A3 - Coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche

A3.1 Sistemi di coordinate curvilinee

Un sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3) nello spazio $\mathbf{R}^3$ è definito, con riferimento ad un sistema cartesiano, da 3 funzioni scalari del tipo:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{cases}$$

Le 3 funzioni scalari sopra scritte, o, in alternativa, la funzione vettoriale:

$$\mathbf{u}: \quad (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \rightarrow (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$$

costituiscono un *cambiamento di coordinate*.

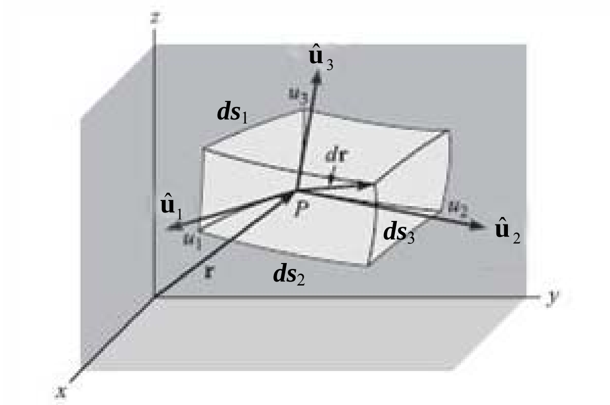

Figura 1 – Generico sistema di coordinate curvilinee

Chiameremo ***superfici coordinate*** le superfici di equazioni:

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_2(x, y, z) = c_2 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}$$

dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti arbitrarie.
Si osservi che su una superficie coordinata variano solo 2 coordinate. Ad esempio, sulla superficie coordinata u_2=c_2 variano solo le coordinate u_1 e u_3, mentre u_2 è fissata.

Chiameremo ***linee coordinate*** le 3 linee che si ottengono intersecando a due a due le 3 superfici coordinate. Lungo tali linee varia solo una coordinata. Ad esempio, la linea coordinata associata alla coordinata u_1 è definita dall'intersezione delle superfici coordinate u_2=c_2 e u_3=c_3: lungo tale linea varia solo la coordinata u_1, mentre u_2 e u_3 sono fissate.

Si definiscono poi i versori fondamentali $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ e $\hat{\mathbf{u}}_3$ relativi al generico punto P di coordinate (u_1, u_2, u_3): essi sono i versori tangenti alle tre linee coordinate passanti per P, nel punto P stesso.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{P}) = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) \\ \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{P}) = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) \\ \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{P}) = \hat{\mathbf{u}}_1(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) \end{cases}$$

I versori dunque sono in generale funzioni del punto (e in particolare delle coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3), cioè la loro direzione e verso variano da punto a punto. Si noti la differenza rispetto alle coordinate cartesiane, dove i versori fondamentali sono costanti, cioè hanno sempre la stessa direzione e lo stesso verso.

Si consideri ora la funzione vettoriale:

$$\mathbf{r} = x(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_x + y(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_y + z(u_1, u_2, u_3)\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

che chiameremo *cambiamento di coordinate inverso*.

Differenziando questa funzione si ha:

$$d\,\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3$$

Le grandezze vettoriali $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ costituiscono una ***base*** (in generale non ortogonale) per il sistema di coordinate curvilinee considerato. Tali vettori non sono necessariamente a norma unitaria, tuttavia si può dimostrare facilmente che il generico vettore $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}$ risulta essere *tangente* alla i-esima linea coordinata. Perciò i vettori $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$ sono paralleli ai rispettivi versori fondamentali a meno di un fattore di scala. Risulta pertanto:

$$d\,\mathbf{r} = h_1\,\hat{\mathbf{u}}_1\,du_1 + h_2\,\hat{\mathbf{u}}_2\,du_2 + h_3\,\hat{\mathbf{u}}_3\,du_3$$

e quindi:

$$h_i \hat{\mathbf{u}}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{u}}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \qquad i = 1,2,3} \tag{1}$$

dove:

$$h_i = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \qquad i = 1,2,3 \tag{2}$$

Le quantità h_i sono dette ***coefficienti metrici***.
Mediante tali formule è possibile ricavare facilmente le espressioni dei versori fondamentali in funzione delle coordinate curvilinee del punto P.

Un sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3), si dice *ortogonale* se i versori $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ e $\hat{\mathbf{u}}_3$ sono mutuamente ortogonali in ogni punto. Se tale condizione è verificata, i versori fondamentali costituiscono quindi una *base ortonormale* per il sistema di coordinate curvilinee considerato Se inoltre tali versori formano nell'ordine una terna ortonormale destrorsa, cioè risulta:

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3$$

si parlerà di *sistema ortogonale destrorso*.

In un sistema di coordinate curvilinee *ortogonali*, il generico versore fondamentale $\hat{\mathbf{u}}_i$ risulta essere sempre ortogonale alla superficie coordinata di equazione u_i = costante. In altri termini:

$$\hat{\mathbf{u}}_i \perp (\mathrm{u}_\mathrm{i} = c_i) \qquad \mathrm{i} = 1,2,3$$

Ciò suggerisce un metodo alternativo per la determinazione dei versori fondamentali. Infatti, è noto dall'analisi che il *gradiente* della funzione scalare $u_i = u_i(x, y, z)$ è sempre ortogonale, per definizione, alla superficie u_i = costante. E' quindi immediato concludere che risulta:

$$\hat{\mathbf{u}}_\mathrm{i} = \frac{\nabla u_i(x, y, z)}{\|\nabla u_i(x, y, z)\|} \qquad \mathrm{i} = 1,2,3 \tag{3}$$

Le formule (3) possono essere quindi impiegate, solamente per sistemi di coordinate curvilinee *ortogonali*, per la determinazione dei versori fondamentali, in alternativa alle (1).

Il sistema fondamentale di versori $\hat{\mathbf{u}}_1$, $\hat{\mathbf{u}}_2$ e $\hat{\mathbf{u}}_3$ è particolarmente importante perché mediante esso si possono ricavare le ***componenti*** di un generico vettore dello spazio rispetto al sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3).
Le ***componenti*** di un vettore **v** nel riferimento ortogonale definito dai versori $(\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3)$ si ottengono proiettando tale vettore lungo ciascuno dei versori fondamentali:

$$\boxed{\mathrm{v}_\mathrm{i} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3) \qquad \mathrm{i} = 1,2,3} \tag{4}$$

In un sistema ortogonale generico, se si incrementa la coordinata u_i di una quantità infinitesima du_i, senza variare le altre due coordinate, il punto P si sposterà di un arco elementare di lunghezza ds_i, in generale non uguale a du_i (come in coordinate cartesiane), ma <u>ad esso proporzionale.</u> Chiameremo ds_1,ds_2,ds_3 gli *archi elementari* lungo le 3 linee coordinate.
Si può dimostrare che i coefficienti di proporzionalità sono ancora una volta i coefficienti metrici definiti precedentemente:

$$d\mathrm{s}_i = h_i d\mathrm{u}_i \qquad \mathrm{i} = 1,2,3 \tag{5}$$

I 3 archi individuano una *cella elementare*, o parallelepipedo elementare (si veda la figura 1), di cui essi formano i 3 spigoli. L'arco elementare *totale* nell'intorno del punto P risulta quindi :

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^3} = \sqrt{h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2}$$

ed è pari, ovviamente, alla lunghezza della diagonale del parallelepipedo elementare.
Le facce del parallelepipedo che giacciono sulla superficie definita dagli archi s_1,s_2,s_3 hanno area, rispettivamente:

$$\begin{cases} d\mathrm{S}_1 = ds_2 ds_3 = h_2 h_3 d\mathrm{u}_2 d\mathrm{u}_3 \\ d\mathrm{S}_2 = ds_1 ds_3 = h_1 h_3 d\mathrm{u}_1 d\mathrm{u}_3 \\ d\mathrm{S}_3 = ds_1 ds_2 = h_1 h_2 d\mathrm{u}_1 d\mathrm{u}_2 \end{cases} \tag{6}$$

Infine il volume del parallelepipedo elementare sarà:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \qquad (7)$$

La formula (7) è particolarmente utile nella risoluzione di integrali di volume, come si vedrà nel seguito:

$$\int_V f(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)\, dV$$

Si può dimostrare che un'espressione per il volume del parallelepipedo elementare equivalente alla (7) è la seguente:

$$dV = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1 du_2 du_3 =$$

$$= \left| h_1 du_1 \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot h_2 du_2 \hat{\mathbf{u}}_2 \times h_3 du_3 \hat{\mathbf{u}}_3 \right| du_1 du_2 du_3 = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3$$

dove $\left| \partial(x, y, z) / \partial(u_1, u_2, u_3) \right|$ è il determinante Jacobiano associato alla trasformazione di coordinate **r**. Per quanto appena detto deve risultare, ovviamente: $\left| \partial(x, y, z) / \partial(u_1, u_2, u_3) \right| = h_1 h_2 h_3$. L'elemento di volume può essere quindi determinato in 3 diversi modi, tutti equivalenti:

- Calcolando il prodotto dei coefficienti metrici $h_1 h_2 h_3$.
- Calcolando il prodotto vettoriale triplo $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}$
- Calcolando il determinante: $\begin{vmatrix} \partial \mathrm{x}/\partial \mathrm{u}_1 & \partial \mathrm{y}/\partial \mathrm{u}_1 & \partial \mathrm{z}/\partial \mathrm{u}_1 \\ \partial \mathrm{x}/\partial \mathrm{u}_2 & \partial \mathrm{y}/\partial \mathrm{u}_2 & \partial \mathrm{z}/\partial \mathrm{u}_2 \\ \partial \mathrm{x}/\partial \mathrm{u}_3 & \partial \mathrm{y}/\partial \mathrm{u}_3 & \partial \mathrm{z}/\partial u_3 \end{vmatrix} = \left| \bar{\mathrm{J}}(\mathbf{r}) \right|$

Esempi particolari di coordinate curvilinee ortogonali (destrorse) sono ovviamente quelle cartesiane rettangolari, le coordinate cilindriche e quelle sferiche. Tali sistemi di coordinate sono i più usati nelle applicazioni.

Nel caso delle coordinate cartesiane si ha, banalmente:
$u_1 = x$; $u_2 = y$; $u_3 = z$
I coefficienti metrici risultano ovviamente tutti unitari:

$$h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = 1 \quad ; \quad h_3 = 1$$

A3.2 Sistema di coordinate cilindriche

Si ha (vedi figura 2):

$$u_1 = \rho \quad ; \quad u_2 = \Phi \quad ; \quad u_3 = z$$

ρ è il modulo della proiezione su un piano z = cost del raggio vettore che individua il generico punto P. ϕ è l'angolo in radianti che tale proiezione forma con l'asse x, misurato in senso antiorario. z coincide con l'omonima coordinata cartesiana.

ϕ è detta *azimut* o longitudine, z è detta *quota*.

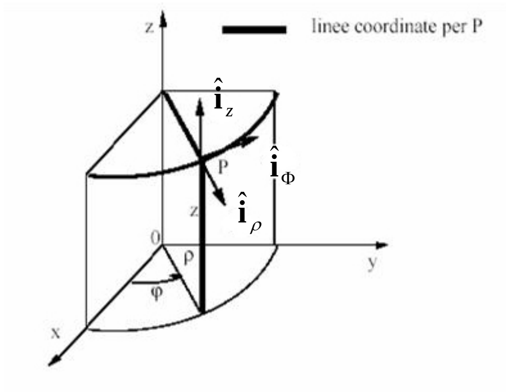

Figura 2 – Linee coordinate e versori fondamentali del sistema di coordinate cilindriche

Le formule per il cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} & (0 \le \rho < +\infty) \\ \Phi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) & (0 \le \Phi < 2\pi) \\ \mathrm{z} = \mathrm{z} \end{cases}$$

Valgono inoltre le trasformazioni inverse:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\Phi \\ y = \rho\sin\Phi \\ z = z \end{cases}$$

Le superfici coordinate sono, rispettivamente (si veda la figura 2): dei cilindri a sezione circolare aventi per asse l’asse z (ρ = cost.), dei semipiani verticali passanti per l’asse z (ϕ = cost.) e dei piani orizzontali, cioè ortogonali all’asse z (z = cost.). Le linee coordinate sono, nell’ordine, delle semirette sul piano xy passanti per l’origine e per il generico punto P, delle circonferenze sul piano xy centrate nell’origine e passanti per P (aventi raggio pari a ρ), e delle rette parallele all’asse z. La coordinata ρ viene spesso indicata anche con r. Le coordinate cilindriche costituiscono un sistema di coordinate curvilinee *ortogonali*, e i coefficienti metrici assumono i valori:

$$h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = \rho \quad ; \quad h_3 = 1$$

Mediante considerazioni geometriche, oppure utilizzando le formule (1) e (3), si possono ricavare le componenti cartesiane dei versori cilindrici in funzione delle coordinate (ρ,ϕ,z). Si ha:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_\rho = \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi = -\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \\ \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} = \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \end{cases}$$

Le relazioni inverse sono:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_x = \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\rho - \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + 0\,\hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_y = \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\rho + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + 0\,\hat{\mathbf{i}}_z \\ \hat{\mathbf{i}}_z = \hat{\mathbf{i}}_z \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_\rho \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x \\ \hat{\mathbf{i}}_y \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{bmatrix}$$

Inversamente:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x \\ \hat{\mathbf{i}}_y \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}}_\rho \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{bmatrix}$$

Osservando la figura 2, è facile notare che i versori fondamentali sopra definiti soddisfano i requisiti tipici dei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Si consideri ad esempio il versore $\hat{\mathbf{i}}_\Phi$: esso è tangente alla seconda linea coordinata, cioè alla circonferenza sul piano xy centrata nell'origine e passante per P, e ortogonale alla superficie ϕ=cost., cioè al semipiano verticale passante per l'origine e per P.

L'elemento di volume in coordinate cilindriche (si veda la figura 3) è:

$$dV = h_1 d\rho\, h_2 d\Phi\, h_3 dz = \rho\, d\rho\, d\Phi\, dz$$

mentre l'elemento di superficie cilindrica è:

$$dS = dS_1 = ds_2 ds_3 = h_2 d\Phi\, h_3 dz = \rho\, d\Phi\, dz$$

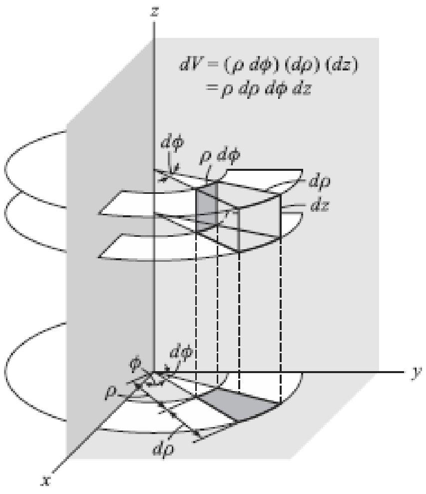

Figura 3 – Elemento di volume in coordinate cilindriche

Sia **u** un generico vettore applicato in P, espresso mediante le sue componenti cartesiane:

$$\mathbf{u} = u_x\,\hat{\mathbf{i}}_x + u_y\,\hat{\mathbf{i}}_y + u_z\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

Attraverso le (4) si possono ottenere facilmente le componenti di **u** nel sistema di riferimento cilindrico (u_ρ, u_Φ, u_z). In forma vettoriale si ha:

$$\mathbf{u} = u_\rho\,\hat{\mathbf{i}}_\rho + u_\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + u_z\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

Tutte le operazioni vettoriali introdotte nei capitoli precedenti, con riferimento ai sistemi cartesiani, si possono facilmente estendere ai sistemi di coordinate curvilinee ortogonali, e in particolare alle coordinate cilindriche. Si considerino infatti 2 vettori **u** e **v** le cui componenti sono espresse nel riferimento cilindrico. Ad esempio, per il prodotto scalare risulta:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_\rho v_\rho + u_\Phi v_\Phi + u_z v_z$$

e per il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_\rho & \hat{\mathbf{i}}_\Phi & \hat{\mathbf{i}}_z \\ u_\rho & u_\Phi & u_z \\ v_\rho & v_\Phi & v_z \end{vmatrix} = (u_\Phi v_z - u_z v_\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\rho + (u_z v_\rho - u_\rho v_z)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi + (u_\rho v_\Phi - u_\Phi v_\rho)\,\hat{\mathbf{i}}_z$$

A3.3 Sistema di coordinate sferiche (o polari nello spazio)

Si ha (vedi figura 4):

$$u_1 = r \quad ; \quad u_2 = \theta \quad ; \quad u_3 = \phi$$

In questo caso r è il modulo del raggio vettore che individua il generico punto P, e non la sua proiezione su un piano z = cost, come nel caso delle coordinate cilindriche. θ è detta *elevazione* o *colatitudine*, mentre ϕ è ancora l'*azimut* o longitudine, come in coordinate cilindriche.

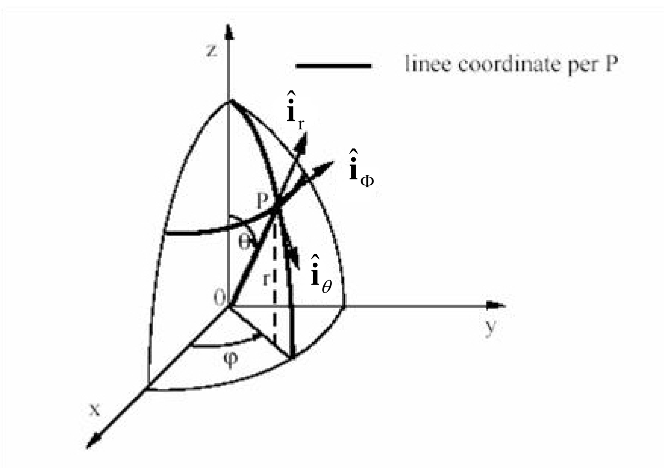

Figura 4 - Linee coordinate e versori fondamentali del sistema di coordinate sferiche

Le formule per il cambiamento di coordinate sono:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & (0 \le \mathrm{r} < +\infty) \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2}}{z}\right) & (0 \le \theta \le \pi) \\ \Phi = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) & (0 \le \Phi < 2\pi) \end{cases}$$

Valgono poi le formule inverse:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\Phi \\ y = r\sin\theta\sin\Phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le superfici coordinate sono, rispettivamente (vedi figura 4): delle sfere centrate nell'origine (r = cost.), dei coni aventi come vertice l'origine e per asse l'asse z (θ = cost.), e dei semipiani verticali passanti per l'asse z (ϕ = cost.). Le linee coordinate sono, nell'ordine, delle semirette passanti per l'origine e per il generico punto P, delle circonferenze centrate nell'origine passanti per P e per l'asse z (aventi raggio pari a r), e delle circonferenze sul piano xy centrate nell'origine e passanti per P (aventi raggio pari a r sinθ). Si osservi che, qualora la coordinata r risulti costante, gli insiemi di circonferenze verticali e orizzontali che si ottengono al variare di θ e ϕ coincidono con i meridiani e i paralleli del riferimento geografico terrestre. Le coordinate sferiche costituiscono un sistema di coordinate curvilinee *ortogonali*, e i coefficienti metrici assumono i valori:

$$h_1 = 1 \quad ; \quad h_2 = r \quad ; \quad h_3 = r\sin\theta$$

Mediante considerazioni geometriche, o tramite le formule (1) e (3), si possono ricavare le componenti cartesiane dei versori sferici in funzione delle coordinate (r,θ,ϕ).
Si ha:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{r} = \sin\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \sin\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \\ \hat{\mathbf{i}}_\theta = \cos\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \cos\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi = -\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} \end{cases}$$

Relazioni inverse:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{x} = \sin\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{r} + \cos\theta\cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\theta - \sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{y} = \sin\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{r} + \cos\theta\sin\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + \cos\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ \hat{\mathbf{i}}_\mathrm{z} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\mathrm{r} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + 0\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}_r \\ \hat{\mathbf{i}}_\theta \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\Phi & \sin\theta\sin\Phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\Phi & \cos\theta\sin\Phi & -\sin\theta \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x \\ \hat{\mathbf{i}}_y \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{pmatrix}$$

Inversamente:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}_x \\ \hat{\mathbf{i}}_y \\ \hat{\mathbf{i}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\Phi & \cos\theta\cos\Phi & -\sin\Phi \\ \sin\theta\sin\Phi & \cos\theta\sin\Phi & \cos\Phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}}_r \\ \hat{\mathbf{i}}_\theta \\ \hat{\mathbf{i}}_\Phi \end{pmatrix}$$

Osservando la figura 4, è facile notare che i versori fondamentali sopra definiti soddisfano i requisiti tipici dei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali. Si consideri ad esempio il versore $\hat{\mathbf{i}}_r$: esso è tangente alla prima linea coordinata, cioè al segmento che congiunge l'origine con il punto P, e ortogonale alla superficie r = cost., cioè alla sfera centrata nell'origine passante per P.

L'elemento di volume in coordinate sferiche (si veda la figura 5) è:

$$dV = h_1 dr\, h_2 d\theta\, h_3 d\Phi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi$$

mentre l'elemento di superficie sferica è:

$$dS = dS_1 = ds_2 ds_3 = h_2 d\theta\, h_3 d\Phi = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\Phi$$

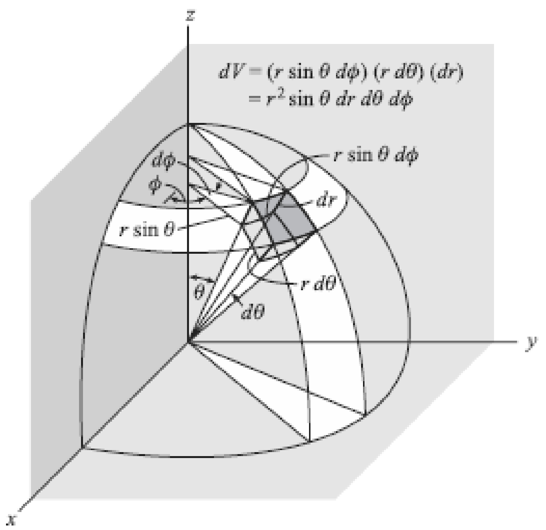

Figura 5 – Elemento di volume in coordinate sferiche

Anche in questo caso, mediante la conoscenza dei versori sferici e le relazioni (4) è possibile esprimere le componenti del generico vettore **u** nel sistema di riferimento sferico:

$$\mathbf{u} = u_r\,\hat{\mathbf{i}}_r + u_\theta\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + u_\Phi\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi$$

Prodotto scalare:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_r v_r + u_\theta v_\theta + u_\Phi v_\Phi$$

Prodotto vettoriale:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}}_r & \hat{\mathbf{i}}_\theta & \hat{\mathbf{i}}_\Phi \\ u_r & u_\theta & u_\Phi \\ v_r & v_\theta & v_\Phi \end{vmatrix} = (u_\theta v_\Phi - u_\Phi v_\theta)\,\hat{\mathbf{i}}_r + (u_\Phi v_r - u_r v_\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\theta + (u_r v_\theta - u_\theta v_r)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi$$

A3.4 Considerazioni conclusive

Concludiamo questo capitolo con alcune importanti osservazioni:

1) E' importante non fare confusione fra le ***coordinate*** di un punto in un sistema di riferimento curvilineo, e le ***componenti*** di un vettore nel medesimo sistema di riferimento, perché si tratta di concetti completamente diversi. A titolo di esempio, si consideri che le coordinate curvilinee possono essere coordinate angolari (es. θ e ϕ dei sistemi sferico e cilindrico), mentre le componenti di un vettore per definizione sono sempre delle lunghezze.

2) Si è detto che nel sistema cartesiano direzione e verso dei versori fondamentali non variano con il punto, pertanto per comodità essi possono essere pensati fissi ed applicati nell'origine. Come conseguenza di ciò, un generico vettore in componenti cartesiane può pensarsi applicato in un qualunque punto dello spazio, ed in particolare nell'origine, poiché le sue componenti non variano con il punto. Questo non è vero per un generico sistema di coordinate curvilinee! In generale, infatti, tanto i versori fondamentali quanto le componenti del vettore sono funzione del punto di applicazione P = (u_1,u_2,u_3) del vettore. In formule:

$$\mathbf{v} = v_1(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_1(u_1,u_2,u_3) + v_2(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_2(u_1,u_2,u_3) + v_3(u_1,u_2,u_3)\,\hat{\mathbf{u}}_3(u_1,u_2,u_3)$$

Ad esempio, nel sistema di riferimento cilindrico si ha:

$$\mathbf{v} = v_\rho(\Phi)\hat{\mathbf{i}}_\rho(\Phi) + v_\Phi(\Phi)\hat{\mathbf{i}}_\Phi(\Phi) + v_z(\Phi)\hat{\mathbf{i}}_z(\Phi)$$

e nel sistema di riferimento sferico:

$$\mathbf{v} = v_r(\theta,\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_r(\theta,\Phi) + v_\theta(\theta,\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\theta(\theta,\Phi) + v_\Phi(\Phi)\,\hat{\mathbf{i}}_\Phi(\Phi)$$

3) Si osservi che sia le coordinate cilindriche sia quelle sferiche non sono definite per i punti appartenenti all'asse z. In particolare, esse ***non sono definite nell'origine*** (poiché gli angoli θ e ϕ sono indeterminati): come conseguenza, nemmeno i versori fondamentali sono definiti, per cui in questi sistemi non ha senso pensare i vettori applicati nell'origine, come si fa usualmente per le coordinate cartesiane. In qualche caso, può essere comodo esprimere un vettore mediante un riferimento curvilineo ortogonale anche in punti in cui una o più coordinate non sono definite, assegnando ad esse dei valori arbitrari. Si pensi, ad esempio, al riferimento sferico: se si vuole esprimere un vettore in componenti sferiche in ***tutti*** i punti di una superficie sferica, occorre considerare il fatto che "ai poli" della sfera i versori $\hat{\mathbf{i}}_\theta$ e $\hat{\mathbf{i}}_\phi$ non sono definiti, poiché ϕ è indeterminato. Si può tuttavia ovviare al problema assumendo, ad esempio, $\phi = 0$. Mediante tale assunzione, i versori $\hat{\mathbf{i}}_\theta$ e $\hat{\mathbf{i}}_\phi$ risultano così definiti ai poli della sfera:

   a. Polo nord: $\hat{\mathbf{i}}_r = \hat{\mathbf{i}}_z \quad ; \quad \hat{\mathbf{i}}_\theta = \hat{\mathbf{i}}_x \quad ; \quad \hat{\mathbf{i}}_\phi = \hat{\mathbf{i}}_y$
   b. Polo sud: $\hat{\mathbf{i}}_r = -\hat{\mathbf{i}}_z \quad ; \quad \hat{\mathbf{i}}_\theta = -\hat{\mathbf{i}}_x \quad ; \quad \hat{\mathbf{i}}_\phi = \hat{\mathbf{i}}_y$