

# Esercitazioni di Fisica 3 - primo semestre

Claudio Bonati

30 novembre 2014

## Indice

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Cinematica relativistica</b>   | <b>2</b>  |
| 1          | Tensori in relatività ristretta   | 2         |
| 2          | Velocità relativa   | 5         |
| 3          | Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$   | 6         |
| 4          | Sezione d'urto invariante   | 9         |
| 5          | Trasformazione delle funzioni di distribuzione                              | 10        |
| 6          | Scattering elastico $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$                             | 11        |
| 7          | Invarianti cinematici del processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$                | 14        |
| 7.1        | Dimostrazione di $p_a p_b \geq m_a m_b$ e applicazioni elementari . . . . . | 19        |
| <b>II</b>  | <b>Elettrodinamica</b>  | <b>19</b> |
| 8          | Convenzioni e notazioni   | 19        |
| 9          | Potenziali ritardati  | 20        |
| 10         | Potenziali di Lienard-Wiechert  | 22        |
| <b>III</b> | <b>Meccanica Quantistica</b>  | <b>24</b> |
| 11         | Considerazioni generali   | 24        |
| 12         | Sezione d'urto Rutherford   | 26        |
| <b>IV</b>  | <b>Fisica nucleare</b>  | <b>29</b> |
| 13         | Cenni sulla forza tensoriale  | 29        |
|            | Bibliografia  | 30        |

## Parte I

# Cinematica relativistica

## 1 Tensori in relatività ristretta

In questa sezione di esporranno le idee di base del calcolo tensoriale, con particolare riguardo alle sue applicazioni in relatività ristretta. Come referenze generali si possono vedere [1] §1-2, [2] §2 e [3] §1-6,16-19.

L'idea di base di tutto quanto segue sarà di cercare di distinguere le entità astratte (scalari, vettori, tensoti), che sono indipendenti dal sistema di coordinate utilizzato, dalle loro componenti, che invece dipendono dal sistema usato, e creare un formalismo (indici in alto, indici in basso) che renda algoritmiche il tipo di considerazioni che saranno svolte.

Un vettore  $p$  è una entità geometrica che, una volta fissata una base  $\underline{e}_\mu$  si può scrivere come  $p = p^\mu \underline{e}_\mu$ . Se si effettua un cambio di coordinate  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  e denotiamo lo Jacobiano della trasformazione con

$$R^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} , \quad (1.1)$$

allora le componenti del vettore trasformano secondo la legge (trasformazione controvariante)

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = R^\mu_\nu p^\nu . \quad (1.2)$$

D'altra parte il vettore è sempre lo stesso nei due sistemi di coordinate, quindi  $p = p^\mu \underline{e}_\mu = p'^\mu \underline{e}'_\mu$ , quindi si ha

$$p^\alpha \underline{e}_\alpha = p'^\mu \underline{e}'_\mu = R^\mu_\alpha p^\alpha \underline{e}'_\mu \quad (1.3)$$

e poichè questa relazione deve essere soddisfatta per ogni vettore, cioè per ogni valore numerico di  $p^\mu$ , si ha (legge di trasformazione covariante)

$$\underline{e}_\mu \rightarrow \underline{e}'_\mu = (R^{-1})^\nu_\mu \underline{e}_\nu \quad (1.4)$$

Passiamo ora ad analizzare una forma lineare (o covettore), cioè una applicazione lineare  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  dello spazio vettoriale nell'asse reale. In coordinate si ha

$$q(p) = q(p^\mu \underline{e}_\mu) = p^\mu q(\underline{e}_\mu) \equiv p^\mu q_\mu \quad (1.5)$$

Per determinare la regola di trasformazione dei coefficienti  $q_\mu$  si può ragionare analogamente a come fatto in precedenza, imponendo l'invarianza di  $q(p)$  sotto cambi di coordinate, o usare direttamente Eq. (1.4); il risultato che si ottiene è

$$q_\mu \rightarrow q'_\mu = (R^{-1})^\nu_\mu q_\nu \quad (1.6)$$

Consideriamo ora il caso che esista un prodotto scalare  $(\cdot, \cdot) : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$  (non degenerare ma non necessariamente definito positivo). In coordinate si ha allora

$$(p, s) = (p^\mu \underline{e}_\mu, s^\nu \underline{e}_\nu) = p^\mu s^\nu (\underline{e}_\mu, \underline{e}_\nu) \equiv p^\mu s^\nu g_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Di nuovo la legge di trasformazione dei coefficienti  $g_{\mu\nu}$  deve essere tale che  $(p, s)$  sia invariante, da cui si deduce

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = (R^{-1})^\alpha_\mu (R^{-1})^\beta_\nu g_{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

cioè ogni indice separatamente trasforma come un covettore. D'altra parte esiste un secondo modo di pensare il prodotto scalare:  $(p, s)$  è una forma lineare nel vettore  $p$ , quindi si può scrivere

$$(p, s) \equiv s(p) = s_\mu p^\mu . \quad (1.9)$$

Dal confronto con Eq. (1.7) si deduce  $s_\mu = g_{\mu\nu}s^\nu$  ed è un semplice esercizio verificare che entrambi i membri di questa relazione trasformano nello stesso modo sotto trasformazione di coordinate. Questo è un caso particolare di una relazione generale che sarà analizzata tra breve.

Si può ora considerare la matrice inversa di  $g_{\mu\nu}$ , che sarà indicata con  $g^{\mu\nu}$  ed è definita da

$$g_{\nu\rho}g^{\rho\mu} = \delta_\nu^\mu \quad (1.10)$$

Richiedendo che  $g'^{\mu\nu}$  sia la matrice inversa di  $g'_{\mu\nu}$  si ottiene

$$\delta_\nu^\rho = g'_{\mu\nu}g'^{\mu\rho} = (R^{-1})_\mu^\alpha (R^{-1})_\nu^\beta g_{\alpha\beta}g'^{\mu\rho} \quad (1.11)$$

e quindi

$$g^{\nu\mu} \rightarrow g'^{\mu\nu} = R_\alpha^\mu R_\beta^\nu g^{\alpha\beta} , \quad (1.12)$$

cioè ogni indice trasforma separatamente come un vettore.

In generale si definisce un tensore di rango  $(n, m)$  come un oggetto con  $n$  indici in alto ed  $m$  in basso, che trasforma secondo la regola

$$T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} \rightarrow T'_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} = R_{\alpha_1}^{\mu_1} \dots R_{\alpha_n}^{\mu_n} (R^{-1})_{\nu_1}^{\beta_1} \dots (R^{-1})_{\nu_m}^{\beta_m} T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \quad (1.13)$$

quindi in particolare uno scalare invariante è un tensore di tipo  $(0, 0)$ , un vettore è un tensore di tipo  $(1, 0)$ , un covettore è un tensore di tipo  $(0, 1)$ , la matrice  $g_{\mu\nu}$  è un tensore di tipo  $(0, 2)$  ed infine la matrice  $g^{\mu\nu}$  è un tensore di tipo  $(2, 0)$ . È inoltre facile vedere che  $\delta_\beta^\alpha$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$  invariante:

$$\delta_\nu^\mu \rightarrow \delta'_\nu{}^\mu = R_\alpha^\mu (R^{-1})_\nu^\beta \delta_\beta^\alpha = R_\alpha^\mu (R^{-1})_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu \quad (1.14)$$

È immediato verificare che le seguenti operazioni possono essere utilizzate per produrre tensori da tensori noti: il prodotto diretto  $(n, m) \otimes (n', m') \rightarrow (n + n', m + m')$ :

$$R_{\nu_1 \dots \nu_{m+m'}}^{\mu_1 \dots \mu_{n+n'}} \equiv T_{\nu_1 \dots \nu_m}^{\mu_1 \dots \mu_n} S_{\nu_{m+1} \dots \nu_{m+m'}}^{\mu_{n+1} \dots \mu_{n+n'}} \quad (1.15)$$

e la contrazione  $(n, m) \rightarrow (n - 1, m - 1)$ :

$$R_{\nu_2 \dots \nu_m}^{\mu_2 \dots \mu_n} = T_{\alpha\nu_2 \dots \nu_m}^{\alpha\mu_2 \dots \mu_n} . \quad (1.16)$$

Notiamo esplicitamente che l'operazione di contrazione degli indici è ben definita dal punto di vista tensoriale solo quando si contrae un indice covariante con uno controvariante. La contrazione, ad esempio, di due indici controvarianti in un tensore  $(n, m)$  non produce un tensore  $(n - 2, m)$ .

Un caso particolare della combinazione di queste due operazioni è stato visto in precedenza:  $s_\mu = g_{\mu\nu}s^\nu$ . In modo analogo si possono alzare/abbassare indici in modo standard usando  $g^{\mu\nu}$ ,  $g_{\mu\nu}$ . Da un punto di vista formale si stà usando una metrica non degenera per costruire un isomorfismo dello spazio vettoriale nel suo duale.

Fino ad ora non si è fatta nessuna assunzione sul tipo particolare di cambio di coordinate e proseguendo su questa strada si arriverebbe alla geometria differenziale e, dal punto di vista fisico, alla relatività generale. Identifichiamo ora alcuni particolari tipi di cambi di coordinate, che possono essere poi identificati con i cambi di sistemi di riferimento in coordinate cartesiane. L'assunzione che si richiederà è che le trasformazioni lascino invariata la forma della metrica, ovvero che siano isometrie.

Se la metrica di partenza è quella euclidea,  $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , le isometrie sono identificate da  $R_\alpha^\mu R_\beta^\mu = \delta_{\alpha\beta}$ . Questa espressione è apparentemente spiacevole, poichè sono contratti due indici in alto, quindi non è a priori ovvio che l'espressione sia invariante, tuttavia nel caso euclideo accade un piccolo miracolo: la relazione precedente si scrive in forma matriciale  $R^T R = I$ , quindi  $R^T = R^{-1}$  e quindi  $(R^{-1})_\beta^\alpha = (R^T)_\beta^\alpha = R_\alpha^\beta$ , quindi la legge di trasformazione degli indici controvarianti è la stessa degli indici covarianti. Questo è il motivo per cui per i tensori euclidei non si distingue tra indici in alto ed indici in basso.

Nel caso della metrica pseudo-euclidea  $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ , il gruppo delle isometrie è identificato dall'equazione  $R^T \eta R = \eta$  ed è denotato con  $O(1, 3)$ . Questo gruppo ha quattro componenti connesse, che sono identificate dalle relazioni  $\det R = \pm 1$  e  $R_0^0 \leq 0$  (è semplice verificare, considerando la componente 00 di  $R^T \eta R = \eta$ , che  $|R_0^0| \geq 1$ ). La componente con determinante positivo ed ortocrona ( $R_0^0 > 0$ ) è comunemente denominata gruppo di Lorentz proprio, le altre componenti connesse si ottengono componendo una trasformazione di Lorentz propria con la trasformazione di parità ( $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ ) e l'operazione di inversione temporale  $t \rightarrow -t$  (per una dimostrazione del fatto che queste componenti sono effettivamente connesse vedi ad es. [4] §2.1).

Non è difficile mostrare che le uniche trasformazioni non singolari derivabili almeno due volte e che lasciano la metrica di Lorentz invariata sono trasformazioni lineari: derivando la relazione

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \quad (1.17)$$

rispetto a  $x^\rho$  si ottiene

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \quad (1.18)$$

e sommando a questa espressione quella ottenuta scambiando  $\mu \leftrightarrow \rho$  e sottraendo quella ottenuta scambiando  $\rho \leftrightarrow \nu$  si ottiene (usando il fatto che  $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ )

$$\begin{aligned} 0 = & \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\rho} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \\ & - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\nu} = 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\rho} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \end{aligned} \quad (1.19)$$

e poichè il prodotto scalare è non degenere e per ipotesi la trasformazione è non singolare, si ottiene

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} = 0. \quad (1.20)$$

Se ci si limita a considerare il gruppo di Lorentz proprio (o, nel caso euclideo  $SO(4)$ ), esiste un altro tensore invariante oltre a  $\delta_\nu^\mu$  e  $\eta_{\mu\nu}$  (che è invariante per costruzione, insieme al suo inverso  $\eta^{\mu\nu}$ ) ed è il tensore completamente antisimmetrico  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ , definito da

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{per permutazioni pari di 1234} \\ -1 & \text{per permutazioni dispari di 1234} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (1.21)$$

si ha infatti

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow R_\alpha^\mu R_\beta^\nu R_\gamma^\rho R_\delta^\sigma \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det R = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.22)$$

(si è usata l'espressione  $\det M = \sum_{\text{perm}} (-1)^\sigma M_{1\sigma(1)} \cdots M_{n\sigma(n)}$  per il determinante di una matrice  $n \times n$ ). Abbassando gli indici si ottiene

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \eta_{\rho\gamma} \eta_{\sigma\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \det(\eta) \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.23)$$

Nel caso tridimensionale, in cui si consideri il gruppo di invarianza  $SO(3)$ , il corrispondente tensore invariante è  $\epsilon^{ijk}$ .

Notiamo a questo punto che la proprietà di simmetria o antisimmetria per scambio di due indici (entrambi covarianti o entrambi controvarianti) è una proprietà intrinseca di un tensore, ovvero è conservata dai cambi di variabile. Usando le proprietà di simmetria/antisimmetria degli indici, si possono ottenere delle relazioni tra tensori apparentemente diversi. Consideriamo ad esempio il caso di un tensore a due indici antisimmetrico in tre dimensioni (ad esempio  $M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i$ ), un tale tensore ha 3 componenti indipendenti, cioè le stesse di un vettore, quindi non è sorprendente che possa essere riscritto in una forma "vettoriale". Per fare ciò basta considerare la sua contrazione con un tensore completamente antisimmetrico

$$v^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} M_{ij}, \quad (1.24)$$

(il fattore  $1/2$  è convenzionale, per fare in modo che in questo caso specifico si ottenga  $\mathbf{v} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ). È importante notare che, a causa delle proprietà di  $\epsilon^{kij}$ , entrambi i membri di questa relazione

trasformano nello stesso modo *solo se* la trasformazione di cambio di coordinate ha determinante  $+1$ . Il vettore  $v^k$  è cioè uno pseudo-vettore, che trasforma correttamente se  $\det R = +1$  ma con un segno sbagliato se  $\det R = -1$ . Nel caso generale di uno spazio  $D$ -dimensionale si può costruire in modo analogo il duale di Hodge di un tensore completamente antisimmetrico di tipo  $(0, n)$  (con  $n \leq D$ ), ottenendo l'isomorfismo  $\star : (0, n) \rightarrow (D - n, 0)$ .

Consideriamo ora la trasformazione delle derivate parziali  $\partial/\partial x^\mu$ : usando la chain rule si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (R^{-1})^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.25)$$

quindi le derivate rispetto alle coordinate trasformano in modo covariante, cioè  $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$ . In generale le derivate rispetto ad osservabili controvarianti risultano covarianti e viceversa. Da ciò segue che un po' di attenzione ai segni è necessaria nel formalismo lagrangiano, in quanto i momenti coniugati sono "naturalmente" covarianti

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (1.26)$$

mentre normalmente gli impulsi vengono pensati come vettori controvarianti. Il "vettore" impulso è in realtà  $p^\mu = \eta^{\mu\nu} p_\nu$ .

Tutto questo formalismo può essere usato per scrivere le equazioni differenziali della fisica in un modo che ne renda manifeste le regole di trasformazione ed in particolare il fatto che la loro validità non dipende dal sistema di riferimento usato; una tale proprietà si chiama covarianza delle equazioni. Consideriamo ad esempio l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.27)$$

Risulta naturale introdurre la quadricorrente  $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$  e riscrivere l'equazione di continuità nella forma  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , quindi dal fatto che questa relazione deve essere vera in ogni sistema di coordinate segue che  $j^\mu$  debba trasformare come un quadrivettore. Le equazioni di Maxwell nella gauge di Lorentz si scrivono nella forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi \rho, \quad (1.28)$$

che introducendo il quadripotenziale  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$  si scrivono nella forma compatta

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (1.29)$$

da cui si vede che le equazioni di Maxwell trasformano correttamente sotto trasformazioni di Lorentz se  $A^\mu$  è un vettore controvariante.

NOTA SULLE CONVENZIONI Si utilizzerà un sistema di unità in cui  $c = 1$  per semplificare le formule e la metrica usata sarà  $\eta = (+1, -1, -1, -1)$ , quindi ad esempio per il quadriimpulso si avrà

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}) \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad pp \equiv p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (1.30)$$

## 2 Velocità relativa

La velocità relativa  $v_r$  di due particelle è definita come la velocità di una delle due particelle nel riferimento in cui l'altra è ferma. Si vedrà alla fine del calcolo che il valore di  $v_r$  è indipendente da quale delle due particelle si considera ferma.

Consideriamo due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ . Nel sistema di riferimento in cui  $m_2$  è ferma i quadrimomenti sono dati da

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}_1) \quad p_2 = (m_2, \mathbf{0}) \quad (2.1)$$

e la velocità relativa è data da

$$v_r = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} \quad (2.2)$$

Moltiplicando i quadrivettori in Eq. (2.1) si ottiene

$$p_1 p_2 = E_1 m_2 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{p_1 p_2}{m_2} \quad (2.3)$$

inoltre da  $p_1^2 = m_1^2$  si ottiene

$$|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \sqrt{\frac{(p_1 p_2)^2}{m_2^2} - m_1^2} \quad (2.4)$$

Inserendo le equazioni Eq. (2.3)-(2.4) in Eq. (2.2) si ottiene

$$v_r = \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{p_1 p_2} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_1 p_2)^2}} \quad (2.5)$$

da cui si vede che il risultato è simmetrico per scambio di  $m_1$  e  $m_2$ .

Utilizzando  $p_1 = m_1 \gamma_1(1, \mathbf{v}_1)$  e  $p_2 = m_2 \gamma_2(1, \mathbf{v}_2)$  si ottiene

$$p_1 p_2 = m_1 m_2 \frac{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}} \quad (2.6)$$

Inserendo Eq. (2.6) in Eq. (2.5) e notando che

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - (\epsilon_{ijk} v_1^j v_2^k)(\epsilon_{ilm} v_1^l v_2^m) = \\ &= v_1^2 + v_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) v_1^j v_2^k v_1^l v_2^m = v_1^2 + v_2^2 - 2\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - v_1^2 v_2^2 + (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2 = \\ &= (1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

si ottiene infine l'espressione

$$v_r = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2}}{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} \quad (2.8)$$

In particolare se le velocità sono collineari si ottiene

$$v_r = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} \quad (\text{se } \mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2) \quad (2.9)$$

### 3 Decadimento $1 \rightarrow 2 + 3$

Analizzeremo in questa sezione il decadimento di una particella di massa  $M$  in due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ .

La velocità relativa con cui si allontanano uno dall'altro i due prodotti di decadimento può essere semplicemente ottenuta: indichiamo con  $P$  il quadriimpulso della particella  $M$ , allora si ha

$$P = p_1 + p_2 \quad (3.1)$$

dove  $p_1$  e  $p_2$  sono i quadriimpulsi di  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente. Considerando il quadrato  $P_\mu P^\mu$  si ottiene

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 p_2 = \frac{M^2 - m_1^2 - m_2^2}{2} \quad (3.2)$$

ed inserendo questo risultato in Eq. (2.5) si ottiene la velocità relativa di  $m_1$  e  $m_2$

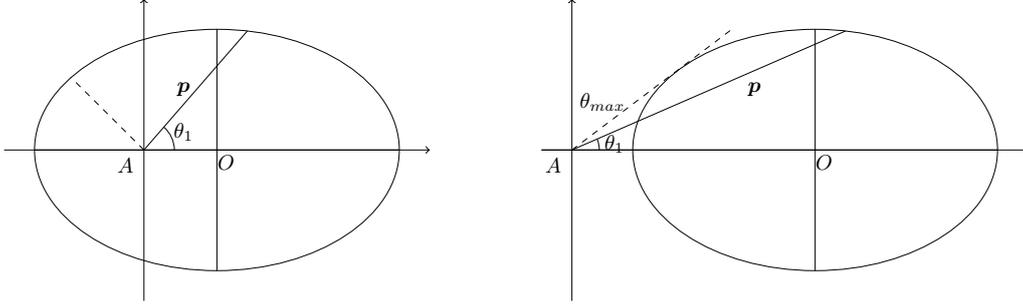


Figura 1: Rappresentazione grafica dell'equazione Eq. (3.16): a sinistra è mostrato il caso  $V < v_1$ , a destra il caso  $V > v_1$ .

Consideriamo ora il decadimento come visto dal sistema di riferimento del centro di massa: nell'equazione Eq. (3.1) si può quindi sostituire  $P = (M, \mathbf{0})$  e si ottiene

$$\begin{cases} M = E_1^c + E_2^c \\ \mathbf{0} = \mathbf{p}_1^c + \mathbf{p}_2^c \end{cases} \quad (3.3)$$

Dalla seconda di queste equazioni si vede che gli impulsi sono opposti in verso e  $|\mathbf{p}_1^c|^2 = |\mathbf{p}_2^c|^2$ , che si riscrive come

$$(E_1^c)^2 - m_1^2 = (E_2^c)^2 - m_2^2 \quad (3.4)$$

e sostituendo in quest'ultima la prima di Eq. (3.3) si trova

$$E_1^c = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \quad E_2^c = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \quad (3.5)$$

da cui si possono anche determinare semplicemente i valori assoluti degli impulsi. A questo stesso risultato si può arrivare in modo più diretto riscrivendo Eq. (3.1) come  $P - p_1 = p_2$  e considerandone il quadrato:

$$M^2 + m_1^2 - 2Pp_1 = m_2^2 \quad (3.6)$$

e notando che nel sistema del centro di massa  $Pp_1 = ME_1^c$ . Considerando il quadrato di  $P - p_2 = p_1$  si ottiene anche la seconda delle Eq. (3.5).

Consideriamo ora il decadimento come visto da un sistema di riferimento in cui la particella che decade ha una velocità  $\mathbf{V}$  (sistema del laboratorio). Si è appena visto che

$$Pp_1 = ME_1^c \quad (3.7)$$

(l'apice  $c$  indica che la quantità è considerata nel sistema di riferimento del centro di massa) e  $E_1^c$  è data dalla prima delle equazioni Eq. (3.5). Nel nuovo sistema di riferimento si ha

$$P = M\gamma(1, \mathbf{V}) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3.8)$$

quindi si ottiene

$$E_1^c = \frac{E_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3.9)$$

Utilizzando questa espressione si può studiare la relazione che intercorre tra l'energia di  $m_1$  e l'angolo da essa formato con la velocità  $\mathbf{V}$ . Per fare ciò si può riscrivere l'equazione precedente (usando  $|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$ ) nella forma

$$\cos \theta_1 = \frac{E_1 - E_1^c \sqrt{1 - V^2}}{V \sqrt{E_1^2 - m_1^2}} \quad (3.10)$$

da cui, prendendo il quadrato, si ricava

$$E_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) - 2E_1 E_1^c \sqrt{1 - V^2} + (E_1^c)^2(1 - V^2) + m_1^2 V^2 \cos^2 \theta_1 = 0 \quad (3.11)$$

Questa equazione lega l'energia  $E_1$  della particella di massa  $m_1$  al suo angolo di uscita  $\theta_1$ , entrambi misurati nel sistema del laboratorio. Il discriminante di questa equazione è

$$\begin{aligned} \Delta &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[ (E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2 \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[ (E_1^c)^2(1 - V^2) - m_1^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2(1 - \cos^2 \theta_1) \right] = \\ &= 4V^2 \cos^2 \theta_1 \left[ |\mathbf{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 \sin^2 \theta_1 \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

dove  $\mathbf{p}_1^c$  è l'impulso della particella di massa  $m_1$  nel sistema del centro di massa. L'equazione Eq. (3.11) è della forma  $aE_1^2 - bE_1 + c = 0$  con  $a, b, c > 0$ , quindi per ogni valore di  $\cos^2 \theta_1$  per il quale  $\Delta > 0$  si hanno due valori corrispondenti dell'energia. Affinchè si abbia  $\Delta \geq 0$  per ogni valore di  $\theta_1$  si deve avere

$$0 \leq |\mathbf{p}_1^c|^2(1 - V^2) - m_1^2 V^2 = |\mathbf{p}_1^c|^2 - (E_1^c)^2 V^2 \Rightarrow V \leq |\mathbf{v}_1^c| \quad (3.13)$$

Se questa condizione non è soddisfatta esiste un angolo massimo  $\theta_1^{max} < \pi$  dato da

$$\sin \theta_1^{max} = \frac{|\mathbf{p}_1^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_1 V} \quad (3.14)$$

Chiaramente  $\lim_{V \rightarrow 1} \theta_1^{max} = 0$ , cioè per  $V$  grande il decadimento avviene in un cono sempre più stretto lungo la velocità  $\mathbf{V}$ .

Per chiarire questo comportamento è conveniente analizzare esplicitamente il passaggio dal sistema di riferimento del centro di massa a quello del laboratorio: indichiamo con  $p_1^c$  e  $E_1^c$  il modulo dell'impulso e l'energia della particella 1 nel sistema del centro di massa e sia  $\theta_1^c$  l'angolo formato dalla direzione di emissione della particella con la direzione della velocità  $\mathbf{V}$  del sistema del laboratorio. Se supponiamo per semplicità che la velocità  $\mathbf{V}$  sia diretta lungo il verso positivo dell'asse  $\hat{x}$ , nel sistema del centro di massa le componenti  $x$  e  $y$  dell'impulso sono  $p_1^c \cos \theta_1^c$  e  $p_1^c \sin \theta_1^c$ . Effettuando il cambiamento di sistema di riferimento otteniamo per le coordinate dell'impulso nel sistema del laboratorio le espressioni

$$p_x = \frac{p_1^c \cos \theta_1^c + E_1^c V}{\sqrt{1 - V^2}} \quad p_y = p_1^c \sin \theta_1^c \quad (3.15)$$

ed eliminando la dipendenza da  $\theta_1^c$  si ottiene

$$p_y^2 + (p_x \sqrt{1 - V^2} - E_1^c V)^2 = (p_1^c)^2 \quad (3.16)$$

Se si interpretano  $p_x$  e  $p_y$  come coordinate del piano questa equazione rappresenta una ellisse di semiassi  $p_1^c / \sqrt{1 - V^2}$  e  $p_1^c$  il cui centro  $O$  è stato spostato lungo il semiasse maggiore ad una distanza  $E_1^c V / \sqrt{1 - V^2}$  dal punto  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$  (punto  $A$ ). Il punto  $A$  risulta essere ancora all'interno dell'ellisse se è soddisfatta la condizione

$$\frac{E_1^c V}{\sqrt{1 - V^2}} < \frac{p_1^c}{\sqrt{1 - V^2}} \Rightarrow V < v_1^c \quad (3.17)$$

In Fig. (1) sono mostrati i due casi  $V < v_1^c$  e  $V > v_1^c$ :

$V < v_1^c$  per ogni valore di  $\theta_1$  esiste un unico valore di  $\mathbf{p}$  che soddisfa l'equazione Eq. (3.16). Per ogni valore di  $\cos^2 \theta_1$  esistono quindi due soluzioni di Eq. (3.11), corrispondenti agli angoli  $\theta_1$  e  $\pi - \theta_1$ .

$V > v_1^c$  per valori di  $\theta_1$  sufficientemente piccoli esistono due soluzioni di Eq. (3.16) e Eq. (3.11).  
Esiste un angolo massimo  $\theta_1^{max}$  che corrisponde ad un vettore  $\mathbf{p}$  tangente all'ellisse.

Nel sistema del centro di massa la distribuzione angolare delle particelle è isotropa, cioè il numero di particelle emesse nell'angolo solido  $d\omega^c = 2\pi \sin \theta_1^c d\theta_1^c$  (c'è chiaramente invarianza per rotazioni in  $\phi$  quindi si può semplicemente integrare  $d\phi$  tra 0 e  $2\pi$ ) è

$$dN = \frac{1}{4\pi} d\omega^c = \frac{1}{2} |d \cos \theta_1^c| \quad (3.18)$$

L'energia della particella  $m_1$  è data dalla equazione inversa della Eq. (3.9) che è

$$E_1 = \frac{E_1^c + \mathbf{p}_1^c \mathbf{V}}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{E_1^c + |\mathbf{p}_1^c| V \cos \theta_1^c}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3.19)$$

dove  $E_1^c$  è la costante data dall'equazione Eq. (3.5) e  $|\mathbf{p}_1^c| = \sqrt{(E_1^c)^2 - m_1^2}$ . Quindi

$$\frac{E_1^c - |\mathbf{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} \leq E_1 \leq \frac{E_1^c + |\mathbf{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (3.20)$$

Differenziando l'equazione Eq. (3.19) rispetto a  $\theta_1^c$  si ottiene

$$dE_1 = \frac{|\mathbf{p}_1^c| V}{\sqrt{1 - V^2}} d \cos \theta_1^c \quad (3.21)$$

e sostituendo questa espressione per  $d \cos \theta_1^c$  in Eq. (3.18) si ottiene la distribuzione in energia dei prodotti di decadimento nel sistema del laboratorio

$$dN = \frac{1}{2V |\mathbf{p}_1^c|} \sqrt{1 - V^2} dE_1 \quad (3.22)$$

da cui si vede che la distribuzione dei prodotti di decadimento è isotropa in energia nel sistema del laboratorio<sup>1</sup> (con l'energia che assume valori nell'intervallo Eq. (3.20)).

## 4 Sezione d'urto invariante

Supponiamo di avere un fascio di particelle con densità  $n_1$  (densità di riposo  $n_1^0$ ) incidente con velocità  $v_r$  su un bersaglio fermo di densità  $n_2^0$ . La sezione d'urto  $\sigma$  è data dalla seguente relazione per il numero di collisioni avvenute in un volume (tridimensionale)  $dV$  nell'intervallo di tempo  $dt$ :

$$dN = \sigma v_r n_1 n_2^0 dV dt \quad (4.1)$$

Poichè è definito facendo uso di un particolare sistema di riferimento il valore di  $\sigma$  è per costruzione un invariante relativistico. Cercheremo ora la relazione che intercorre tra  $d\nu$  e  $\sigma$  in un generico sistema di riferimento in cui le particelle del fascio 1 hanno velocità  $v_1$  e quelle del bersaglio hanno velocità  $v_2$ .

Supponiamo anzitutto che si abbia

$$dN = A n_1 n_2 dV dt \quad (4.2)$$

in un qualunque sistema di riferimento, dove  $A$  è una funzione da determinarsi e che nel sistema del laboratorio si riduce a  $\sigma v_r$ .

Nella equazione Eq. (4.2)  $dV dt$  è un invariante, in quanto le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali dello spazio quadridimensionale. D'altra parte anche  $dN$  è un invariante, quindi otteniamo che  $A n_1 n_2$  deve essere un invariante.

<sup>1</sup>nel sistema di riferimento del centro di massa la distribuzione in energia è  $dN = \delta(E - E_1^c) dE$ .

Le densità trasformano con l'inverso della contrazione di Lorentz, cioè

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - V^2}} = \frac{n_0 E}{m} \quad (4.3)$$

quindi dal fatto che  $An_1 n_2$  è invariante segue che  $AE_1 E_2$  è un invariante. Poichè anche  $p_{1\mu} p_2^\mu$  è invariante si può considerare la combinazione invariante

$$B = A \frac{E_1 E_2}{p_{1\mu} p_2^\mu} = A \frac{E_1 E_2}{E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} \quad (4.4)$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha  $A = \sigma v_r$ ,  $E_2 = m_2$  e  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ , quindi

$$A \frac{E_1 E_2}{p_1 p_2} = \sigma v_r \quad \Rightarrow \quad A = \sigma v_r \frac{p_1 p_2}{E_1 E_2} \quad (4.5)$$

Utilizzando le formule Eq. (2.5) e Eq. (2.6) si ottiene

$$\begin{aligned} v_r \frac{p_1 p_2}{E_1 E_2} &= \frac{\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{E_1 E_2} = \\ &= \frac{m_1 m_2}{E_1 E_2 \sqrt{(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)}} \sqrt{(1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2)} = \\ &= \sqrt{(1 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)^2 - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2)} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato Eq. (2.7). Rimettendo insieme i pezzi (Eq. (4.2),(4.5),(4.6)) si ottiene

$$dN = \sigma \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^2} n_1 n_2 dV dt \quad (4.7)$$

che è valida in ogni sistema di riferimento. In particolare se  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  sono parallele si ottiene

$$dN = \sigma |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| n_1 n_2 dV dt \quad (\text{se } \mathbf{v}_1 \parallel \mathbf{v}_2) \quad (4.8)$$

## 5 Trasformazione delle funzioni di distribuzione

Consideriamo dapprima la trasformazione della funzione di distribuzione nello spazio dei momenti, definita dalla relazione

$$dN = f(\mathbf{p}) d^3 p \quad d^3 p = dp_x dp_y dp_z \quad (5.1)$$

Il numero di particelle  $dN$  è un invariante, quindi per determinare la legge di trasformazione di  $f(\mathbf{p})$  basterà studiare come trasforma  $d^3 p$ . Per fare ciò si potrebbero usare direttamente le leggi per la trasformazione dell'impulso sotto una trasformazione di Lorentz ma è più semplice utilizzare un metodo indiretto: indichiamo con  $\bar{f}(p)$  la funzione di distribuzione nello spazio dei quadriimpulsi:

$$dN = \bar{f}(p) d^4 p \quad d^4 p = dp_t dp_x dp_y dp_z \quad (5.2)$$

Poichè  $dN$  è un invariante e  $d^4 p$  è invariante (le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni ortogonali nello spazio dei quadrivettori) ne segue che  $\bar{f}(p)$  è un invariante, cioè  $\bar{f}(p) = \bar{f}'(p')$  (dove l'apice indica le quantità calcolate in un diverso sistema di riferimento). Poichè anche  $p^2$  è invariante si può considerare l'identità

$$\bar{f}(p) \delta(p^2 - m^2) d^4 p = \bar{f}'(p') \delta(p'^2 - m^2) d^4 p' \quad (5.3)$$

(le  $\delta$  sono unidimensionali, poichè  $p^2$  è uno scalare). Se a questo punto si integra il primo membro in  $dp_t$  tra 0 e  $\infty$ , anche nel secondo membro si deve integrare  $p'_t$  tra 0 e  $\infty$  poichè  $p$  è un vettore di tipo tempo e quindi nessuna trasformazione di Lorentz può cambiare il segno di  $p_t$ . Quindi

$$\int_0^\infty \bar{f}(p) \delta(p^2 - m^2) d^3 p dp_t = \int_0^\infty \bar{f}'(p') \delta(p'^2 - m^2) d^3 p' dp'_t \quad (5.4)$$

A questo punto si usa la seguente proprietà della distribuzione  $\delta$

$$\delta(F(x)) = \sum_{x_i \text{ t.c. } F(x_i)=0} \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|} \quad (5.5)$$

con

$$F(p_t) = p_t^2 - \mathbf{p}^2 - m^2, \quad p_t|_i = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E \quad \left| \frac{dF}{dp_t}(p_t|_i) \right| = 2E \quad (5.6)$$

ottenendo

$$\delta(p^2 - m^2) = \frac{\delta(p_t + E) + \delta(p_t - E)}{2E} \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (5.7)$$

Utilizzando questa espressione in Eq. (5.4) solo  $\delta(p_t - E)$  contribuisce (pochè  $p_t \geq 0$ ) e si ottiene

$$\bar{f}(E, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{E} = \bar{f}'(E', \mathbf{p}') \frac{d^3 p'}{E'} \quad (5.8)$$

e pochè si è visto che  $\bar{f}$  è invariante

$$\frac{d^3 p}{E} = \frac{d^3 p'}{E'} \quad (5.9)$$

che è la formula cercata per la trasformazione dell'elemento di volume tridimensionale nello spazio degli impulsi. A questo punto basta riscrivere la Eq. (5.1) come

$$dN = f(\mathbf{p}) E \frac{d^3 p}{E} \quad (5.10)$$

ed usare l'invarianza di  $dN$  e Eq. (5.9) per ottenere la legge di trasformazione di  $f(\mathbf{p})$

$$f'(\mathbf{p}') = \frac{E}{E'} f(\mathbf{p}) \quad (5.11)$$

Consideriamo ora la funzione di distribuzione

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) d^3 p dV \quad (5.12)$$

Nuovamente  $dN$  è invariante ed analizziamo come cambia  $dV$ . Consideriamo tre sistemi di riferimento: uno in cui le particelle sono a riposo ed in cui l'elemento di volume è  $dV_0$  ed altri due in moto con velocità  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  rispetto a questo. A causa della contrazione di Lorentz si ha allora per gli elementi di volume la relazione

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - v^2} \quad dV' = dV_0 \sqrt{1 - v'^2} \quad (5.13)$$

da cui si ottiene subito

$$E dV = E' dV' \quad (5.14)$$

Moltiplicando questa relazione per Eq. (5.9) si ottiene subito l'invarianza di  $d^3 p dV$  e quindi l'invarianza della funzione di distribuzione

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f'(\mathbf{r}', \mathbf{p}') \quad (5.15)$$

## 6 Scattering elastico $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$

Considereremo in questa sezione la collisione elastica di due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ . Indichiamo con  $p_1$  e  $p_2$  i quadriimpulsi delle particelle incidenti e con  $p'_1$  e  $p'_2$  quelli delle particelle uscenti. Si hanno allora le relazioni

$$\begin{aligned} p_1^2 = p'^2_1 = m_1^2 \quad p_2^2 = p'^2_2 = m_2^2 \\ p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \end{aligned} \quad (6.1)$$

È conveniente riscrivere l'equazione della conservazione dei quadriimpulsi in due modi differenti

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 - p'_1 &= p'_2 \\ p_1 + p_2 - p'_2 &= p'_1 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Considerando il quadrato di queste due equazioni (e usando i vincoli cinematici) si ottengono le equazioni

$$m_1^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_1 - p_2 p'_1 = 0 \quad (6.3)$$

$$m_2^2 + p_1 p_2 - p_1 p'_2 - p_2 p'_2 = 0 \quad (6.4)$$

Chiamiamo sistema del laboratorio (sarà indicato da una apice  $L$ ) il sistema in cui la particella di massa  $m_2$  è ferma prima dell'urto. Si ha allora  $p_2^L = (m_2, \mathbf{0})$ ,  $p_1^L = (E_1^L, \mathbf{p}_1^L)$  e

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= E_1^L m_2 & p'_1 p_2 &= E_1^L m_2 & p_2 p'_2 &= E_2^L m_2 \\ p_1 p'_1 &= E_1^L E_1^L - \mathbf{p}_1^L \mathbf{p}_1^L = E_1^L E_1^L - |\mathbf{p}_1^L| |\mathbf{p}_1^L| \cos \theta_1^L \\ p_1 p'_2 &= E_1^L E_2^L - \mathbf{p}_1^L \mathbf{p}_2^L = E_1^L E_2^L - |\mathbf{p}_1^L| |\mathbf{p}_2^L| \cos \theta_2^L \end{aligned} \quad (6.5)$$

dove  $\theta_1^L$  e  $\theta_2^L$  sono gli angoli di scattering delle particelle 1 e 2 nel sistema di riferimento del laboratorio. Utilizzando queste espressioni nelle equazioni Eq. (6.3)-(6.4) si ottengono

$$\cos \theta_1^L = \frac{E_1^L (E_1^L + m_2) - E_1^L m_2 - m_1^2}{|\mathbf{p}_1^L| |\mathbf{p}'_1^L|} \quad (6.6)$$

$$\cos \theta_2^L = \frac{(E_1^L + m_2)(E_2^L - m_2)}{|\mathbf{p}_1^L| |\mathbf{p}'_2^L|} \quad (6.7)$$

che legano gli angoli di scattering alle energie delle particelle entranti e uscenti. La seconda di queste equazioni può essere semplicemente invertita, ottenendo  $E_2^L$  in funzione di  $E_1^L$  e  $\theta_2^L$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1^L|^2 |\mathbf{p}'_2^L|^2 \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2)^2 \\ (E_1^L{}^2 - m_1^2)(E_2^L{}^2 - m_2^2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2)^2 \\ (E_1^L{}^2 - m_1^2)(E_2^L + m_2) \cos^2 \theta_2^L &= (E_1^L + m_2)^2 (E_2^L - m_2) \\ E_2^L [(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^L{}^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L] &= m_2 (E_1^L + m_2)^2 + m_2 (E_1^L{}^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L \end{aligned} \quad (6.8)$$

e quindi

$$E_2^L = m_2 \frac{(E_1^L + m_2)^2 + (E_1^L{}^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L}{(E_1^L + m_2)^2 - (E_1^L{}^2 - m_1^2) \cos^2 \theta_2^L} \quad (6.9)$$

Analizziamo ora la possibilità che  $\theta_1^L$  e  $\theta_2^L$  possano avere un limite massimo: per fare ciò è conveniente ricondursi al caso del decadimento considerato in Sec. (3), pensando lo scattering  $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$  come  $1 + 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1' + 2'$  dove 3 è uno stato intermedio di quadriimpulso  $P^L = (m_2 + E_1^L, \mathbf{p}_1^L)$ . In questo modo il problema degli angoli di uscita per lo scattering si riduce all'analogo problema per il decadimento di una particella di massa e velocità

$$M^2 \equiv P^L P^L = (m_2 + E_1^L)^2 - |\mathbf{p}_1^L|^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}_1^L}{m_2 + E_1^L} \quad (6.10)$$

L'eventuale angolo limite la  $i$ -esima particella in questo problema è stato calcolato in precedenza ed è (vedi Eq. (3.14))

$$\begin{aligned} \sin \theta_i^{L \max} &= \frac{|\mathbf{p}_i^c| \sqrt{1 - V^2}}{m_i V} = \frac{M |\mathbf{p}_i^c|}{m_i |\mathbf{p}_1^L|} \\ \sqrt{1 - V^2} &= \frac{1}{m_2 + E_1^L} \sqrt{m_2^2 + 2m_2 E_1^L + (E_1^L)^2 - |\mathbf{p}_1^L|^2} = \frac{M}{m_2 + E_1^L} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Utilizzando le formule Eq. (3.5) per l'energia nel centro di massa otteniamo

$$\begin{aligned} E_1^c &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} = \frac{m_1^2 + m_2 E_1^L}{M} \\ E_2^c &= \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} = \frac{m_2(m_2 + E_1^L)}{M} \end{aligned} \quad (6.12)$$

da cui si calcolano gli impulsi nel centro di massa

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_1^c| &= \sqrt{(E_1^c)^2 - m_1^2} = \frac{1}{M} \sqrt{(m_1^2 + m_2 E_1^L)^2 - m_1^2 M^2} = \frac{1}{M} \sqrt{m_2^2 (E_1^L)^2 - m_1^2 m_2^2} = \frac{m_2}{M} |\mathbf{p}_1^L| \\ |\mathbf{p}_2^c| &= |\mathbf{p}_1^c| \end{aligned} \quad (6.13)$$

e sostituendo in Eq. (6.11) otteniamo

$$\sin \theta_1^{Lmax} = \frac{m_2}{m_1} \quad \sin \theta_2^{Lmax} = 1 \quad (6.14)$$

quindi un angolo limite esiste solo per la particella incidente  $m_1$  se essa è più pesante di  $m_2$ .

Consideriamo ora lo scattering nel sistema del centro di massa: si ha

$$E_1^c + E_2^c = M = E_1'^c + E_2'^c \quad \mathbf{p}_1^c + \mathbf{p}_2^c = \mathbf{0} = \mathbf{p}_1'^c + \mathbf{p}_2'^c \quad (6.15)$$

ed è immediato vedere che si ha

$$E_1^c = E_1'^c \quad E_2^c = E_2'^c \quad |\mathbf{p}_1^c| = |\mathbf{p}_2^c| = |\mathbf{p}_1'^c| = |\mathbf{p}_2'^c| \equiv p_0 \quad (6.16)$$

dove  $E_1^c$ ,  $E_2^c$  e  $|\mathbf{p}_1^c|$  sono dati dalle equazioni Eq. (6.12)-(6.13). Lo scattering nel sistema del centro di massa è quindi completamente determinato dall'energia totale  $M$  e dall'angolo di rotazione dei momenti, cioè l'angolo tra  $\mathbf{p}_1^c$  e  $\mathbf{p}_1'^c$ , che indicheremo con  $\chi$ .

Può risultare conveniente esprimere in funzione dell'angolo  $\chi$  anche le energie finali nel sistema di riferimento del laboratorio. Per fare ciò è conveniente usare nuovamente l'equazione Eq. (6.3), scrivendo però  $p_1 p_1'$  nel sistema del centro di massa:

$$p_1 p_1' = E_1^c E_1'^c - \mathbf{p}_1^c \mathbf{p}_1'^c = E_1^c{}^2 - |\mathbf{p}_1^c|^2 \cos \chi = p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2 \quad (6.17)$$

e quindi otteniamo

$$E_1'^L - E_1^L = -\frac{p_0^2}{m_2} (1 - \cos \chi) \quad (6.18)$$

Per terminare si deve esprimere  $p_0$  in termini di quantità del sistema del laboratorio usando l'Eq. (6.13) cioè (esplicitando  $M$  e scrivendo  $|\mathbf{p}_1^L|$  in termini dell'energia)

$$p_0^2 = \frac{m_2^2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} \quad (6.19)$$

e quindi

$$E_1'^L = E_1^L - \frac{m_2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (6.20)$$

Usando  $E_1^L + m_2 = E_1'^L + E_2'^L$  si ottiene anche

$$E_2'^L = m_2 + \frac{m_2 (E_1^L{}^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1^L} (1 - \cos \chi) \quad (6.21)$$

Il secondo termine di queste equazioni rappresenta l'energia trasferita dalla prima particella ( $m_1$ ) alla seconda ( $m_2$ ) che era inizialmente a riposo.

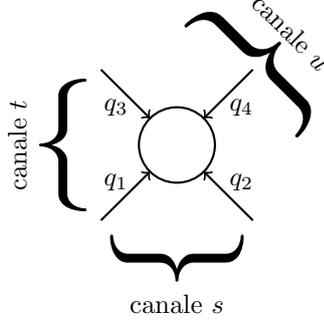


Figura 2: I tre canali di una reazione generalizzata

## 7 Invarianti cinematici del processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

Vediamo quanti sono gli invarianti cinematici indipendenti che possono essere usati per la descrizione dello scattering generale  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ . Nel processo intervengono quattro quadriimpulsi, che indicheremo con  $p_1, p_2, p_3, p_4$ ; questi non sono tutti indipendenti in quanto legati dalla conservazione di energia e impulso, quindi ne restano tre indipendenti, ad es.  $p_1, p_2, p_3$ . Utilizzando questi ultimi si possono costruire sei invarianti  $p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_1p_2, p_2p_3, p_1p_3$ . I primi tre sono le masse delle particelle, inoltre gli ultimi tre sono legati dalla relazione

$$(p_1 + p_2 - p_3)^2 = p_4^2 = m_4^2 \quad \Rightarrow \quad p_1p_2 - p_2p_3 - p_1p_3 = \left( m_4^2 - \frac{1}{2}m_1^2 - \frac{1}{2}m_2^2 - \frac{1}{2}m_3^2 \right) \quad (7.1)$$

quindi restano due invarianti indipendenti. Con riferimento al caso elastico trattato nella sezione precedente questi due invarianti possono essere ad esempio l'energia del centro di massa  $M$  e l'angolo di scattering  $\chi$ .

Consideriamo per un momento il caso di una reazione generica in cui intervengano  $n$  particelle e poniamoci la stessa domanda: quanti invarianti sono necessari per una descrizione della reazione? In questo caso abbiamo  $4n$  componenti dei quadriimpulsi coinvolti, 4 equazioni date dalla conservazione di energia ed impulso ed  $n$  relazioni di mass-shell  $p_i^2 = m_i^2$ . Inoltre abbiamo 6 gradi di libertà nella scelta del sistema di riferimento (3 rotazioni e 3 boost). In definitiva in una reazione generica tra  $n$  particelle esistono

$$4n - 4 - n - 6 = 3n - 10 \quad (7.2)$$

invarianti cinematici indipendenti.

Ritorniamo al caso dello scattering  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  ed introduciamo i quadriettori  $q_i$  definiti come  $\pm p_i$ , in modo che la conservazione del quadriimpulso si possa scrivere in modo simmetrico

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \quad (7.3)$$

Le variabili di Mandelstam sono definite dalle espressioni

$$\begin{aligned} s &= (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2 \\ t &= (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2 \\ u &= (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

Poichè si è visto che gli invarianti indipendenti di una reazione a 4 particelle sono 2, queste variabili non possono essere tutte indipendenti. In effetti è semplice vedere che si ha

$$s + t + u = h \quad (7.5)$$

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (7.6)$$

infatti

$$\begin{aligned} s + t + u &= (q_1 + q_2)^2 + (q_1 + q_3)^2 + (q_1 + q_4)^2 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2q_1q_2 + 2q_1q_3 + 2q_1q_4 = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2q_1(q_2 + q_3 + q_4) = \\ &= 3m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - 2q_1q_1 = h \end{aligned} \quad (7.7)$$

Le tre variabili di Mandelstam sono quindi ridondanti per un solo processo ma permettono di stabilire dei legami tra reazioni diverse: indicando con una barra le antiparticelle consideriamo le reazioni

$$\begin{aligned} (I) \quad & 1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \\ (II) \quad & 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \\ (III) \quad & 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

Le variabili  $s$ ,  $t$  ed  $u$  rappresentano l'energia nel sistema del centro di massa delle reazioni (I), (II) e (III) che sono anche indicate come canali  $s$ ,  $t$  ed  $u$  della reazione generalizzata.

Calcoliamo gli invarianti nel sistema del centro di massa per il canale  $s$ : si ha allora

$$\begin{aligned} q_1 = p_1 &= (E_1^c, \mathbf{p}_1^c) & q_2 = p_2 &= (E_2^c, -\mathbf{p}_1^c) \\ q_3 = -p_3 &= (-E_3^c, -\mathbf{p}_3^c) & q_4 = -p_4 &= (-E_4^c, \mathbf{p}_3^c) \end{aligned} \quad (7.9)$$

quindi abbiamo

$$s = (E_1^c + E_2^c)^2 = (E_3^c + E_4^c)^2 \quad (7.10)$$

ed utilizzando l'equazione Eq. (3.5) con  $M^2 = s$  si ottiene

$$\begin{aligned} E_1^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_1^2 - m_2^2) & E_2^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_2^2 - m_1^2) \\ E_3^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_3^2 - m_4^2) & E_4^c &= \frac{1}{2\sqrt{s}}(s + m_4^2 - m_3^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

e

$$\begin{aligned} 4s|\mathbf{p}_1^c|^2 &= (s + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2s = s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2 = \\ &= [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2] \end{aligned} \quad (7.12)$$

ed analogamente

$$4s|\mathbf{p}_3^c|^2 = [s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2] \quad (7.13)$$

Le restanti variabili  $t$  e  $u$  valgono

$$\begin{aligned} 2t &= (q_1 + q_3)^2 + (q_2 + q_4)^2 = h + 4\mathbf{p}_1^c\mathbf{p}_3^c - 2(E_1^cE_3^c + E_2^cE_4^c) = \\ &= h + 4\mathbf{p}_1^c\mathbf{p}_3^c - s - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \\ 2u &= h - 4\mathbf{p}_1^c\mathbf{p}_3^c - s + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Le variabili di Mandelstam possono essere convenientemente rappresentate in un piano con coordinate triangolari, vedi Fig. (3), l'altezza del triangolo essendo uguale ad  $h$ , infatti se si indica con  $\ell$  la lunghezza dei lati del triangolo equilatero si hanno per l'area del triangolo le due espressioni

$$A = \frac{h\ell}{2} \quad A = \frac{\ell}{2}(s + t + u) \quad (7.15)$$

da cui si vede che la relazione fondamentale Eq. (7.5) è soddisfatta. Questa relazione è soddisfatta non solo dai punti all'interno del triangolo ma anche da quelli all'esterno, a patto di scegliere adeguatamente i segni delle variabili (come mostrato in figura Fig. (3)).

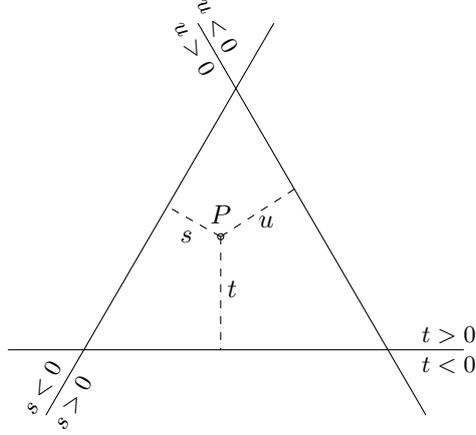


Figura 3: Le variabili di Mandelstam come coordinate triangolari nel piano.

Chiaramente non tutti i punti del piano corrispondono a valori delle variabili di Mandelstam corrispondenti a casi fisici. Si pone quindi il problema di determinare quelli che vengono detti domini fisici.

Il prodotto i due quadriimpulsi soddisfa la relazione

$$p_a p_b \geq m_a m_b \quad (7.16)$$

da cui seguono subito le relazioni

$$(p_a + p_b)^2 \geq (m_a + m_b)^2 \quad (p_a - p_b)^2 \leq (m_a - m_b)^2 \quad (7.17)$$

Utilizzando queste disuguaglianze si ottengono per il canale  $s$  le disequazioni

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2)^2 \leq s \leq (m_3 + m_4)^2 \\ (m_1 - m_3)^2 \geq t \leq (m_2 - m_4)^2 \\ (m_1 - m_4)^2 \geq u \leq (m_2 - m_3)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{per il canale } s) \quad (7.18)$$

e disequazioni analoghe si hanno negli altri canali.

Questa condizione è necessaria ma non sufficiente. Prima di passare ad analizzare il caso generale consideriamo il caso di uno scattering elastico

$$m_1 = m_3 \equiv m \quad m_2 = m_4 \equiv \mu \quad m > \mu \quad (7.19)$$

In questo caso le condizioni Eq. (7.18) si riducono a  $s \geq (m + \mu)^2$  e  $t \leq 0$ , inoltre, effettuando i calcoli nel centro di massa ed indicando con  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{k}$  gli impulsi prima e dopo l'urto della particella  $m_1$  ( $|\mathbf{p}| = |\mathbf{k}|$ ), si trova

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = 2m^2 - 2(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p})(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{k}) = \\ &= 2m^2 - 2(\mathbf{p}^2 + m^2) + 2\mathbf{p}\mathbf{k} = 2\mathbf{p}^2(\cos \theta - 1) \end{aligned} \quad (7.20)$$

L'energia della particella  $m_1$  nel sistema del centro di massa è data da Eq. (3.5) in cui  $M \rightarrow \sqrt{s}$ , quindi

$$E_m = \frac{s + (m + \mu)(m - \mu)}{2\sqrt{s}} \quad (7.21)$$

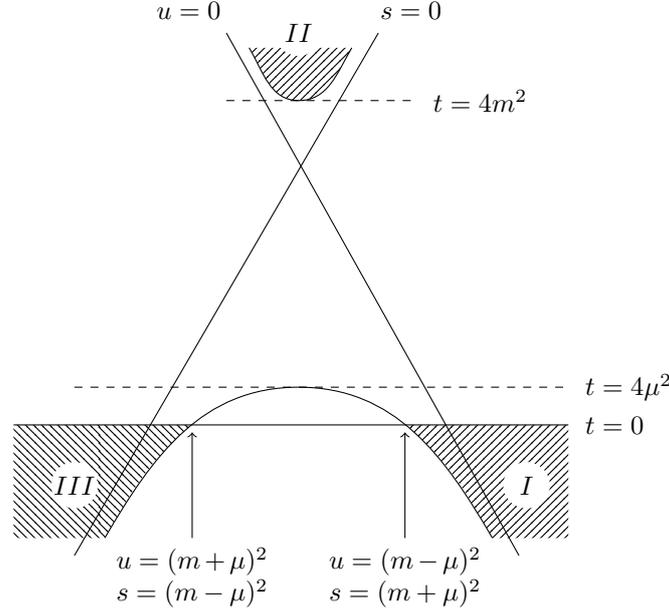


Figura 4: Domini fisici dello scattering elastico con parametri Eq. (7.19).

e

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^2 &= E_m^2 - m^2 = \frac{s^2 + (m + \mu)^2(m - \mu)^2 + 2s(m + \mu)(m - \mu) - 4sm^2}{4s} = \\
 &= \frac{s^2 + (m + \mu)^2(m - \mu)^2 - 2s(m^2 + \mu^2)}{4s} = \\
 &= \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{4s}
 \end{aligned} \tag{7.22}$$

quindi si ottiene per  $t$  l'espressione

$$t = \frac{[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2]}{4s} (\cos \theta - 1) \tag{7.23}$$

Si nota subito che  $t \leq 0$ , compatibilmente con la disuguaglianza ricavata precedentemente, tuttavia dalla formula precedente si ottiene anche  $t_{min}$ , che è dato dall'equazione

$$st = -[s - (m + \mu)^2][s - (m - \mu)^2] \tag{7.24}$$

questa è l'equazione di una iperbole: ricordando che  $h = 2m^2 + 2\mu$  e quindi  $u = 2m^2 + 2\mu^2 - s - t$  l'equazione precedente può essere scritta nella form  $su = (m^2 - \mu^2)^2$ . Il dominio fisico è quindi la zona  $I$  della figura Fig. (4).

Un modo per ottenere la altra condizione nel caso generale è il seguente: consideriamo il quadrivettore  $L$  definito come

$$L_\lambda = \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} q_1^\mu q_2^\nu q_3^\rho \tag{7.25}$$

Supponiamo ora che  $m_1 \neq 0$ , allora nel sistema di riposo della particella 1,  $L$  ha solo componenti spaziali ( $L_i = \epsilon_{i0kl} q_1^0 q_2^k q_3^l$ ) e quindi  $L^2 \leq 0$ . D'altra parte  $L^2$  è un invariante e quindi  $L^2 \leq 0$  deve valere in ogni sistema di riferimento. Utilizzando l'espressione

$$\epsilon^{iklm} \epsilon_{prsm} = - \begin{vmatrix} \delta_p^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_r^l & \delta_s^l \end{vmatrix} \tag{7.26}$$

la disequazione  $L^2 \leq 0$  si riscrive come

$$\begin{vmatrix} q_1^2 & q_1 q_2 & q_1 q_3 \\ q_2 q_1 & q_2^2 & q_2 q_3 \\ q_3 q_1 & q_3 q_2 & q_3^2 \end{vmatrix} \geq 0 \quad (7.27)$$

che scritta in termini degli invarianti di Mandelstam diventa per tutti i canali<sup>2</sup>

$$stu \geq as + bt + cu \quad (7.28)$$

dove

$$\begin{aligned} ah &= (m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2) \\ bh &= (m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2) \\ ch &= (m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Consideriamo nuovamente il caso in cui il canale  $s$  della reazione sia uno scattering elastico: in questo caso

$$m_1 = m_3 \equiv m \quad m_2 = m_4 \equiv \mu \quad m > \mu \quad (7.30)$$

Le costanti  $h, a, b, c$  valgono

$$h = 2(m^2 + \mu^2) \quad a = c = 0 \quad b = (m^2 - \mu^2)^2 \quad (7.31)$$

e la disequazione Eq. (7.28) diventa  $sut \geq (m^2 - \mu^2)^2 t$  cioè

$$t = 0 \quad \begin{cases} t > 0 \\ su > (m^2 - \mu^2)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} t < 0 \\ su < (m^2 - \mu^2)^2 \end{cases} \quad (7.32)$$

quindi i contorni dei domini fisici sono la retta  $t = 0$  e l'iperbole  $su = (m^2 - \mu^2)^2$ . Delle disuguaglianze Eq. (7.18) per il canale  $s$  l'unica che non risulta come conseguente dalle Eq. (7.32) è  $s \geq (m + \mu)^2$  da cui si vede che il dominio fisico corrispondente al canale  $s$  è quello indicato con  $I$  in Fig. (4). Analogamente nel canale  $u$  deve essere soddisfatta la condizione aggiuntiva  $u \geq (m + \mu)^2$ , quindi il dominio fisico del canale  $u$  è quello indicato con  $III$  in Fig. (4). Infine nel canale  $t$  deve essere soddisfatta la relazione  $t \geq (m + \mu)^2$  che però è automaticamente soddisfatta in virtù delle Eq. (7.32), quindi il dominio fisico del canale  $t$  è quello indicato in figura con  $II$ .

Notiamo infine che se una delle masse è più grande della somma delle altre (ad es.  $m_1 > m_2 + m_3 + m_4$ ) allora un quarto possibile canale può essere aperto, corrispondente alla disintegrazione

$$(IV) \quad 1 \rightarrow \bar{2} + 3 + 4 \quad (7.33)$$

In questo caso gli invarianti possono essere convenientemente calcolati nel sistema di riferimento di quiete della particella 1, in cui si ha

$$\begin{aligned} q_1 &= (m_1, \mathbf{0}) & q_2 &= (-E_2^c, -\mathbf{p}_2^c) & q_3 &= (-E_3^c, -\mathbf{p}_3^c) \\ q_4 &= (-E_4^c, -\mathbf{p}_4^c) & E_1^c + E_2^c + E_3^c &= m_1 & \mathbf{p}_2^c + \mathbf{p}_3^c + \mathbf{p}_4^c &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7.34)$$

e valgono

$$\begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 E_2^c \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2m_1 E_3^c \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2m_1 E_4^c \end{aligned} \quad (7.35)$$

Inoltre dalla disequazione Eq. (7.16) è facile ottenere

$$\begin{cases} (m_3 + m_4)^2 \leq s \leq (m_1 - m_2)^2 \\ (m_2 + m_4)^2 \leq t \leq (m_1 - m_3)^2 \\ (m_2 + m_3)^2 \leq u \leq (m_1 - m_4)^2 \end{cases} \quad (7.36)$$

quindi tutti gli invarianti sono positivi ed il dominio fisico corrispondente a questo canale è completamente contenuto all'interno del triangolo coordinato (in questo caso il grafico in coordinate triangolari si chiama spesso Dalitz plot o plot di Dalitz-Fabri).

Un trattamento più dettagliato delle variabili di Mandelstam nel caso dello scattering elastico è riportato in [7] mentre per il calcolo di alcuni domini fisici si può vedere ad es. la sezione §67 di [8].

<sup>2</sup>la dimostrazione completa è lunga e non istruttiva e non è presentata neppure nell'articolo originale [6].

## 7.1 Dimostrazione di $p_a p_b \geq m_a m_b$ e applicazioni elementari

Mostreremo ora una dimostrazione della disuguaglianza  $p_a p_b \geq m_a m_b$  e che l'uguaglianza vale solo quando le particelle sono relativamente ferme.

Consideriamo dapprima il caso in cui almeno una delle due masse sia non nulla, supponiamo  $m_a > 0$ , allora, poichè  $p_a p_b$  è invariante, si può effettuare il calcolo nel sistema di riferimento in cui  $m_a$  è ferma, quindi

$$p_a p_b = m_a E_b \quad (7.37)$$

e poichè  $E_b \geq m_b$  e l'uguaglianza vale solo quando  $m_b$  è ferma abbiamo ottenuto il risultato voluto.

Nel caso in cui  $m_a = m_b = 0$ , si ha  $p_a = E_a(1, \hat{n})$  e  $p_b = E_b(1, \hat{m})$ , con  $\hat{n}$  e  $\hat{m}$  versori, e quindi

$$p_a p_b = E_a E_b (1 - \cos \theta) \geq 0 \quad (7.38)$$

e l'uguaglianza vale solo per  $\theta = 0$ , cioè particelle che si muovono a velocità  $c$  nella stessa direzione.

Una semplice applicazione di questa disuguaglianza si ha nel calcolo dell'energia massima di un prodotto di decadimento: consideriamo una particella di massa  $M$  che decade in  $n$  particelle di massa  $m_1, \dots, m_n$ . Quale è l'energia massima con cui può venir prodotta la particella di massa  $m_i$ ? Si riscrive la conservazione del quadriimpulso nella forma

$$P - p_i = p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n \quad (7.39)$$

e si considerano i quadrati di entrambi i membri. Per quanto riguarda il primo membro si ha, nel sistema di riferimento di quiete della particella che decade,

$$(P - p_i)^2 = M^2 + m_i^2 - 2ME_i \quad (7.40)$$

dove  $E_i$  è l'energia della particella  $i$ -esima. Per quanto riguarda il secondo membro si ha, usando la disuguaglianza appena mostrata,

$$(p_1 + \dots + p_{i-1} + p_{i+1} + \dots + p_n)^2 \geq (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2 \quad (7.41)$$

e l'uguaglianza è soddisfatta solo se tutte le particelle diverse dalla  $i$ -esima hanno identiche velocità. Quindi

$$E_i \leq \frac{M^2 + m_i^2 - (m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n)^2}{2M} \quad (7.42)$$

e dal confronto con l'equazione Eq. (3.5) si vede che l'energia massima della particella  $i$ -esima è la stessa energia che si avrebbe nel decadimento a due particelle di massa  $\tilde{m}_1 = m_i$  e  $\tilde{m}_2 = m_1 + \dots + m_{i-1} + m_{i+1} + \dots + m_n$ .

## Parte II

# Elettrodinamica

## 8 Convenzioni e notazioni

Si considererà nel seguito solo il caso di campi nel vuoto e risulta conveniente utilizzare il sistema di unità di misura CGS, nel quale le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \end{aligned} \quad (8.1)$$

e si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ m\ddot{\mathbf{x}} &= e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}\end{aligned}\tag{8.2}$$

In notazione quadridimensionale

$$\begin{aligned}A^\mu &= (\phi, \mathbf{A}) & j^\mu &= (c\rho, \mathbf{j}) \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ E^i &= F_{0i} & B^i &= \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}\end{aligned}\tag{8.3}$$

l'equazione del moto di una particella carica in campo esterno si scrive ( $u^\mu$  è la quadrivelocità e  $\tau$  il tempo proprio)

$$mc\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu\tag{8.4}$$

e le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c}j^\nu\end{aligned}\tag{8.5}$$

La densità di energia è data da  $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2)$  mentre la densità di flusso di energia è data dal vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\tag{8.6}$$

## 9 Potenziali ritardati

Costruiremo in questa sezione la soluzione delle equazioni di Maxwell in cui il moto delle cariche è fissato a priori, cioè si otterranno i campi generati da cariche in moto arbitrario dato.

Scrivendo esplicitamente la seconda delle equazioni Eq. (8.5) in termini del quadripotenziale si ottiene l'equazione

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c}j^\nu\tag{9.1}$$

Se ora si utilizza la gauge di Lorentz (detta anche di radiazione) definita da

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{ovvero } \partial_t\phi - c\nabla \cdot \mathbf{A} = 0)\tag{9.2}$$

si ottengono le equazioni d'onda per le componenti del quadripotenziale:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi &= 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\end{aligned}\tag{9.3}$$

dove  $\rho$  e  $\mathbf{j}$  sono funzioni assegnate del tempo e del punto.

Considereremo esplicitamente solo la prima delle equazioni Eq. (9.3), per le altre valendo considerazioni identiche. Dapprima consideriamo il caso in cui

$$\rho(t, \mathbf{r}) = de(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\tag{9.4}$$

la soluzione del caso generale sarà poi ottenuta usando la linearità delle equazioni Eq. (9.3). In questo caso per  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$  l'equazione si riduce all'equazione di D'Alembert libera

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = 0\tag{9.5}$$

Consideriamo coordinate polari centrate in  $\mathbf{r}_0$  e solo le soluzioni a simmetria sferica, in quanto anche l'equazione completa è invariante sotto rotazioni di centro  $\mathbf{r}_0$ . Introducendo la notazione  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ , nelle coordinate polari centrate in  $\mathbf{r}_0$  e con l'assunzione della simmetria sferica, l'equazione Eq. (9.5) diventa

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.6)$$

se ora effettuiamo la sostituzione

$$\phi(t, R) = \frac{\chi(t, R)}{R} \quad (9.7)$$

l'equazione Eq. (9.6) si riduce al caso di una equazione d'onda unidimensionale

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \quad (9.8)$$

Se si effettua ora il cambiamento di variabili

$$\xi = t - R/c \quad \zeta = t + R/c \quad (9.9)$$

l'equazione Eq. (9.8) si riscrive semplicemente come

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \zeta} = 0 \quad (9.10)$$

la cui soluzione generale è

$$\chi(t, r) = f_1(\xi) + f_2(\zeta) = f_1(t - R/c) + f_2(t + R/c) \quad (9.11)$$

dove  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni arbitrarie. Dalla interpretazione fisica del risultato finale risulterà chiaro che si deve porre  $f_2 \equiv 0$ , quindi per semplificare la notazione continueremo a considerare solo il termine  $f_1$ .

Vediamo ora come deve essere scelta la funzione  $f_1$  per fare in modo che la funzione  $\phi$  soddisfi la prima delle equazioni Eq. (9.3) con  $\rho$  dato dall'equazione Eq. (9.4). Indichiamo con  $B(\mathbf{r}_0, \epsilon)$  la palla centrata in  $\mathbf{r}_0$  e di raggio  $\epsilon$  ed integriamo la prima delle equazioni Eq. (9.3) sul dominio  $B(\mathbf{r}_0, \epsilon)$ :

$$\int_{B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} \nabla^2 \phi dV - \frac{1}{c^2} \int_{B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dV = -4\pi de(t) \quad (9.12)$$

Il gradiente di  $\phi$  è dato da

$$\nabla \phi = \left( -\frac{1}{c} \frac{f_1'}{R} - \frac{f_1}{R^2} \right) \mathbf{n} \quad (9.13)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore di  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , quindi, utilizzando la simmetria sferica di  $f_1$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} \nabla^2 \phi dV &= \int_{B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} \nabla \cdot (\nabla \phi) dV = \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS = 4\pi \left( -\frac{\epsilon}{c} f_1'(t - \epsilon/c) - f_1(t - \epsilon/c) \right) \end{aligned} \quad (9.14)$$

Infine per il termine di Eq. (9.12) con le derivate temporali si ha

$$\int_{B(\mathbf{r}_0, \epsilon)} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dV = 4\pi \int_0^\epsilon f_1''(t - R/c) R dR \quad (9.15)$$

e quindi l'equazione Eq. (9.12) si riscrive come

$$4\pi \left( -\frac{\epsilon}{c} f_1'(t - \epsilon/c) - f_1(t - \epsilon/c) \right) - \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\epsilon f_1''(t - R/c) R dR = -4\pi de(t) \quad (9.16)$$

Questa equazione deve valere in particolare quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , nel qual caso si ottiene (poichè  $f_1$  è regolare in  $\mathbf{r}_0$  insieme alle sue derivate)

$$f_1(t) = de(t) \quad (9.17)$$

e quindi la soluzione cercata è

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} de \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c} \right) \quad (9.18)$$

Nel caso di una distribuzione generica di cariche  $\rho(t, \mathbf{r})$  si ottiene per linearità

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \rho \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}, \mathbf{r}_0 \right) d\mathbf{r}_0 \quad (9.19)$$

ed analogamente

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \int \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \mathbf{j} \left( t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}, \mathbf{r}_0 \right) d\mathbf{r}_0 \quad (9.20)$$

L'interpretazione fisica di queste soluzioni è piuttosto semplice: poichè l'interazione elettromagnetica propaga con velocità  $c$  il potenziale  $\phi(t, \mathbf{r})$  generato in  $\mathbf{r}$  all'istante  $t$  dipende solo dalle cariche che hanno avuto modo di "comunicare la loro posizione", cioè quelle che erano nei punti  $\mathbf{r}_0$  ai tempi  $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/c$ . Se si fosse mantenuto anche il termine  $f_2$  in Eq. (9.11) si avrebbe anche un contributo all'interazione che propaga all'indietro nel tempo, motivo per cui si pone  $f_2 \equiv 0$ .

## 10 Potenziali di Lienard-Wiechert

Si applicheranno ora le formule della sezione Sec. (9) al caso di una singola carica in moto generico. Introduciamo in Eq. (9.19) la variabile muta di integrazione  $\tau$ :

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \rho(\tau, \mathbf{r}_0) \delta \left( \tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c} \right) d\mathbf{r}_0 d\tau \quad (10.1)$$

Per una particella di carica  $e$  in moto con legge oraria  $\mathbf{r} = \mathbf{s}(t)$  la densità di carica è data da

$$\rho(t, \mathbf{r}) = e\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) \quad (10.2)$$

ed inserendo questa espressione nell'equazione Eq. (10.1) si ottiene

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{r}) &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \delta^3(\mathbf{r}_0 - \mathbf{s}(\tau)) \delta \left( \tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c} \right) d\mathbf{r}_0 d\tau = \\ &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)|} \delta \left( \tau - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)|}{c} \right) d\tau \end{aligned} \quad (10.3)$$

Supponiamo ora che per ogni dato  $\mathbf{r}$  esista un unico valore di  $\tau$  che annulli l'argomento della distribuzione delta ed usiamo

$$\delta(f(\tau) - t) = \frac{\delta(\tau - t')}{|f'(\tau)|} \quad f(t') = t \quad (10.4)$$

con

$$f(\tau) = \tau + |\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)|/c \quad f'(\tau) = 1 - \frac{1}{c} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(\tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)|} > 0 \quad (10.5)$$

e

$$t = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|/c \quad (10.6)$$

ottenendo

$$\phi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{e\delta(\tau - t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\tau)) \cdot \dot{\mathbf{s}}(\tau)} d\tau = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')} \quad (10.7)$$

In modo identico si ottiene per il potenziale vettore l'espressione

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \frac{e\dot{\mathbf{s}}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')| - \frac{1}{c}(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')) \cdot \dot{\mathbf{s}}(t')} \quad (10.8)$$

Una volta ottenuti i potenziali, questi possono essere derivati per ottenere i campi. Questa operazione non presenta particolari difficoltà tuttavia è piuttosto lunga e può essere trovata in tutti i dettagli in [9] §6-3. Introducendo le notazioni

$$\mathbf{r}' = \mathbf{s}(t') \quad \mathbf{v}' = \dot{\mathbf{s}}(t') \quad \mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{s}}(t') \quad \mathbf{n}' = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.9)$$

i campi elettrico e magnetico si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{-e[\mathbf{a}' - (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}')\mathbf{n}'] + e\mathbf{n}' \times (\mathbf{a}' \times \frac{\mathbf{v}'}{c})}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c}\right)^3} + e \frac{(\mathbf{n}' - \frac{\mathbf{v}'}{c}) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c}\right)^3} \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{n}' \times \frac{-e\mathbf{a}' + e\mathbf{n}' \times (\mathbf{a}' \times \frac{\mathbf{v}'}{c})}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c}\right)^3} + e \frac{(\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{n}') \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}'}{c}\right)^3} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Sia in  $\mathbf{E}$  che in  $\mathbf{B}$  si distinguono due termini con diversi andamenti asintotici: i termini  $\sim \frac{1}{r^2}$  sono termini coulombiani che si sarebbero potuti ottenere anche con una trasformazione di Lorentz al sistema di riposo (istantaneo) della particella. I termini  $\sim \frac{1}{r}$  sono i termini di radiazione. Notiamo che se indichiamo con  $\mathbf{E}_{rad}$  e  $\mathbf{B}_{rad}$  i termini di radiazione del campo elettrico e magnetico rispettivamente, allora si ha  $\mathbf{E}_{rad} \cdot \mathbf{n}' = 0$ ,

$$\mathbf{B}_{rad} = \mathbf{n}' \times \mathbf{E}_{rad} \quad \mathbf{E}_{rad} \cdot \mathbf{n}' = 0 \quad \mathbf{B}_{rad} \cdot \mathbf{n}' = 0 \quad (10.11)$$

cioè i campi sono trasversi ed ortogonali tra loro.

Calcoliamo ora l'energia irradiata dalla particella nell'unità di tempo. Per fare ciò è prima di tutto necessario calcolare il vettore di Poynting  $\mathbf{S}$ : nel caso del campo di radiazione si ha, come conseguenza di Eq. (10.11),

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{rad} \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}_{rad}) = \frac{c}{4\pi} E_{rad}^2 \mathbf{n}' \quad (10.12)$$

inoltre nel caso non relativistico  $v \ll c$  l'espressione della componente di radiazione del campo elettrico Eq. (10.10) si riduce a

$$\mathbf{E}_{rad}^{(nr)}(t, \mathbf{r}) = -e \frac{\mathbf{a}' - (\mathbf{a}' \cdot \mathbf{n}')\mathbf{n}'}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (10.13)$$

e, se si indica con  $\theta$  l'angolo tra i vettori  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{n}'$ , si ha

$$|\mathbf{E}_{rad}^{(nr)}| = \frac{ea' \sin \theta}{c^2 R} \quad a' = |\mathbf{a}'| \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (10.14)$$

La quantità di energia irradiata per unità di tempo, data dal flusso del vettore di Poynting, è quindi data da

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^2 a'^2}{4\pi c^3} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{e^2 a'^2}{c^3} \quad (10.15)$$

che è nota come formula di Larmor. Nelle equazioni seguenti non utilizzeremo gli apici per semplicità di notazione.

Considerando la forma esplicita del tensore energia-impulso del campo non è difficile verificare che nel caso non relativistico l'impulso irraggiato è nullo<sup>3</sup>.

Per ottenere la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è conveniente riscrivere Eq. (10.15) nella forma

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2}{c^3} dt \\ d\mathcal{P} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (10.16)$$

la cui generalizzazione covariante è

$$d\mathcal{P}^\mu = -\frac{2e^2}{3c^4} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} u^\mu d\tau \quad (10.17)$$

infatti nel sistema di riferimento (localmente) in quiete abbiamo  $u^\mu = (c, \mathbf{0})$  e  $du^\mu/dt = (0, \mathbf{a})$ , quindi si ritrovano le equazioni (10.16). Per determinare la potenza irraggiata occorre considerare la componente 0 di questa equazione cioè

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2e^2}{3c^3} \frac{du^\nu}{d\tau} \frac{du_\nu}{d\tau} \quad (10.18)$$

Utilizzando la formula esplicita  $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$  e

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \quad (10.19)$$

si ottiene

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = \gamma^2 \left( \frac{d}{dt} c\gamma \right)^2 - \gamma^2 \left( \frac{d}{dt} [\gamma \mathbf{v}] \right)^2 = -\gamma^4 a^2 - \frac{\gamma^6}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 \quad (10.20)$$

che utilizzando  $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = v^2 a^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2$  si riscrive come

$$\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} = -\gamma^6 a^2 + \frac{\gamma^6}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 \quad (10.21)$$

e quindi la generalizzazione relativistica della formula di Larmor è

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left( a^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 \right) \quad (10.22)$$

Un caso particolare è quello del moto circolare uniforme: in questo caso  $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$  e quindi  $(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2 = a^2 v^2$  e si ha la formula semplificata

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|_{circ} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a^2 \quad (10.23)$$

## Parte III

# Meccanica Quantistica

## 11 Considerazioni generali

L'equazione di Schrodinger per il moto di una particella di massa  $m$  in un campo potenziale  $U(\mathbf{r})$  si scrive

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(t, \mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \psi(t, \mathbf{r}) \quad (11.1)$$

<sup>3</sup>Una analisi molto accurata dei dettagli può essere trovata in [10], in cui si mostra esplicitamente che il quadriimpulso della radiazione è un quadrivettore.

che per uno stato stazionario di energia  $E$ , dopo la sostituzione

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\mathbf{r}) \quad (11.2)$$

diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (11.3)$$

Il modulo quadro della funzione d'onda  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  rappresenta la densità di probabilità di osservare la particella nel punto  $\mathbf{r}$  e vale l'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(\mathbf{r})|^2 + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (11.4)$$

quindi il vettore  $\mathbf{j}$  rappresenta una densità di corrente di probabilità.

L'equazione di Schrodinger Eq. (11.3) può essere utilizzata in due modi diversi:

1. Determinazione dei livelli energetici: è dato un certo potenziale attrattivo e si vogliono determinare le energie degli stati legati. Questo è un problema agli autovalori le cui soluzioni sono le energie  $E_n$  per le quali le soluzioni  $\psi_n$  dell'equazione Eq. (11.3) con  $E = E_n$  soddisfano  $\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty$  (cioè è nulla la probabilità che la particella si allontani all'infinito).
2. Problemi di scattering: sono fissati il potenziale e l'energia. Si considera una particella che arriva dall'infinito con una data energia, interagisce con il potenziale e si riallontana all'infinito con la stessa energia (caso di scattering elastico). Si vogliono determinare le sezioni d'urto differenziale e totale. Nel caso di scattering inelastico le particelle iniziali e finali possono essere diverse (e/o avere energie diverse) ma la struttura generale del problema rimane immutata: si vogliono calcolare le sezioni d'urto dei vari canali.

Consideriamo il caso di una particella libera. In questo caso l'equazione Eq. (11.3) si riscrive semplicemente come

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (11.5)$$

le cui soluzioni sono

$$\psi(\mathbf{r}) = A \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad |\mathbf{k}| = k \quad (11.6)$$

dove  $A$  è una costante e la direzione ed il verso di  $\mathbf{k}$  sono generici: solo il suo modulo è fissato. Nel caso della determinazione dei livelli energetici la costante moltiplicativa  $A$  viene determinata imponendo che la probabilità totale  $\int |\psi|^2 d\mathbf{r}$  sia unitaria. Nel caso dei problemi di scattering il valore di  $A$  corrisponde ad una caratteristica fisica del problema "sperimentale", come vedremo ora.

È immediato calcolare la corrente di densità di probabilità per la soluzione Eq. (11.6) dell'equazione libera, ottenendo

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar A^2}{m} \mathbf{k} \quad |\mathbf{j}| = \frac{\hbar A^2}{m} k = A^2 \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (11.7)$$

Per una particella non relativistica  $\sqrt{2E/m}$  è la velocità  $v$ , quindi la densità di corrente di probabilità è diretta lungo  $\mathbf{k}$  e la sua intensità è  $vA^2$ . Quindi  $A^2 v$  è il numero medio di particelle che passano nell'unità di tempo per una sezione di area unitaria trasversa alla direzione di  $\mathbf{k}$ . In particolare l'onda piana a densità di corrente unitaria è

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{v}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (11.8)$$

o, includendo anche la dipendenza temporale

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}[Et - \mathbf{p}\mathbf{x}]\right) \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (\mathbf{p}^2 = 2mE \quad v = |\mathbf{p}|/m) \quad (11.9)$$

Consideriamo ora il processo di scattering da potenziale nel caso generale di uno spazio tridimensionale: a grande distanza dal centro del potenziale possiamo supporre che la particella incidente sia approssimativamente libera e supponiamo che si muova nella direzione dell'asse  $\hat{z}$ , quindi la sua funzione d'onda sarà approssimativamente  $e^{ikz}$ . D'altra parte la particella scatterata deve pure essere libera a grande distanza dal centro e può quindi essere descritta tramite una onda sferica uscente dal centro  $f(\theta) \exp(ikr)/r$  dove  $\theta$  è l'angolo di scattering, quindi per la funzione d'onda esatta  $\psi(\mathbf{r})$  deve valere

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad r \rightarrow \infty \quad (11.10)$$

e la funzione  $f(\theta)$  è nota come ampiezza di scattering.

Calcoliamo a questo punto la densità di corrente corrispondente alla particella scatterata. È conveniente effettuare il calcolo in coordinate sferiche e si ha per la componente radiale

$$\begin{aligned} j_r &= \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi f^*(\theta) \left[ -ik \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{1}{r^2} e^{-ikr} \right] - \psi^* f(\theta) \left[ ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r^2} e^{ikr} \right] \right) = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left( -\frac{2ik}{r^2} |f(\theta)|^2 \right) = \frac{\hbar k}{mr^2} |f(\theta)|^2 = \frac{v}{r^2} |f(\theta)|^2 \end{aligned} \quad (11.11)$$

la componente  $\phi$  è chiaramente nulla in quanto il problema ha simmetria assiale e la componente  $\theta$  vale

$$j_\theta = \frac{i\hbar}{2m} \left( \psi \frac{1}{r} \partial_\theta \psi^* - \psi^* \frac{1}{r} \partial_\theta \psi \right) = \frac{\hbar}{mr^3} \text{Im} \left[ f \partial_\theta f^* \right] \quad (11.12)$$

da cui si vede che per  $r \rightarrow \infty$  la corrente è diretta radialmente (poichè  $j_r \sim 1/r^2$  mentre  $j_\theta \sim 1/r^3$ ).

Se indichiamo con  $d\omega$  l'angolo solido, il numero di particelle che passano nell'unità di tempo attraverso l'elemento di superficie sferica  $dS = r^2 d\omega$  posto a distanza  $r$  dal centro scatteratore è dato dal flusso di  $\mathbf{j}$  attraverso la superficie, che vale

$$dN = j_r dS = \frac{v}{r^2} |f(\theta)|^2 r^2 d\omega = v |f(\theta)|^2 d\omega \quad (11.13)$$

Se dividiamo questo numero per l'angolo solido e il flusso di particelle incidenti (che vale  $v$ ) otteniamo la sezione d'urto differenziale per lo scattering centrale

$$\frac{d\sigma}{d\omega}(\theta) = |f(\theta)|^2 \quad (11.14)$$

Il problema di scattering può quindi in linea generale essere risolto come segue: una volta fissato il potenziale e l'energia della particella incidente si deve determinare la soluzione dell'equazione di Schrodinger con l'andamento asintotico Eq. (11.10). La sezione d'urto sarà quindi data da Eq. (11.14).

## 12 Sezione d'urto Rutherford

Il calcolo della sezione Rutherford quantistica può essere esattamente svolto seguendo la linea generale esposta nella sezione precedente: si determina la soluzione dell'equazione di Schrodinger per il potenziale coulombiano imponendo che per  $r$  grandi e  $z$  negativi sia asintoticamente della forma  $e^{ikz}$ , dopodichè si considera lo sviluppo asintotico per  $r \rightarrow \infty$  e  $z$  generico della soluzione e per confronto con Eq. (11.10) si ottiene la funzione  $f(\theta)$ , da cui si ricava la sezione d'urto. Questo metodo di calcolo può essere trovato ad es. [5] §135 e risulta essere un esercizio sugli sviluppo asintotici della funzione ipergeometrica confluyente.

Il calcolo più elementare che viene riportato di solito nei libri di testo può essere effettuato utilizzando teoria delle perturbazioni: dalla regola d'oro di Fermi si ricava l'espressione della sezione d'urto nella approssimazione di Born e quindi si applica questa formula al caso coulombiano (vedi

ad es. [5] §126). La formula esatta coincide con quella che si ottiene all'ordine più basso di teoria delle perturbazioni. Per ridurre al minimo le conoscenze di teoria delle perturbazioni necessarie per il calcolo si utilizzerà qui un metodo non molto ortodosso che in parte interpola tra i due metodi precedenti ([5] §45 e §126).

La teoria delle perturbazioni può essere ottenuta nel seguente modo: si moltiplica il potenziale  $U$  per una costante piccola  $\epsilon$  e si sviluppa la funzione d'onda come  $\psi(\mathbf{r}) = \psi^0(\mathbf{r}) + \epsilon\psi^1(\mathbf{r}) + \dots$ . I termini dello sviluppo dovranno essere determinati risolvendo in modo autoconsistente ordine per ordine l'equazione di Schrodinger. All'ordine più basso si può porre  $\epsilon = 0$  e quindi  $\psi^0$  soddisfa l'equazione della particella libera

$$\nabla^2\psi^0(\mathbf{r}) + k^2\psi^0(\mathbf{r}) = 0 \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (12.1)$$

A questo punto è necessario considerare il primo ordine in  $\epsilon$ : inseriamo lo sviluppo di  $\psi$  fino al primo ordine nell'equazione di Schrodinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2[\psi^0 + \epsilon\psi^1] + \epsilon U[\psi^0 + \epsilon\psi^1] = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}[\psi^0 + \epsilon\psi^1] \quad (12.2)$$

Per il termine  $O(\epsilon)$  si ottiene quindi l'equazione

$$\nabla^2\psi^1(\mathbf{r}) + k^2\psi^1(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}U(\mathbf{r})\psi^0(\mathbf{r}) \quad (12.3)$$

dove  $\psi^0$  è la soluzione di Eq. (12.1).

Vediamo ora come questa equazione possa essere riscritta nella forma dell'equazione dei potenziali ritardati Eq. (9.3): introduciamo

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{\pm iktc}\psi^1(\mathbf{r}) \quad (12.4)$$

dove la determinazione del segno corretto dovrà essere effettuata alla fine del ragionamento. Questa funzione soddisfa evidentemente

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(t, \mathbf{r}) = -k^2\Psi(t, \mathbf{r}) \quad (12.5)$$

ed usando Eq. (12.3) si vede subito che soddisfa quindi

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(t, \mathbf{r}) - \nabla^2\Psi(t, \mathbf{r}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{r}) \quad \rho(t, \mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}U(\mathbf{r})\psi^0(\mathbf{r})e^{\pm iktc} \quad (12.6)$$

Si può a questo punto utilizzare la soluzione Eq. (9.19) (definiamo per semplicità  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ ) e ottenere

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \int \frac{1}{R}\rho\left(t - \frac{R}{c}, \mathbf{r}_0\right) d\mathbf{r}_0 = e^{\pm iktc} \left[ -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{1}{R}U(\mathbf{r}_0)\psi^0(\mathbf{r}_0)e^{\mp ikR} d\mathbf{r}_0 \right] \quad (12.7)$$

da cui si ha subito

$$\psi^1(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{1}{R}U(\mathbf{r}_0)\psi^0(\mathbf{r}_0)e^{\mp ikR} d\mathbf{r}_0 \quad (12.8)$$

(Per le condizioni di validità delle approssimazioni effettuate vedi ad es. [5] §45).

Consideriamo ora il caso in cui la soluzione dell'equazione libera  $\psi^0$  sia data da  $\psi^0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . La soluzione del problema di scattering all'ordine più basso di teoria delle perturbazioni è allora data da

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{1}{R}U(\mathbf{r}_0)e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_0}e^{\mp ikR} d\mathbf{r}_0 \quad (12.9)$$

dove il segno del secondo termine deve essere determinato imponendo che la soluzione a grande distanza dall'origine sia una onda uscente, quindi il segno corretto è il segno + e si ha

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{1}{R}U(\mathbf{r}_0)e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_0 + kR)} d\mathbf{r}_0 \quad (12.10)$$

Dallo sviluppo asintotico per  $r \rightarrow \infty$  del secondo termine otterremo la funzione  $f(\theta)$ . Utilizzando

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| &\sim |\mathbf{r}| - \mathbf{r}_0 \mathbf{n} & \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \\ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &\sim \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}|^2} \right) \end{aligned} \quad (12.11)$$

otteniamo

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \int U(\mathbf{r}_0) e^{i\mathbf{r}_0(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} d\mathbf{r}_0 \quad (12.12)$$

dove  $\mathbf{k}' = k\mathbf{n}$  è l'impulso della particella scatterata. Se introduciamo il vettore  $\mathbf{q}$  rappresentante l'impulso trasferito

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \quad |\mathbf{q}| = 2|\mathbf{k}| \sin \frac{\theta}{2} \quad q^2 = \frac{8mE}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\theta = \text{angolo di scattering}) \quad (12.13)$$

dal confronto con l'equazione Eq. (11.10) si ottiene subito per l'ampiezza di scattering l'espressione

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int U(\mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 \quad (12.14)$$

che è la ampiezza di scattering calcolata al primo ordine di teoria delle perturbazioni (approssimazione di Born) e quindi la sezione d'urto differenziale

$$\frac{d\sigma}{d\omega}(\mathbf{q}) = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int U(\mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 \right|^2 \quad (12.15)$$

Consideriamo finalmente il caso di un potenziale coulombiano  $U(\mathbf{r}) = \alpha/r$ . Per utilizzare le formule precedenti è necessario calcolare la trasformata di Fourier di  $1/r$ , che si ottiene semplicemente partendo dall'identità

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (12.16)$$

(che si può ottenere dalla soluzione dell'equazione Eq. (9.3) per  $\rho(t, \mathbf{r}) = \delta^3(\mathbf{r})$ ). In trasformata di Fourier questa identità diventa

$$-\mathbf{q}^2 F\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \quad \Rightarrow \quad F\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|^2} \quad (12.17)$$

quindi (un altro modo di procedere è fare il calcolo con  $\frac{\alpha}{r} e^{-\mu r}$  ed alla fine mandare  $\mu \rightarrow 0$ , vedi dopo)

$$\int U(\mathbf{r}_0) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0} d\mathbf{r}_0 = \frac{4\pi\alpha}{|\mathbf{q}|^2} = \frac{\pi\alpha}{k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (12.18)$$

da cui si ottiene la sezione d'urto Rutherford

$$\frac{d\sigma}{d\omega}(\theta) = \frac{m^2\alpha^2}{4\hbar^4 k^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (12.19)$$

Nel caso in cui il potenziale del centro scatteratore non sia generato da una carica puntiforme ma da una distribuzione di carica  $\rho(\mathbf{r})$ , il potenziale è dato dalla convoluzione  $U = \rho * \frac{1}{r}$  e poichè per la trasformata di Fourier vale

$$F(f * g) = F(f)F(g) \quad (12.20)$$

nel caso non puntiforme la sezione d'urto Rutherford diventa

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\omega}(\theta) = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2 \quad (12.21)$$

dove  $\tilde{\rho}$  è la trasformata di Fourier della distribuzione di carica.

La formula Eq. (12.15) può chiaramente essere utilizzata anche per potenziali diversi dal coulombiano. Ad esempio si può utilizzare il potenziale di Yukawa

$$U(\mathbf{r}) = \alpha \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad m_\pi c^2 \sim 135 \text{ MeV} \quad (12.22)$$

Per il caso generico di un potenziale centrale si ha

$$\begin{aligned} \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} &= \int U(r) e^{-iqr \cos \theta} r^2 dr d\cos \theta d\phi = \\ &= 2\pi \int_0^\infty r^2 U(r) dr \int_{-1}^1 e^{-iqr \cos \theta} d\cos \theta = 2\pi \int_0^\infty r U(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr = \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r U(r) \sin(qr) dr \end{aligned} \quad (12.23)$$

e nel caso particolare  $U(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\mu r}$  si ottiene

$$\begin{aligned} \int U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d\mathbf{r} &= \frac{2\pi\alpha}{iq} \left( \int_0^\infty e^{-\mu r + iqr} dr - \int_0^\infty e^{-\mu r - iqr} dr \right) = \\ &= \frac{2\pi\alpha}{iq} \left( \frac{-1}{-\mu + iq} - \frac{-1}{-\mu - iq} \right) = \frac{4\pi\alpha}{\mu^2 + q^2} \end{aligned} \quad (12.24)$$

La sezione d'urto differenziale è quindi data da

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{4m^2\alpha^2}{\hbar^4} \frac{1}{(q^2 + \mu^2)^2} = \frac{4m^2\alpha^2}{(8mE \sin^2 \frac{\theta}{2} + (m_\pi c)^2)^2} \quad (12.25)$$

da cui si vede che se  $E \ll \frac{m_\pi}{8m} m_\pi c^2$  la sezione d'urto è isotropa mentre nel limite opposto si riottiene la sezione d'urto Rutherford.

## Parte IV

# Fisica nucleare

## 13 Cenni sulla forza tensoriale

Se indichiamo con i pedici 1 e 2 le due particelle interagenti, il termine tensoriale della forza nucleare si scrive come

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} (\vec{\sigma}_1 \mathbf{r})(\vec{\sigma}_2 \mathbf{r}) - \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \quad (13.1)$$

dove

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_1 &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ per la particella 1} \\ \vec{\sigma}_2 &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \text{ per la particella 2} \end{aligned} \quad (13.2)$$

Introduciamo lo spin totale  $\mathbf{S}$ , il momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$  ed il momento totale  $\mathbf{J}$  come

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad \mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} \quad (13.3)$$

Utilizzando il fatto che  $\vec{\sigma}_1$  e  $\vec{\sigma}_2$  commutano (poichè agiscono su particelle diverse) e  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$  si ottiene subito

$$\mathbf{S}^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 \quad (13.4)$$

Usando invece

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (13.5)$$

si ottiene

$$(\vec{\sigma} \mathbf{r})^2 = \sigma_i r_i \sigma_j r_j = r^2 \quad (13.6)$$

e quindi

$$(\mathbf{S} \mathbf{r})^2 = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} (\vec{\sigma}_1 \mathbf{r}) (\vec{\sigma}_2 \mathbf{r}) \quad (13.7)$$

Dalle equazioni Eq. (13.4) e Eq. (13.7) si ottiene subito

$$S_{12} = \frac{6}{r^2} (\mathbf{S} \mathbf{r})^2 - 2 \mathbf{S}^2 \quad (13.8)$$

Analizziamo ora le proprietà di commutazione di  $S_{12}$  con  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{J}$ . Le relazioni fondamentali che si useranno sono

$$[S_i, S_j] = i \epsilon_{ijk} S_k \quad [L_i, r_j] = i \epsilon_{ijk} r_k \quad [S_i, L_j] = 0 \quad [S_i, r_j] = 0 \quad (13.9)$$

servirà inoltre usare le semplici identità

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (13.10)$$

Cominciamo con il notare che  $[\mathbf{S}^2, S_j] = 0$ , infatti

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}^2, S_j] &= [S_i S_i, S_j] = S_i [S_i, S_j] + [S_i, S_j] S_i = \\ &= S_i i \epsilon_{ijk} S_k + i \epsilon_{ijk} S_k S_i = i \epsilon_{ijk} (S_i S_k + S_k S_i) = 0 \end{aligned} \quad (13.11)$$

Utilizzando le relazioni Eq. (13.11) e Eq. (13.8) si vede subito che  $[S_{12}, \mathbf{S}^2] = 0$  mentre  $[S_{12}, \mathbf{S}] \neq 0$ , infatti

$$\begin{aligned} [S_{12}, S_\alpha] &= \frac{6}{r^2} [S_i S_j, S_\alpha] r_i r_j = \frac{6}{r^2} \left\{ S_i [S_j, S_\alpha] + [S_i, S_\alpha] S_j \right\} r_i r_j = \\ &= \frac{6}{r^2} \left\{ i S_i \epsilon_{j\alpha k} S_k + i \epsilon_{i\alpha k} S_k S_j \right\} r_i r_j = i \frac{6}{r^2} (\mathbf{S} \mathbf{r}) \epsilon_{i\alpha k} r_i S_k + i \frac{6}{r^2} \epsilon_{i\alpha k} r_i S_k (\mathbf{S} \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (13.12)$$

Consideriamo ora le regole di commutazione con  $\mathbf{L}$ : in modo identico a Eq. (13.10) si vede che  $[\mathbf{L}, r^2] = 0$ . Da questo segue che

$$[\mathbf{L}, f(r^2)A] = f(r^2)[\mathbf{L}, A] \quad (13.13)$$

per ogni operatore  $A$ . Quindi

$$\begin{aligned} [S_{12}, L_\alpha] &= \frac{6}{r^2} S_i S_j [r_i r_j, L_\alpha] = \frac{6}{r^2} S_i S_j \left\{ r_i [r_j, L_\alpha] + [r_i, L_\alpha] r_j \right\} = \\ &= \frac{6}{r^2} S_i S_j \left\{ i r_i \epsilon_{j\alpha k} r_k + i \epsilon_{i\alpha k} r_k r_j \right\} = i \frac{6}{r^2} (\mathbf{S} \mathbf{r}) \epsilon_{i\alpha k} r_k S_i + i \frac{6}{r^2} \epsilon_{i\alpha k} r_k S_i (\mathbf{S} \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Sommando questa equazione con Eq. (13.12) si ottiene

$$[S_{12}, S_\alpha + L_\alpha] = i \frac{6}{r^2} (\mathbf{S} \mathbf{r}) \epsilon_{i\alpha k} (r_k S_i + r_i S_k) + i \frac{6}{r^2} \epsilon_{i\alpha k} (r_k S_i + r_i S_k) (\mathbf{S} \mathbf{r}) = 0 \quad (13.15)$$

cioè  $[S_{12}, \mathbf{J}] = 0$  e a fortiori  $[S_{12}, \mathbf{J}^2] = 0$ . Un calcolo esplicito mostra che  $[S_{12}, \mathbf{L}^2] \neq 0$ .

## Riferimenti bibliografici

- [1] A. Einstein “Il significato della relatività” Newton (1997).
- [2] S. Weinberg “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity” John Wiley & Sons (1972).
- [3] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, A. T. Fomenko “Geometria contemporanea 1” Editori Riuniti (1999).
- [4] Y. Ohnuki “Unitary representations of the Poincaré group and relativistic wave equations” World Scientific (1988).
- [5] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Meccanica quantistica, teoria non relativistica” Editori Riuniti (2003).
- [6] T. W. B. Kibble Phys. Rev. **117**, 1159 (1960).
- [7] R. Hagedorn “Relativistic kinematics”, Benjamin (1964).
- [8] L. D. Landau, E. M. Lifshits “Teoria quantistica relativistica”, Editori Riuniti (2004).
- [9] M. Schwartz “Principles of electrodynamics” Dover (1987).
- [10] F. Rohrlich “Classical Charged Particles” World Scientific (2007).