_y L_y / 2)}{k^2 n_y^2} d\Omega \quad (\text{A.49})$$

dove $d\Omega$ è l'elemento di angolo solido, l'integrale è esteso all'emisfera con $n_z > 0$ e n_x, n_y, n_z sono i coseni direttori di \hat{n} . Nel limite $L_x, L_y \rightarrow \infty$ il contributo dominante all'integrale è (analogamente al caso di J_L trattato prima) quello che viene dalle regioni $|n_x L_x k| \lesssim 1$ e $|n_y L_y k| \lesssim 1$, quindi si può approssimare $n_z \simeq 1$, $d\Omega \simeq dn_x dn_y$ e, introducendo le variabili $kn_x L_x/2 = x$ e $kn_y L_y/2 = y$, si ottiene

$$K(L_x, L_y) \simeq \frac{4L_x L_y}{k^2} \int \frac{\sin^2 x \sin^2 y}{x^2 y^2} dx dy = \frac{(2\pi)^2 A}{k^2} \quad (\text{A.50})$$

per $kL_x \gg 1$ e $kL_y \gg 1$.

A.5 Radiazione di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico

Partiamo dall'espressione per il potenziale vettore

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) dV' . \quad (\text{A.51})$$

Se si osserva il sistema da sufficientemente lontano ($|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$) si può sempre approssimare $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ con $1/r$, commettendo un errore di ordine a/r dove a è la dimensione tipica della distribuzione di carica. Consideriamo ora la dipendenza da \vec{r}' che compare nel tempo ritardato della corrente: al primo ordine si ha $|\vec{r} - \vec{r}'| \simeq r - \hat{n} \cdot \vec{r}'$, dove $\hat{n} = \vec{r}/r$, quindi al primo ordine

$$\begin{aligned} \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) &\simeq \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c} \right) \simeq \\ &\simeq \vec{j} \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\hat{n} \cdot \vec{r}'}{c} \partial_{t'} \vec{j}(\vec{r}', t') \Big|_{t'=t-r/c} . \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Il primo termine è il termine di dipolo elettrico che è stato usato in Sez. (5.1), il secondo termine è legato alla radiazione di dipolo magnetico e quadrupolo elettrico. Se supponiamo che la densità di corrente vari nel tempo con frequenza caratteristica ω allora il secondo termine è soppresso rispetto al primo di un fattore

$$\frac{a\omega}{c} \simeq \frac{a}{\lambda} \simeq \frac{v}{c} , \quad (\text{A.53})$$

dove ricordiamo che a è la dimensione tipica della distribuzione di carica e si è indicata con λ la lunghezza d'onda caratteristica della radiazione emessa e con $v \simeq \omega a$ la velocità tipica delle cariche che irradiano.

È stato mostrato in Sez. (5.1) che il potenziale vettore nella approssimazione di dipolo elettrico può essere scritto nella forma

$$\vec{A}^{(1)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{rc} \dot{\vec{p}}(t - r/c) , \quad (\text{A.54})$$

dove si è introdotto il momento di dipolo elettrico $\vec{p}(t) = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}', t) dV'$. Passiamo ora ad analizzare le componenti di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico: usando la notazione $\partial'_k = \partial/\partial r'_k$ è semplice vedere che

$$\partial'_\ell \left[r'_i r'_k \partial_{t'} j_\ell(\vec{r}', t') \right] = r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t') + r'_i \partial_{t'} j_k(\vec{r}', t') + r'_i r'_k \partial_{t'} \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right) , \quad (\text{A.55})$$

da cui si ottiene, integrando su tutto il volume su cui è presente la carica ed usando l'equazione di continuità, la relazione

$$\begin{aligned} \int \left(r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t') + r'_i \partial_{t'} j_k(\vec{r}', t') \right) dV' &= - \int r'_i r'_k \partial_{t'} \left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}', t') \right) dV' = \\ &= \partial_{t'}^2 \int r'_i r'_k \rho(\vec{r}', t') dV' = \frac{1}{3} \ddot{Q}_{ik}(t') + \frac{1}{3} \delta_{ik} \partial_{t'}^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t') dV' , \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

dove si sono introdotti i momenti di quadrupolo

$$Q_{ik}(t') = \int \left(3r'_i r'_k - \delta_{in} |\vec{r}'|^2 \right) \rho(\vec{r}', t') dV' . \quad (\text{A.57})$$

Il potenziale vettore corrispondente ai termini di quadrupolo elettrico e dipolo magnetico può quindi essere scritto nella forma

$$A_i^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} n_k \int r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t') |_{t'=t-r/c} dV' \quad (\text{A.58})$$

e scrivendo $r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t')$ come somma di una parte simmetrica per $k \leftrightarrow i$ ed una parte antisimmetrica si può usare Eq. (A.56), ottenendo

$$\begin{aligned} A_i^{(2)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2c^2 r} n_k \int \left(r'_k \partial_{t'} j_i(\vec{r}', t-r/c) - r'_i \partial_{t'} j_k(\vec{r}', t-r/c) \right) dV' + \\ &+ \frac{1}{6c^2 r} \ddot{Q}_{ik}(t-r/c) n_k + \frac{1}{6c^2 r} n_i \partial_t^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t-r/c) dV' . \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

A questo punto si può usare $\hat{n} \times (\vec{r}' \times \partial_t \vec{j}) = \vec{r}' (\hat{n} \cdot \partial_t \vec{j}) - \partial_t \vec{j} (\hat{n} \cdot \vec{r}')$ per riscrivere l'equazione precedente nella forma

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{cr} \dot{\vec{\mu}}(t-r/c) \times \hat{n} + \frac{1}{6c^2 r} \ddot{\vec{Q}}(t-r/c) + \\ &+ \frac{1}{6c^2 r} \vec{n} \partial_t^2 \int |\vec{r}'|^2 \rho(\vec{r}', t-r/c) dV' , \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

dove si è introdotta la notazione $(\vec{Q})_i = Q_{ik} n_k$ ed il momento di dipolo magnetico

$$\vec{\mu}(t) = \frac{1}{2c} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}', t) dV' . \quad (\text{A.61})$$

Il calcolo del campo magnetico nella zona di radiazione ($r \gg \lambda$) del potenziale vettore Eq. (A.60) può essere effettuato come segue: nel calcolare $\vec{B}^{(2)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(2)}(\vec{r}, t)$ si può evitare di derivare il prefattore $1/r$ ed i versori \hat{n} , in quanto si otterrebbero termini di ordine $1/r^2$ importanti solo nella zona vicina, inoltre si può usare

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}', t-r/c) = -\frac{1}{c} \hat{n} \times \dot{\vec{f}}(\vec{r}', t-r/c) , \quad (\text{A.62})$$

da cui si vede in particolare che l'ultimo termine in Eq. (A.60) non contribuisce al campo nella zona di radiazione in quanto collineare con \vec{n} . Si ottiene quindi

$$\vec{B}^{(2)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \ddot{\vec{\mu}}(t-r/c) \right) + \frac{1}{6c^3 r} \ddot{\vec{Q}}(t-r/c) \times \hat{n} \quad (\text{A.63})$$

ed il campo elettrico nella zona di radiazione può essere scritto come $\vec{E}(\vec{r}, t) = -\hat{n} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$ (vedi Sez. (5.1)). Se a questa espressione aggiungiamo il termine di dipolo elettrico calcolato in Sez. (5.1) otteniamo per il campo magnetico in zona di radiazione l'espressione completa

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{p}}(t-r/c) \times \hat{n} + \frac{1}{c^2 r} \hat{n} \times \left(\hat{n} \times \ddot{\vec{\mu}}(t-r/c) \right) + \frac{1}{6c^3 r} \ddot{\vec{Q}}(t-r/c) \times \hat{n} , \quad (\text{A.64})$$

dove ricordiamo che $(\vec{Q})_i = Q_{ik} n_k$.

Calcoliamo ora la energia irraggiata nell'unità di tempo. Per un campo di radiazione il vettore di Poynting è dato da $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{B}|^2 \hat{n}$, quindi per calcolare la potenza irraggiata è necessario calcolare l'integrale su tutto l'angolo solido di $\frac{cr^2}{4\pi} |\vec{B}|^2$. È semplice mostrare che i termini di interferenza

tra i contributi presenti in Eq. (A.64) si annullano quando integrati su tutto l'angolo solido: ad esempio per il termine di interferenza tra dipolo elettrico e magnetico si ottiene

$$(\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \cdot (\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\vec{\mu}})) = -\ddot{\vec{\mu}} \cdot (\ddot{\vec{p}} \times \hat{n}) \quad (\text{A.65})$$

che si annulla a causa della presenza di un unico versore \hat{n} .

Gli integrali angolari che rimangono possono essere convenientemente interpretati, a meno di un 4π , come medie sulle direzioni dei versori, per i quali si possono usare le seguenti relazioni

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad \langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{k\ell} + \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}), \quad (\text{A.66})$$

che possono essere giustificate usando argomenti di simmetria. Consideriamo il caso $\langle n_i n_j \rangle$: poichè stiamo mediando sulle direzioni dei versori il risultato deve essere un tensore a due indici invariante per rotazioni quindi deve essere proporzionale a δ_{ij} ; il fattore di proporzionalità è fissato dal fatto che $\langle \vec{n}^2 \rangle = 1$. Passiamo ora a $\langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle$: nuovamente, poichè stiamo mediando sulle direzioni dei versori, il risultato deve essere scrivibile in termini di tensori invarianti sotto rotazioni, ovvero di δ di Kroneker; inoltre $\langle n_i n_j n_k n_\ell \rangle$ è simmetrico sotto scambi di i, j, k, ℓ e l'unica combinazione di δ di Kroneker completamente simmetrica che si riesce a scrivere è $\delta_{ij} \delta_{k\ell} + \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk}$. Il fattore di proporzionalità è nuovamente fissato imponendo che $\langle \vec{n}^2 \vec{n}^2 \rangle = 1$.

Indicando con \vec{g} un generico vettore, con T_{ij} un generico tensore simmetrico e con $(\vec{T})_i = T_{ij} n_j$ si trova quindi

$$\begin{aligned} \int |\vec{g} \times \hat{n}|^2 d\Omega &= 4\pi \left(\vec{g}^2 \langle \vec{n}^2 \rangle - g_i g_j \langle n_i n_j \rangle \right) = 4\pi \frac{2}{3} |\vec{g}|^2 \\ \int |\vec{T} \times \hat{n}|^2 d\Omega &= 4\pi \left(T_{ab} T_{bc} \langle n_a n_c \rangle - T_{ab} T_{cd} \langle n_a n_b n_c n_d \rangle \right) = \\ &= \frac{4\pi}{5} \text{tr}(T^2) - \frac{4\pi}{15} (\text{tr}T)^2, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

inoltre nel caso del momento di quadrupolo si ha per costruzione $\text{tr}Q = 0$. Usando queste espressioni nel caso del campo in Eq. (A.64) si trova subito l'espressione per la potenza irraggiata

$$P = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{d}}|^2 + \frac{1}{180c^5} \sum_{ij} \ddot{Q}_{ij}^2 + \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{\mu}}|^2. \quad (\text{A.68})$$

Nel caso si considerino campi oscillanti sinusoidalmente, la media su un periodo della potenza irraggiata è, come al solito, la metà del risultato precedente.

A.6 Gli integrali di Fresnel

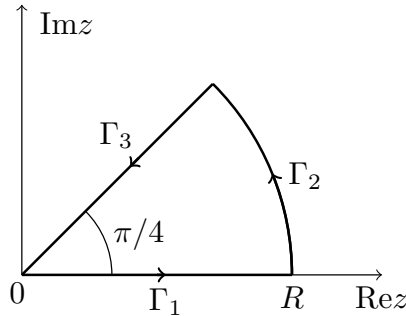


Figura 22: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale di Fresnel.

Gli integrali di Fresnel sono convenzionalmente definiti da

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt \quad (\text{A.69})$$

ovvero

$$\int_0^x e^{it^2} = C(x) + iS(x). \quad (\text{A.70})$$

Questi integrali non sono esprimibili in termini di trascendenti elementari e gli integrali corrispondenti al limite $x \rightarrow \infty$ sono da intendere come integrali impropri: ad esempio

$$\int_0^\infty \cos t^2 dt \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \cos t^2 dt. \quad (\text{A.71})$$

I limiti per $x \rightarrow \infty$ di $C(x)$ e $S(x)$ possono essere calcolati usando l'integrazione complessa e considerando l'integrale della funzione e^{-z^2} .

Poichè e^{-z^2} è una funzione analitica si ha

$$\int_{\Gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz + \int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = 0, \quad (\text{A.72})$$

dove le varie parti del percorso di integrazione sono mostrate in Fig. (22). Per mostrare che il contributo di Γ_2 si annulla nel limite $R \rightarrow \infty$ si può procedere come nella dimostrazione del lemma di Jordan: il percorso di integrazione Γ_2 può essere parametrizzato come $z = Re^{i\phi}$, con $\phi \in [0, \pi/4]$, quindi

$$\int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz = iR \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\phi}} e^{i\phi} d\phi, \quad (\text{A.73})$$

inoltre

$$\left| e^{-R^2 e^{2i\phi}} \right| = e^{-R^2 \cos(2\phi)} \quad (\text{A.74})$$

e per $\phi \in [0, \pi/4]$ si ha la relazione

$$\cos(2\phi) \geq 1 - \frac{4\phi}{\pi}, \quad (\text{A.75})$$

da cui si ottiene

$$\left| e^{-R^2 e^{2i\phi}} \right| \leq e^{-R^2(1 - \frac{4\phi}{\pi})}. \quad (\text{A.76})$$

Si ha quindi

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2(1 - \frac{4\phi}{\pi})} d\phi = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \quad (\text{A.77})$$

e dunque

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} e^{-z^2} dz \rightarrow 0. \quad (\text{A.78})$$

Parametrizzando Γ_3 come $z = e^{i\pi/4}t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)t$ si ottiene

$$\int_{\Gamma_3} e^{-z^2} dz = -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt = -\frac{1}{\sqrt{2}}(C(R) + S(R) + i[C(R) - S(R)]) \quad (\text{A.79})$$

ed inoltre (per quanto riguarda l'integrale su Γ_1) si ha

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (\text{A.80})$$

quindi

$$\begin{cases} C(+\infty) - S(+\infty) = 0 \\ S(+\infty) + C(+\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

ed infine

$$C(+\infty) = S(+\infty) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} . \quad (\text{A.82})$$

Si ha quindi infine

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{it^2} dt = 2C(\infty) + 2iS(\infty) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = \sqrt{i\pi} , \quad (\text{A.83})$$

in cui si vede esplicitamente che si deve considerare la determinazione $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ della radice dell'unità complessa. A questo punto è immediato ottenere il risultato Eq. (5.60)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{ikx^2}{2z}} dx = \sqrt{\frac{2\pi iz}{k}} . \quad (\text{A.84})$$

A.7 Gli sviluppi asintotici degli integrali \mathcal{K}_0 e \mathcal{K}_1

In questa sezione si studieranno gli andamenti asintotici per grandi valori del parametro a degli integrali usati in Sez. (8.4):

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau , \quad \mathcal{K}_1(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau e^{ia\tau}}{\sqrt{\Lambda + \tau^2}} d\tau , \quad (\text{A.85})$$

dove Λ è un numero reale che può essere positivo o negativo.

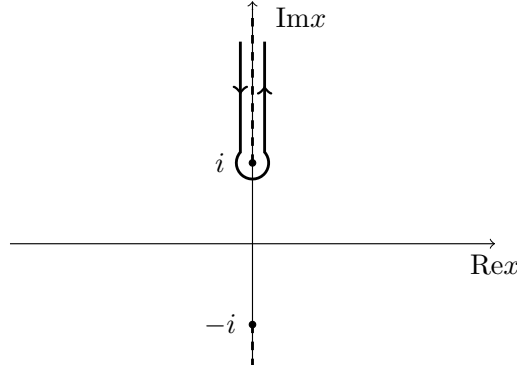


Figura 23: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale \mathcal{K}_0 nel caso $\Lambda > 0$. Le linee tratteggiate denotano i tagli.

Cominciamo con l'analizzare l'andamento di \mathcal{K}_0 quando Λ è positivo, definendo quindi per comodità $\lambda = \sqrt{\Lambda} > 0$. Con il cambio di variabile $\tau = \lambda x$ si ha allora

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\lambda x}}{\sqrt{1+x^2}} dx ; \quad (\text{A.86})$$

la funzione integranda ha quindi dei punti di diramazione in $\pm i$, i tagli possono essere scelti come in Fig. (23) e quindi il cammino di integrazione può essere deformato come in Fig. (23) ottenendo quindi

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\lambda y}}{\sqrt{1-y^2}} idy = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-a\lambda y}}{\sqrt{y^2-1}} dy ; \quad (\text{A.87})$$

a questo punto effettuiamo il cambio di variabile $y = 1 + z/(a\lambda)$ arrivando a

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \frac{e^{-a\lambda}}{a\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{\frac{z^2}{a^2\lambda^2} + 2\frac{z}{a\lambda}}} dz = 2 \frac{e^{-a\lambda}}{\sqrt{a\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{2z}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2a\lambda}}} dz . \quad (\text{A.88})$$

A causa del fattore e^{-z} questo integrale sarà dominato dai valori $z \lesssim 1$ indipendentemente dal valore di a e poichè siamo interessati al limite $a\lambda \rightarrow \infty$ si può sviluppare la radice al denominatore ottenendo la serie asintotica dell'integrale $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$. Poichè

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} dz \stackrel{z=\frac{1}{2}\xi^2}{=} \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.89})$$

il termine dominante della serie asintotica di $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$ per Λ positivo ed $a\lambda \rightarrow \infty$ è dato da

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{a\lambda}} e^{-a\lambda} \quad (\Lambda \text{ positivo}) . \quad (\text{A.90})$$

Per il caso di $\mathcal{K}_1(a; \Lambda)$ quando Λ è positivo si può procedere in modo identico, arrivando all'espressione

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) = 2ie^{-a\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{a}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{a\lambda}\right) \frac{e^{-z}}{\sqrt{2z}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z}{2a\lambda}}} dz \quad (\text{A.91})$$

e quindi allo sviluppo asintotico per Λ positivo ed $a\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq i\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{a}} e^{-a\lambda} \quad (\Lambda \text{ positivo}) . \quad (\text{A.92})$$

Passiamo ora allo studio di \mathcal{K}_0 quando Λ è negativo, nel qual caso è comodo definire la costante $\lambda = \sqrt{-\Lambda} > 0$, quindi

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ia\tau}}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} d\tau . \quad (\text{A.93})$$

Si pone a questo punto il problema di come trattare le singolarità nell'integrale ed è utile ricordare l'espressione completa di Λ in Eq. (8.52):

$$\Lambda = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon\mu . \quad (\text{A.94})$$

Siamo interessati al caso nondissipativo, in cui $\epsilon, \mu \in \mathbb{R}$, tuttavia si era visto in Sez. (8.1) che in generale si ha $\omega \Im\epsilon(\omega) > 0$ e $\omega \Im\mu(\omega) > 0$ quindi si deve usare $\epsilon(\omega) = \Re\epsilon(\omega) + i0^+$ per $\omega > 0$ (ed analogamente per μ) e $\epsilon(\omega) = \Re\epsilon(\omega) - i0^+$ per $\omega < 0$ (ed analogamente per μ). Bisogna dunque interpretare Λ come avente una parte immaginaria piccola: consideriamo ad esempio $\Lambda = -\lambda^2 - i0^+$ (il caso con la parte immaginaria positiva è completamente analogo e conduce al solito risultato). Dopo aver effettuato il cambio di variabile $\tau = \lambda x$ il cammino di integrazione può dunque essere modificato come mostrato in Fig. (24).

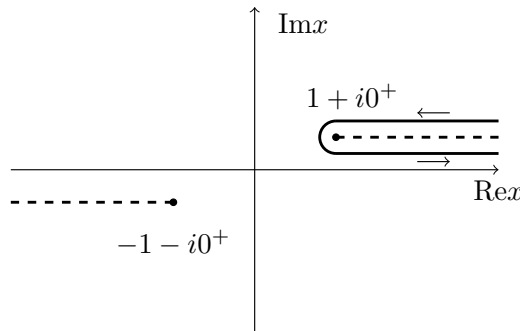


Figura 24: Percorso di integrazione nel piano complesso per l'integrale \mathcal{K}_0 nel caso $\Lambda = \Re\Lambda - i0^+$ e $\Re\Lambda < 0$. Le linee tratteggiate denotano i tagli.

L'integrale si riduce dunque a

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = 2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{ia\lambda x}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx , \quad (\text{A.95})$$

che dopo il cambio di variabile $x = 1 + y/(a\lambda)$ diventa

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) = \frac{2}{\sqrt{a\lambda}} e^{ia\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{iy}}{\sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{y}{2a\lambda}}} dy , \quad (\text{A.96})$$

in cui nuovamente si può espandere la radice per ottenere lo sviluppo asintotico per grandi valori di $a\lambda$. Usando il fatto che si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{iy}}{\sqrt{y}} dy \stackrel{y=\xi^2}{=} 2 \int_0^\infty e^{i\xi^2} d\xi = 2[C(\infty) + iS(\infty)] = (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (\text{A.97})$$

(dove $C(x)$ e $S(x)$ sono gli integrali di Fresnel calcolati in Sez. (A.6)) si trova quindi per il termine dominante dello sviluppo di $\mathcal{K}_0(a; \Lambda)$ quando $\Lambda < 0$ l'andamento

$$\mathcal{K}_0(a; \Lambda) \simeq (1 + i)\sqrt{\frac{\pi}{a\lambda}} e^{ia\lambda} \quad (\Lambda \text{ negativo}) . \quad (\text{A.98})$$

Il caso di $\mathcal{K}_1(a; \Lambda)$ con $\Lambda < 0$ può nuovamente essere trattato in modo praticamente identico, ottenendo

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) = 2\sqrt{\frac{\lambda}{a}} e^{ia\lambda} \int_0^\infty \left(1 + \frac{y}{a\lambda}\right) \frac{e^{iy}}{\sqrt{2y} \sqrt{1 + \frac{y}{2a\lambda}}} dy , \quad (\text{A.99})$$

e quindi il termine dominante dello sviluppo asintotico

$$\mathcal{K}_1(a; \Lambda) \simeq (1 + i)\sqrt{\frac{\pi\lambda}{a}} e^{ia\lambda} \quad (\Lambda \text{ negativo}) . \quad (\text{A.100})$$

Riferimenti bibliografici

- [1] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons (1972).
- [2] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov e A. T. Fomenko. *Geometria contemporanea, volume 1*. Editori Riuniti (1999).
- [3] Y. Ohnuki. *Unitary representations of the Poincaré group and relativistic wave equations*. World Scientific (1988).
- [4] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons (1999).
- [5] O. L. Brill e B. Goodman. “Causality in the Coulomb Gauge”. *Am. J. Phys.*, **35**, (1967) 832.
- [6] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Electrodynamics of Continuous Media*. Butterworth-Heinemann (1984).
- [7] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Teoria dei campi*. Editori Riuniti (2003).
- [8] M. D’Elia. *Lezioni di meccanica classica*. Pisa University Press (2020).
- [9] P. A. M. Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. Dover Publications (2001).
- [10] Y. Youngrau e S. Mandelstam. *Variational principles in dynamics and quantum theory*. Dover Publications (1979).
- [11] F. Rohrlich. *Classical Charged Particles*. World Scientific (2007).
- [12] S. L. Sobolev. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications (1989).
- [13] V. S. Vladimirov. *Equazioni della fisica matematica*. Edizioni MIR (1987).
- [14] M. Schwartz. *Principles of electrodynamics*. Dover Publications (1987).
- [15] J. Schwinger. “On the Classical Radiation of Accelerated Electrons”. *Phys. Rev.*, **75**, (1949) 1912.
- [16] D. T. McDonald. “On the History of the Radiation Reaction”. <https://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/selfforce.pdf>.
- [17] A. Sommerfeld. *Optics*. Academic Press (1954).
- [18] M. Born e E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press (2001).
- [19] L. Brillouin. “The Scattering Cross Section of Spheres for Electromagnetic Waves”. *J. Appl. Physics*, **20**, (1949) 1110.
- [20] D. Sinclair. “Light Scattering by Spherical Particles”. *J. Opt. Soc. Amer.*, **37**, (1947) 475.
- [21] R. O. Gumprecht e C. M. Sliepcevich. “Scattering of Light by Large Spherical Particles”. *J. Phys. Chem.*, **57**, (1953) 90.
- [22] H. C. van de Hulst. *Light scattering by small particles*. Dover Publications (1981).
- [23] N. W. Ashcroft e N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Harcourt College Publishers (1976).
- [24] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Meccanica quantistica. Teoria non relativistica*. Editori Riuniti (2003).
- [25] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley (1994).

- [26] C. Patrignani *et al.* “Review of Particle Physics”. *Chin. Phys.*, **C40** (10), (2016) 100001. <http://pdg.lbl.gov/>.
- [27] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Teoria quantistica relativistica*. Editori Riuniti (2004).
- [28] A. B. Migdal e V. Krainov. *Approximation methods in quantum mechanics*. W. A. Benjamin, Inc. (1969).
- [29] A. Bohr e B. R. Mottelson. *Nuclear Structure*. World Scientific (1998).
- [30] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann (1980).
- [31] T. W. B. Kibble. “Kinematics of General Scattering Processes and the Mandelstam Representation”. *Phys. Rev.*, **117**, (1960) 1159.
- [32] R. Hagedorn. *Relativistic kinematics*. W. A. Benjamin (1964).
- [33] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen e C. G. van Weert. *Relativistic kinetic theory. Principles and Applications*. North Holland (1980).
- [34] A. Di Giacomo. *Lezioni di Fisica Teorica*. Edizioni ETS (1992).
- [35] L. Brillouin. *Wave propagation and group velocity*. Academic Press (1960).
- [36] P. W. Milonni e R. W. Boyd. “Momentum of Light in a Dielectric Medium”. *Advances in Optics and Photonics*, **2**, (2010) 519.
- [37] E. Fermi. “The Ionization Loss of Energy in Gases and in Condensed Materials”. *Phys. Rev.*, **57**, (1940) 485.
- [38] L. D. Landau e E. M. Lifshits. *Meccanica*. Editori Riuniti (2003).
- [39] K. S. Krane. *Introductory nuclear physics*. John Wiley & Sons (1988).
- [40] E. Segre. *Nuclei and particles*. W. A. Benjamin (1965).
- [41] E. Fermi e E. Teller. “The capture of negative mesotrons in matter”. *Phys. Rev.*, **72**, (1947) 399.