

Oscillatore armonico isotropo

Claudio Bonati

17 Ottobre 2012

Parte I

Metodo algebrico

1 Hamiltoniana

Consideriamo la seguente hamiltoniana di una particella nello spazio tridimensionale

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 \quad (\text{I.1})$$

e ricordiamo che si ha

$$[r_n, p_m] = i\hbar\delta_{nm} \quad (\text{I.2})$$

Si possono introdurre gli operatori di creazione e distruzione come

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\mathbf{r} + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\mathbf{p} \\ \mathbf{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\mathbf{r} - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

ed è semplice verificare che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm} \quad [a_n, a_m] = 0 \quad [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0 \quad (\text{I.4})$$

Si ha quindi la relazione

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} &= \frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{r}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\mathbf{p}^2 + \frac{i}{2\hbar}\sum_j [r_j, p_j] = \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar}\mathbf{r}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\mathbf{p}^2 - \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

da cui

$$H = \hbar\omega\left(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + \frac{3}{2}\right) \quad (\text{I.6})$$

2 Autovalori

A causa delle relazioni di commutazione Eq. (I.4) si ha (non c'è somma sugli indici ripetuti)

$$[a_i^\dagger a_i, \mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}] = 0 \quad (\text{I.7})$$

quindi gli autovalori di $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}$ sono semplicemente la somma degli autovalori dei vari $a_i^\dagger a_i$.

Consideriamo quindi il caso unidimensionale $a^\dagger a$. L'operatore $a^\dagger a$ è definito positivo: se indichiamo con $|\psi\rangle$ un generico stato, allora si ha

$$\langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle = \langle a\psi | a\psi \rangle = \|a\psi\|^2 \geq 0 \quad (\text{I.8})$$

quindi tutti gli autovalori di $a^\dagger a$ devono essere non negativi, inoltre dalla equazione precedente segue che se $|\psi\rangle$ è autovettore di $a^\dagger a$ con autovalore nullo allora si ha anche $a|\psi\rangle = 0$. Di conseguenza se esiste $|\psi_0\rangle$ tale che $a|\psi_0\rangle = 0$, allora $|\psi_0\rangle$ è lo stato fondamentale del sistema (unico per un teorema generale) e l'autovalore minimo di $a^\dagger a$ è zero.

Utilizzando le definizioni Eq. (I.3) e $p = -i\hbar d/dx$ l'equazione $a|\psi_0\rangle = 0$ diventa

$$m\omega x\psi_0 + \hbar\psi_0' = 0 \quad (\text{I.9})$$

la cui soluzione è

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) \quad (\text{I.10})$$

quindi l'autovalore minimo di $a^\dagger a$ è zero.

Supponiamo ora che λ sia un autovalore di $a^\dagger a$ corrispondente all'autovettore $|\phi\rangle$ e consideriamo lo stato $|\zeta\rangle = a^\dagger|\phi\rangle$: utilizzando le regole di commutazione e $a^\dagger a|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ si ha

$$a^\dagger a|\zeta\rangle = a^\dagger a a^\dagger|\phi\rangle = a^\dagger(a^\dagger a + 1)|\phi\rangle = a^\dagger(\lambda + 1)|\phi\rangle = (\lambda + 1)|\zeta\rangle \quad (\text{I.11})$$

quindi $a^\dagger|\phi\rangle$ è autovettore con autovalore $\lambda + 1$. In modo identico si mostra che $a|\phi\rangle$ è autovettore con autovalore $\lambda - 1$. Indichiamo con $|\psi_n\rangle$ i vettori definiti da

$$|\psi_n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\psi_0\rangle \quad (\text{I.12})$$

Per quanto appena visto $|\psi_n\rangle$ è autovettore di $a^\dagger a$ con autovalore n , inoltre è semplice mostrare per induzione che $\| \psi_n \| = 1$, infatti

$$\langle \psi_{n+1} | \psi_{n+1} \rangle = \left\langle \psi_n \left| \frac{a a^\dagger}{n+1} \right| \psi_n \right\rangle = \left\langle \psi_n \left| \frac{a^\dagger a + 1}{n+1} \right| \psi_n \right\rangle = \langle \psi_n | \psi_n \rangle \quad (\text{I.13})$$

Si vuole ora mostrare che i ψ_n sono gli unici autovettori di $a^\dagger a$: poichè gli autovalori di $a^\dagger a$ devono essere positivi e se si applica k volte l'operatore a ad uno stato $|\psi\rangle$ con autovalore λ si ottiene un autostato con autovalore $\lambda - k$, deve esistere un $n \in \mathbb{N}$ tale che $a^n|\psi\rangle \neq 0$ e $a^{n+1}|\psi\rangle = 0$. Ma allora

$$a^n|\psi\rangle \propto |\psi_0\rangle \quad (\text{I.14})$$

poichè $|\psi_0\rangle$ è l'unica soluzione di $a|\psi\rangle = 0$. Applichiamo ora a^\dagger all'equazione precedente: ricordando che $a^{n-1}|\psi\rangle$ è autovettore di $a^\dagger a$ con autovalore $\lambda - (n - 1)$ si ottiene quindi

$$(\lambda - n + 1)a^{n-1}|\psi\rangle \propto |\psi_1\rangle \quad (\text{I.15})$$

(notiamo che $\lambda - (n - 1)$ non può essere nullo poichè altrimenti $\lambda - n$ sarebbe negativo e quindi si sarebbe dovuto avere $a^n|\psi\rangle = 0$). Applicando altre $n - 1$ volte a^\dagger si ottiene quindi $|\psi\rangle \propto |\psi_n\rangle$. Si può quindi concludere che gli unici autovettori di $a^\dagger a$ sono i vettori $|\psi_n\rangle$.

Notiamo infine che è semplice mostrare per induzione la relazione

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \quad (\text{I.16})$$

usando la quale si vede che

$$a|\psi_n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|\psi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\psi_{n+1}\rangle \quad (\text{I.17})$$

Gli autovalori del caso tridimensionale Eq. (I.6) sono quindi

$$E_n = \hbar\omega \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right) \quad n_i \in \mathbb{N} \quad (\text{I.18})$$

3 Degenerazione e relazione con il momento angolare

La degenerazione g_n del livello n -esimo è data dal numero di modi in cui si possono scegliere $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$ con il vincolo che $n_x + n_y + n_z = n$. Questo problema equivale al numero di modi in cui possono essere disposte n palline in 3 scatole, ovvero il numero di modi in cui possono essere disposte n palline e 2 sbarrette:

$$\circ \circ \dots \circ | \circ \dots \circ | \circ \circ \dots \circ \quad (\text{I.19})$$

che è dato da

$$g_n = \frac{(n+2)!}{2!n!} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{I.20})$$

Vediamo ora come trasformano sotto parità gli stati $|\psi_n\rangle$ definiti in Eq. (I.12): $|\psi_0\rangle$ è pari sotto parità (Eq. (I.10)), inoltre a^\dagger è combinazione lineare di operatori dispari (posizione e momento), quindi nel caso unidimensionale la parità di $|\psi_n\rangle$ è $(-1)^n$. Nel caso tridimensionale si ottiene dunque

$$P = (-1)^{n_x+n_y+n_z} = (-1)^n \quad (\text{I.21})$$

Per gli autostati del momento angolare si ha $P = (-1)^\ell$, quindi gli stati con n pari possono avere solo momenti angolari pari mentre gli stati con n dispari possono solo avere momenti angolari dispari.

Utilizzando le espressioni Eq. (I.3) non è difficile mostrare che

$$\begin{aligned} L_x &= -ia_2^\dagger a_3 + ia_3^\dagger a_2 \\ L_y &= ia_1^\dagger a_3 - ia_3^\dagger a_1 \\ L_z &= -ia_1^\dagger a_2 + ia_2^\dagger a_1 \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

e quindi

$$L^2 = -(a_1^\dagger a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2^\dagger + a_3^\dagger a_3^\dagger)(a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3) + (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3)^2 + (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3) \quad (\text{I.23})$$

Sia ora $|\psi_{n\ell}\rangle$ un autostato dell'energia e del momento angolare, allora $\langle \psi_{n\ell} | L^2 | \psi_{n\ell} \rangle = \ell(\ell+1)$ e dall'equazione precedente si ottiene

$$n(n+1) - \ell(\ell+1) = \langle \psi_{n\ell} | M^\dagger M | \psi_{n\ell} \rangle \geq 0 \quad M = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 \quad (\text{I.24})$$

quindi si deve avere $\ell \leq n$.

Mostreremo ora che la degenerazione Eq. (I.20) è correttamente riprodotta dal fatto che il livello energetico n -esimo contiene tutti gli autostati del momento angolare con la corretta parità e $\ell \leq n$: questo è vero per $n=0$ e $n=1$, inoltre

$$g_{n+2} - g_n = \frac{(n+3)(n+4)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 2(n+2) + 1 \quad (\text{I.25})$$

quindi procedendo per induzione sugli n pari e sugli n dispari si ottiene il risultato voluto.

4 Origine della degenerazione accidentale

La hamiltoniana Eq. (I.1) è invariante a vista per rotazioni, quindi ci si aspetta a priori che ogni livello energetico abbia una degenerazione $2\ell+1$ corrispondente al momento angolare assiale. Come visto nella sezione precedente la degenerazione è tuttavia molto maggiore, sintomo che la simmetria del problema è in realtà maggiore della $SO(3) \sim SU(2)$ associata alle rotazioni. Questo è chiaro dalla forma Eq. (I.6): ogni trasformazione

$$\mathbf{a} \rightarrow U\mathbf{a} \quad (\text{I.26})$$

con $U \in U(3)$ lascia invariata la hamiltoniana. Consideriamo il caso di una trasformazione infinitesima $U = 1 + i\epsilon T$, con T una matrice hermitiana, quindi

$$\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} + i\epsilon T \mathbf{a} \quad (\text{I.27})$$

Per ogni matrice hermitiana T introduciamo l'operatore O_T definito da

$$O_T = \mathbf{a}^\dagger T \mathbf{a} = a_i^\dagger T_{ij} a_j \quad (\text{I.28})$$

allora si ha

$$O_T^\dagger = a_j^\dagger T_{ij}^* a_i = a_j^\dagger T_{ji} a_i = O_T \quad (\text{I.29})$$

cioè O_T è un operatore hermitiano. Mostriamo ora che O_T è il generatore della trasformazione Eq. (I.27): l'operatore

$$\Lambda(\epsilon) = \exp(-i\epsilon O_T) \quad (\text{I.30})$$

è unitario poichè O_T è hermitiano e per piccoli ϵ si ha

$$\Lambda(\epsilon)^\dagger a_n \Lambda(\epsilon) \approx (1 + i\epsilon O_T) a_n (1 - i\epsilon O_T) \approx a_n + i\epsilon [O_T, a_n] = a_n + i\epsilon T_{nj} a_j \quad (\text{I.31})$$

che coincide con Eq. (I.27). Quindi l'operatore Λ è l'operatore unitario che implementa nello spazio di Hilbert la trasformazione Eq. (I.26) e O_T è il suo generatore infinitesimo.

È un teorema generale che il generatore di una trasformazione di simmetria è un operatore conservato. Verifichiamolo in particolare in questo caso:

$$\begin{aligned} [O_T, H] &\propto T_{ij} [a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_k] = T_{ij} \left(a_i^\dagger [a_j, a_k^\dagger a_k] + [a_i^\dagger, a_k^\dagger a_k] a_j \right) = \\ &= T_{ij} (a_i^\dagger \delta_{jk} a_k - a_k^\dagger \delta_{ik} a_j) = T_{ij} (a_i^\dagger a_j - a_i^\dagger a_j) = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Notiamo inoltre che se T e P due matrici hermitiane 3×3 , allora usando la definizione Eq. (I.28) si ha

$$\begin{aligned} [O_T, O_P] &= T_{ij} P_{lm} [a_i^\dagger a_j, a_l^\dagger a_m] = T_{ij} P_{lm} \left(a_i^\dagger [a_j, a_l^\dagger a_m] + [a_i^\dagger, a_l^\dagger a_m] a_j \right) = \\ &= T_{ij} P_{lm} (a_i^\dagger \delta_{jl} a_m - a_l^\dagger \delta_{im} a_j) = a_i^\dagger T_{ij} P_{jm} a_m - a_l^\dagger P_{lm} T_{mj} a_j = O_{[T,P]} \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

È a questo punto conveniente scomporre il gruppo $U(3)$ nella forma $U(1) \times SU(3)$. L'azione del termine $U(1)$ corrisponde a moltiplicare il vettore \mathbf{a} per una fase costante $e^{i\theta}$ e quindi l'operatore T corrispondente è $T^{(0)} = I$, la matrice unitaria 3×3 e la corrispondente carica conservata è $O = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$ che è proporzionale alla hamiltoniana stessa.

Le matrici

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.34})$$

corrispondono ai generatori del sottogruppo $SO(3)$ che coincide con le rotazioni spaziali e le corrispondenti cariche sono proporzionali alle varie componenti del momento angolare: si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger T^{(1)} \mathbf{a} &= -i a_2^\dagger a_3 + i a_3^\dagger a_2 = L_x \\ \mathbf{a}^\dagger T^{(2)} \mathbf{a} &= i a_1^\dagger a_3 - i a_3^\dagger a_1 = L_y \\ \mathbf{a}^\dagger T^{(3)} \mathbf{a} &= -i a_1^\dagger a_2 + i a_2^\dagger a_1 = L_z \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

Usando le matrici

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{I.36})$$

si ottiene invece ad esempio

$$\mathbf{a}^\dagger T^{(4)} \mathbf{a} = a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 = \frac{m\omega}{\hbar} yz + \frac{1}{m\omega\hbar} p_y p_z \quad (\text{I.37})$$

mentre da

$$T^{(7)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^{(8)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.38})$$

si ricavano le quantità conservate

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger T^{(7)} \mathbf{a} &= a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 = \frac{1}{2m\hbar\omega} (p_x^2 - p_y^2) + \frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 - y^2) \\ \mathbf{a}^\dagger T^{(8)} \mathbf{a} &= a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - 2a_3^\dagger a_3 = \frac{1}{2m\hbar\omega} (p_x^2 + p_y^2 - 2p_z^2) + \frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 + y^2 - 2p_z^2) \end{aligned} \quad (\text{I.39})$$

Si può a questo punto mostrare esplicitamente che L^2 è invariante sotto $O(3)$ ma non $U(3)$: scrivendo in notazione “vettoriale” Eq. (I.23) si trova

$$L^2 = -(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^{\dagger t})(\mathbf{a}^t \mathbf{a}) + (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \quad (\text{I.40})$$

e per $\mathbf{a} \rightarrow U\mathbf{a}$ con $U \in U(3)$ si ottiene

$$L^2 \rightarrow -(\mathbf{a}^\dagger U^\dagger U^{\dagger t} \mathbf{a}^{\dagger t})(\mathbf{a}^t U^t U \mathbf{a}) + (\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})^2 + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \quad (\text{I.41})$$

e quindi L^2 è invariante solo se si ha anche $U^t U = 1$ cioè se $U \in O(3)$ (il fatto che U sia reale segue da $U^t = U^t U U^\dagger = U^\dagger = (U^t)^*$). Poichè l'hamiltoniana è invariante sotto $U(3)$ mentre L^2 è invariante solo sotto $O(3)$, esistono stati con ℓ diversi e stessa energia.

Parte II

Metodo analitico

5 La funzione gamma

La funzione Γ è definita per $\Re z > 0$ da

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\text{II.1})$$

Integrando per parti si ha

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \Gamma(1+z) \quad (\text{II.2})$$

quindi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{II.3})$$

che unita al fatto che $\Gamma(1) = 1$ può essere usata per mostrare per induzione che

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{II.4})$$

Per analizzare le singolarità della funzione Γ è conveniente procedere come segue:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+z-1}}{n!} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{(z+n)} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

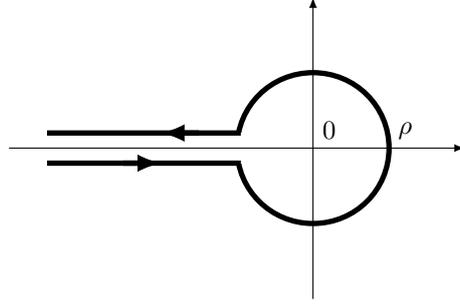


Figura 1: Percorso di integrazione per l'equazione Eq. (II.8).

Il termine integrale è una funzione intera di z nel piano complesso (analitica e senza singolarità) quindi si vede che le singolarità della funzione Γ sono dei poli in $z = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) con residuo $(-1)^n/n!$. Utilizzando questo fatto non è difficile mostrare che

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \quad (\text{II.6})$$

infatti le funzioni a primo e secondo membro hanno singolarità dello stesso tipo, negli stessi punti e con gli stessi residui, quindi differiscono al più per una costante additiva. Inoltre assumono lo stesso valore in $z = 1/2$ poichè:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt \stackrel{t=x^2}{=} 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{II.7})$$

Consideriamo ora la funzione definita dall'integrale di cammino

$$f(z) = \int_C e^t t^{-z} dt \quad (\text{II.8})$$

dove C è il cammino nel piano complesso disegnato in Fig. (1): la funzione t^{-z} ha un taglio lungo l'asse reale negativo ed il percorso di integrazione passa subito sotto e subito sopra l'asse reale, il raccordo essendo fatto lungo un cerchio di raggio ρ . Poichè la funzione integranda è analitica al di fuori del taglio l'integrale non dipende in realtà dal cammino fintantochè il cammino non attraversa singolarità. Dividendo l'integrale in due parti, quella relativa al cerchio e la restante, si ottiene

$$f(z) = 2i \sin(\pi z) \int_\rho^\infty e^{-|t|} |t|^{-z} d|t| + I_\rho \quad (\text{II.9})$$

dove il secondo termine è relativo all'integrale sul cerchio di raggio ρ . Nel caso in cui $\Re z < 1$ si ha $\lim_{\rho \rightarrow 0} I_\rho = 0$ e quindi

$$f(z) = 2i \sin(\pi z) \int_0^\infty e^{-|t|} |t|^{-z} d|t| = 2i \sin(\pi z) \Gamma(1-z) \quad (\text{II.10})$$

Utilizzando a questo punto Eq. (II.6) si ottiene quindi

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^t t^{-z} dt \quad (\text{II.11})$$

La deduzione di questa identità è valida solo per $\Re z < 1$, tuttavia, poichè entrambi i membri sono funzioni intere di z , l'identità è valida per ogni z .

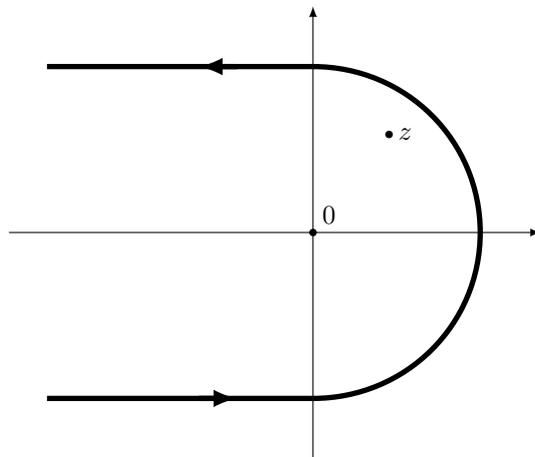


Figura 2: Percorso di integrazione per l'equazione Eq. (II.21).

6 La funzione ipergeometrica confluyente

Considereremo in questa sezione la funzione ipergeometrica confluyente, definita dalla serie

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1) z^n}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1) n!} + \cdots \quad (\text{II.12})$$

in cui γ non deve essere un intero negativo o nullo. Notiamo che la serie si interrompe ad una potenza finita se $\alpha = -n$ con $n \in \mathbb{N}$. Non è difficile verificare che questa serie ha raggio di convergenza infinito, in quanto si ha

$$\left| \frac{\alpha+n}{\gamma+n} \right| < K \quad (\text{II.13})$$

con K costante positiva dipendente da α e γ e la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} K^n \frac{|z|^n}{n!} = e^{K|z|} \quad (\text{II.14})$$

ha raggio di convergenza infinito, quindi la serie in Eq. (II.7) converge assolutamente.

È semplice verificare che la serie di potenze Eq. (II.12) è soluzione dell'equazione

$$zy'' + (\gamma - z)y' - \alpha y = 0 \quad (\text{II.15})$$

inoltre con la sostituzione $y = z^{1-\gamma} y_1$ (per $\gamma \neq 1$) questa equazione diventa

$$zy_1'' + (2 - \gamma - z)y_1' - (\alpha - \gamma + 1)y_1 = 0 \quad (\text{II.16})$$

che è ancora una equazione del tipo Eq. (II.15), quindi la equazione Eq. (II.15) ha anche la soluzione (se γ non è intero)

$$y(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \quad (\text{II.17})$$

Dato che le due soluzioni Eq. (II.12) e Eq. (II.17) hanno comportamenti diversi nell'origine delle coordinate non possono essere linearmente dipendenti, quindi la soluzione generale dell'equazione Eq. (II.15) per γ non intero è

$$y(z) = AF(\alpha, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) \quad A, B \in \mathbb{C} \quad \gamma \notin \mathbb{Z} \quad (\text{II.18})$$

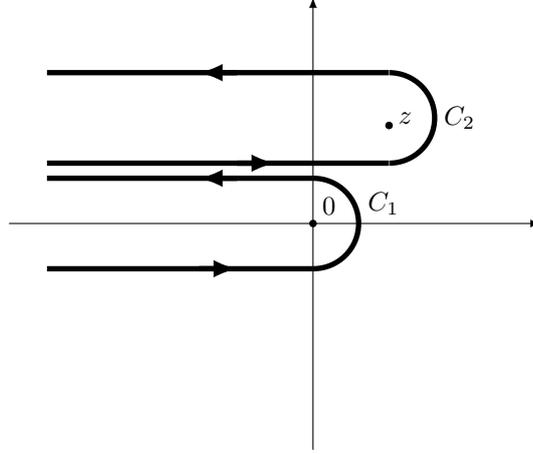


Figura 3: Percorso di integrazione per lo sviluppo asintotico.

Consideriamo ora la funzione definita da

$$f(z) = \int_C z^{1-\gamma} e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt \quad (\text{II.19})$$

dove il cammino di integrazione verrà scelto in seguito. È semplice verificare che

$$\left(z \frac{d^2}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{d}{dz} - \alpha \right) [z^{1-\gamma} e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha}] = \frac{d}{dt} (z^{1-\gamma} e^{tz} t^{\alpha-\gamma+1} (t-1)^{1-\alpha}) \quad (\text{II.20})$$

quindi se la curva C è scelta in modo che la funzione $V(t) = z^{1-\gamma} e^{tz} t^{\alpha-\gamma+1} (t-1)^{1-\alpha}$ ai due estremi della curva assume lo stesso valore allora $f(x)$ è soluzione dell'equazione Eq. (II.15). Con il cambio di variabile $tz \rightarrow t$ la formula Eq. (II.19) si riscrive come

$$f(z) = \int_C e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt \quad V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1} (t-z)^{1-\alpha} \quad (\text{II.21})$$

L'integrando di Eq. (II.21) ha dei punti di diramazione in $t = 0$ e $t = z$ e scegliamo il cammino di integrazione mostrato in Fig. (2), che è ammissibile in quanto per $t \rightarrow -\infty$ si ha $V(t) = 0$ in entrambi i bordi di integrazione.

Notiamo a questo punto che per $z = 0$ l'integrale Eq. (II.21) si riduce ad un integrale della forma Eq. (II.11), quindi si ottiene che

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt \quad (\text{II.22})$$

infatti la funzione a secondo membro è una soluzione di Eq. (II.15) regolare nell'origine (quindi $B = 0$ in Eq. (II.18)) e che vale 1 nell'origine (quindi $A = 1$ in Eq. (II.18)).

Per calcolare lo sviluppo per grandi z della funzione ipergeometrica confluyente è conveniente deformare il percorso C della figura Fig. (2) nei due percorsi C_1 e C_2 di Fig. (3). Se nell'integrale su C_1 si raccoglie $(-z)^{-\alpha}$ e nell'integrale su C_2 si effettua dapprima il cambio di variabile $\xi = t - z$ e poi si raccoglie un fattore $z^{\alpha-\gamma}$ si arriva a

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-\gamma} e^z G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z) \quad (\text{II.23})$$

con

$$G(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i} \int_{C_1} e^t \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{-\alpha} t^{\beta-1} dt \quad (\text{II.24})$$

Sviluppando $(1+t/z)^{-\alpha}$ in serie di potenze nella definizione di G ed integrando termine a termine facendo uso di Eq. (II.11) si ottiene lo sviluppo di G per grandi z :

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{z1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{z^2 2!} + \dots \quad (\text{II.25})$$

Dall'equazione Eq. (II.24) si vede che se $\alpha = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ l'andamento asintotico è z^n (poichè $1/\Gamma(\alpha) = 0$ nel secondo termine) mentre in caso contrario è presente una crescita esponenziale e^z con correzione a potenza.

7 L'oscillatore armonico in coordinate polari

Decomponendo la funzione d'onda in parte radiale e parte angolare e supponendo di essere in un autostato del momento angolare, la funzione d'onda si scrive $\varphi_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ e la parte radiale soddisfa l'equazione

$$\varphi_{n\ell}'' + \frac{2}{r}\varphi_{n\ell}' + \frac{2m}{\hbar} \left(E - V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \varphi_{n\ell} = 0 \quad (\text{II.26})$$

Nel caso dell'oscillatore armonico isotropo $V = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, utilizzando come variabile indipendente la variabile adimensionale

$$\xi = \frac{m\omega}{\hbar} r^2 \quad (\text{II.27})$$

l'equazione per la funzione radiale si riduce a

$$\xi\varphi'' + \frac{3}{2}\varphi' + \frac{1}{2} \left(\epsilon - \frac{1}{2}\xi - \frac{\ell(\ell+1)}{2\xi} \right) \varphi = 0 \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar\omega} \quad (\text{II.28})$$

Consideriamo l'andamento della funzione per $\xi \rightarrow \infty$: mantenendo solo i termini dominanti l'equazione si riduce a

$$\varphi'' - \frac{1}{4}\varphi = 0 \quad (\text{II.29})$$

quindi

$$\varphi \sim e^{\pm \frac{1}{2}\xi} \quad \text{per } \xi \rightarrow \infty \quad (\text{II.30})$$

e chiaramente la sola soluzione normalizzabile è quella con il segno negativo. Per $\xi \rightarrow 0$ l'equazione può essere invece semplificata in

$$\varphi'' + \frac{3}{2\xi}\varphi' - \frac{\ell(\ell+1)}{4\xi^2}\varphi = 0 \quad (\text{II.31})$$

ed imponendo che $\varphi \sim \xi^s$ si ottiene

$$s(s-1) + \frac{3}{2}s - \frac{\ell(\ell+1)}{4} = 0 \quad (\text{II.32})$$

le cui soluzioni sono $s = \ell/2$ e $s = -(\ell+1)/2$ e solo $s = \ell/2$ è accettabile.

Siamo quindi giunti alla conclusione che

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi} \xi^{\ell/2} w(\xi) \quad (\text{II.33})$$

con w funzione regolare nell'origine e che per $\xi \rightarrow \infty$ cresce sufficientemente lentamente da non modificare l'andamento asintotico $e^{-\frac{1}{2}\xi}$. Inserendo questa forma nell'equazione per φ si ottiene una equazione per w , che è

$$\xi w'' + \left(\ell + \frac{3}{2} - \xi \right) w' + \frac{1}{2} \left(\epsilon - \ell - \frac{3}{2} \right) w = 0 \quad (\text{II.34})$$

La soluzione regolare nella origine di questa equazione è la funzione ipergeometrica confluyente

$$w(\xi) = F\left(-\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\ell + \frac{3}{4}, \ell + \frac{3}{2}, \xi\right) \quad (\text{II.35})$$

Per valori generici dei parametri si ha $F(z) \sim e^z$, quindi si otterrebbe per la funzione d'onda radiale l'andamento $e^{\frac{1}{2}z}$. Per ottenere il corretto andamento normalizzabile si deve imporre

$$-\frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\ell + \frac{3}{4} = -\kappa \quad \kappa \in \mathbb{N} \quad (\text{II.36})$$

e quindi

$$E = \hbar\omega \left(2\kappa + \ell + \frac{3}{2}\right) \quad (\text{II.37})$$

Si può quindi associare gli stati energetici ad un intero $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2}\right) \quad (\text{II.38})$$

ed in ogni livello con energia E_n sono presenti stati con i momento angolari ℓ per i quali esiste un $\kappa \in \mathbb{N}$ tale che $\ell = n - 2\kappa$.