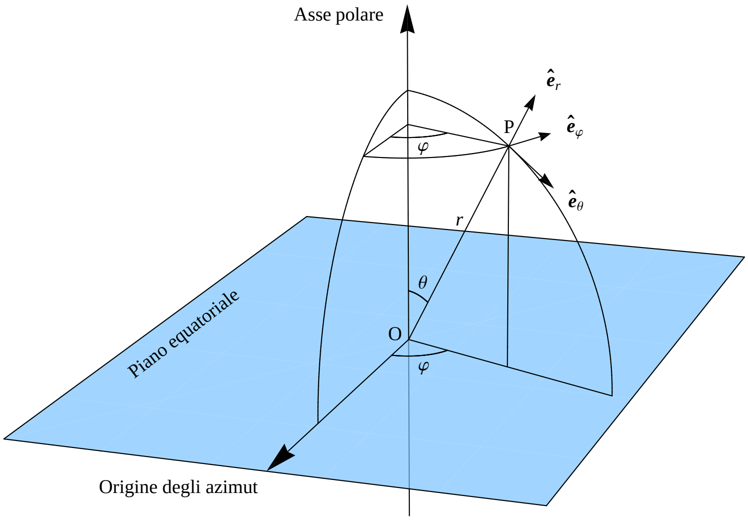
COORDINATE POLARI SFERICHE



La figura illustra la definizione delle coordinate polari sferiche.
Per scegliere un sistema di coordinate polari sferiche è necessario fissare un punto O detto *origine*, una retta orientata passante per O detta *asse polare* e una semiretta uscente da O e ortogonale all'asse polare detta *origine degli azimut*.

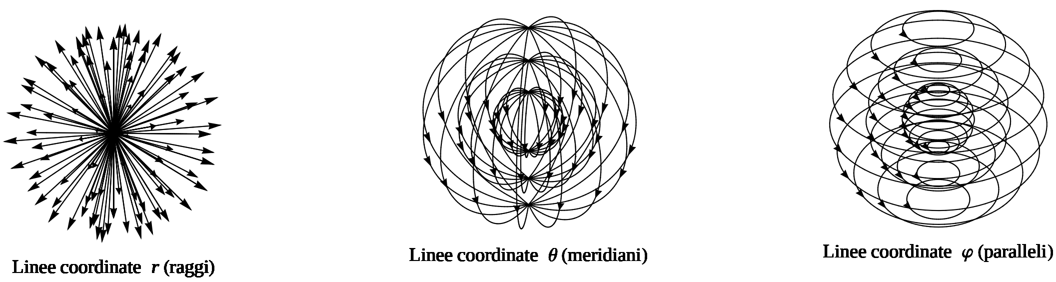
Il *piano equatoriale* è il piano ortogonale all'asse polare e contenente l'origine degli azimut.
Lo *zenit* identifica la direzione e il verso dell'asse polare.
Il semipiano contenente l'asse polare e l'origine degli azimut è spesso usato come utile riferimento e chiamato *semipiano meridiano fondamentale* (oppure *di riferimento* o *zero*); in geografia è il semipiano meridiano di Greenwich.

Fissato il sistema, le coordinate di un punto P sono definite come segue:
1) il *raggio* (oppure *coordinata radiale*) è la distanza del punto P dall'origine O – in figura è indicato con r;
2) l'*angolo polare* (oppure *colatitudine* o *angolo zenitale* o *inclinazione*) è l'angolo tra l'asse polare e il segmento OP – in figura è indicato con θ;
3) l'*azimut* (oppure *angolo azimutale* o *longitudine*) è l'angolo tra l'origine degli azimut e la proiezione sul piano equatoriale del segmento OP. Il verso positivo degli azimut è solitamente scelto come il senso antiorario di rotazione intorno all'asse polare (quadrante dell'orologio orientato dal verso dell'asse polare). L'azimut è anche l'angolo piano corrispondente al diedro formato dal semipiano meridiano fondamentale e dal semipiano definito dall'asse polare e dal punto P (detto semipiano meridiano di P).

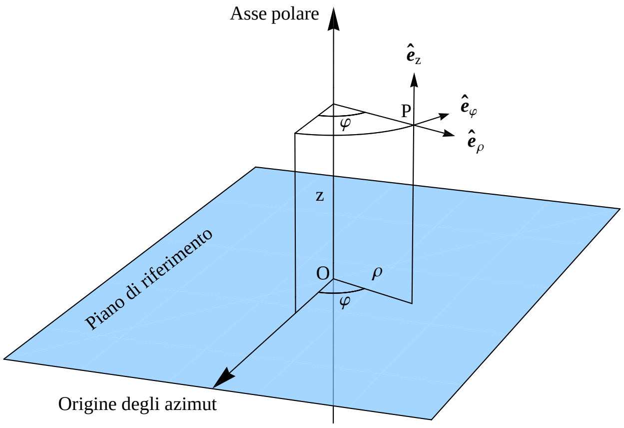
Gli intervalli di definizione delle coordinate sono: $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$
per l'azimut sono spesso usati altri intervalli che coprono l'angolo giro e soprattutto: $-\pi < \varphi \leq \pi$

Si noti che i punti sui bordi degli intervalli di definizione delle coordinate, quali quelli sull'asse polare ($r = 0$, $\theta = 0$, $\theta = \pi$) e quelli sull'origine degli azimut ($\varphi = 0$), sono punti *singolari*, cioè funzioni peraltro regolari nello spazio possono presentare discontinuità o non-derivabilità in questi punti quando espresse in termini di coordinate polari. Per esempio, la legge oraria di un moto circolare uniforme sul piano equatoriale può essere data da $\varphi = \omega t$, dove ω è una costante e t è il tempo, solo fino al tempo $t = 2\,\frac{\pi}{\omega}$, ma successivamente diventa $\varphi = \omega t - 2\pi$ e così via.

In figura, tra l'altro, sono mostrati anche un arco del *meridiano* per P e un arco del *parallelo* per P, nonché i versori in P delle linee coordinate r, θ e φ. Nella figura sottostante sono invece rappresentati esempi di linee coordinate:



COORDINATE POLARI CILINDRICHE



La figura illustra la definizione delle coordinate polari cilindriche.
Per scegliere un sistema di coordinate polari cilindriche è necessario fissare un punto O detto *origine*, una retta orientata passante per O detta *asse polare* o *longitudinale* o *cilindrico* e una semiretta uscente da O e ortogonale all'asse polare detta *origine degli azimut* (a volte è questa semiretta a essere chiamata *asse polare*, questo può generare confusione con l'asse longitudinale).

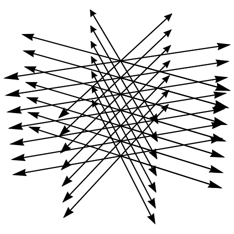
Il *piano di riferimento* è il piano ortogonale all'asse longitudinale e contenente l'origine degli azimut, coincide col piano equatoriale delle coordinate sferiche.

Fissato il sistema, le coordinate di un punto P sono definite come segue:
1) il *raggio* (oppure *coordinata radiale*) è la distanza del punto P dall'asse polare – in figura è indicato con ρ;
2) l'*azimut* (oppure *angolo azimutale*) è l'angolo tra l'origine degli azimut e la proiezione sul piano equatoriale del segmento OP - in figura è indicato con φ;
3) la *quota* (oppure *altezza* o *coordinata longitudinale)* è la distanza con segno di P dal piano equatoriale – in figura è indicata con z; il segno di z è positivo per i punti a valle (secondo l'orientamento dell'asse polare) del piano equatoriale e negativo per quelli a monte.

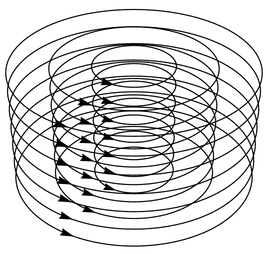
Gli intervalli di definizione delle coordinate sono: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$
per l'azimut sono spesso usati altri intervalli che coprono l'angolo giro e soprattutto: $-\pi < \varphi \leq \pi$

La nota sui punti singolari naturalmente vale anche per il sistema di coordinate cilindriche.

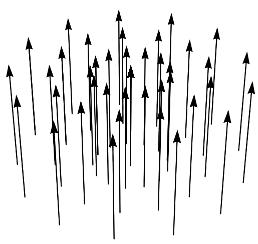
Nella figura sottostante sono rappresentati esempi di linee coordinate:



Linee coordinate ρ (raggi)



Linee coordinate φ (paralleli)



Linee coordinate z

TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

(tra sistemi associati nel modo "naturale": origini coincidenti, assi polari coincidenti tra loro e coincidenti con l'asse z, origini degli azimut coincidenti tra loro e con il semiasse x > 0, ecc.)

Cartesiane Ortogonali → Polari Cilindriche

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arg(x,\ y)$$
$$z = z$$

La funzione "argomento" $\arg(x,\ y)$ è definita come l'argomento (o fase) del numero complesso $x + i\,y$ e nel primo quadrante $(x > 0,\ y > 0)$ coincide con la funzione inversa della tangente trigomometrica: $\arg(x,\ y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Negli altri quadranti la relazione con l'arcotangente è determinata nel modo ovvio.

I prodotti scalari tra coppie di versori dei due sistemi coincidono con i coseni degli angoli tra gli stessi versori e vengono chiamati *coseni direttori*. Calcolati in funzione delle coordinate del punto e raccolti in una matrice R :

$\cdot$	$\hat{\mathbf{e}}_x$	$\hat{\mathbf{e}}_y$	$\hat{\mathbf{e}}_z$
$\hat{\mathbf{e}}_\rho$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0
$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0
$\hat{\mathbf{e}}_z$	0	0	1

Il nome deriva dal fatto che i tre coseni di ciascuna riga di R definiscono il corrispondente versore, cioè *direzione* e verso, nel sistema cartesiano.

Le componenti $(V_x,\ V_y,\ V_z)$ di un vettore $\boldsymbol{V} = V_x\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + V_y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + V_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ *applicato* al punto di coordinate $(x,\ y,\ z)$ si trasformano nelle componenti $(V_\rho,\ V_\varphi,\ V_z)$ dello *stesso* vettore $\boldsymbol{V} = V_\rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho + V_\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + V_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ *applicato* allo *stesso* punto di coordinate $(\rho,\ \varphi,\ z)$. Ciascuna componente trasformata può essere determinata dal prodotto scalare di $\boldsymbol{V}$ col corrispondente versore, p.e. $V_\rho = \boldsymbol{V}\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$. Dalle proprietà del prodotto scalare e dalla tabella R segue:

$$V_\rho = V_x\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$V_\varphi = -V_x\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$V_z = V_z$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Polari Cilindriche → Cartesiane Ortogonali

$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

Matrice R dei coseni direttori:

·	$\hat{e}_\rho$	$\hat{e}_\varphi$	$\hat{e}_z$
$\hat{e}_x$	$\cos\varphi$	$-\sin\varphi$	0
$\hat{e}_y$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	0
$\hat{e}_z$	0	0	1

Per le componenti di un vettore $\boldsymbol{V}$:

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi$$
$$V_y = V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$$
$$V_z = V_z$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{pmatrix}$$

Polari Cilindriche → Polari Sferiche

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\right)$$
$$\varphi = \varphi$$

Matrice R dei coseni direttori:

·	$\hat{e}_\rho$	$\hat{e}_\varphi$	$\hat{e}_z$
$\hat{e}_r$	$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$	0	$\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$
$\hat{e}_\theta$	$\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$	0	$-\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$
$\hat{e}_\varphi$	0	1	0

Per le componenti di un vettore $\boldsymbol{V}$:

$$V_r = V_\rho \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} + V_z \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$
$$V_\theta = V_\rho \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - V_z \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$
$$V_\varphi = V_\varphi$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{pmatrix}$$

Polari Sferiche → Polari Cilindriche

$$\rho = r \sin\theta$$
$$\varphi = \varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

Matrice R dei coseni direttori:

·	$\hat{\mathbf{e}}_r$	$\hat{\mathbf{e}}_\theta$	$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$
$\hat{\mathbf{e}}_\rho$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	0
$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$	0	0	1
$\hat{\mathbf{e}}_z$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

Per le componenti di un vettore $\boldsymbol{V}$:

$$V_\rho = V_r \sin\theta + V_\theta \cos\theta$$
$$V_\varphi = V_\varphi$$
$$V_z = V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_\rho \\ V_\varphi \\ V_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix}$$

Cartesiane Ortogonali → Polari Sferiche

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$
$$\varphi = \arg(x,\ y)$$

Matrice R dei coseni direttori:

·	$\hat{\mathbf{e}}_x$	$\hat{\mathbf{e}}_y$	$\hat{\mathbf{e}}_z$
$\hat{\mathbf{e}}_r$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\hat{\mathbf{e}}_\theta$	$x\,z \Big/ \left(\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right)$	$y\,z \Big/ \left(\sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)}\right)$	$-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$	$-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0

Per le componenti di un vettore $\boldsymbol{V}$:

$$V_r = V_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + V_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + V_z \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$V_\theta = V_x \frac{x\,z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \frac{y\,z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \sqrt{x^2 + y^2}} - V_z \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$V_\varphi = -V_x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + V_y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

Polari Sferiche → Cartesiane Ortogonali

$x = r \sin\theta \cos\varphi$
$y = r \sin\theta \sin\varphi$
$z = r \cos\theta$

Matrice R dei coseni direttori:

$\cdot$	$\hat{\mathbf{e}}_r$	$\hat{\mathbf{e}}_\theta$	$\hat{\mathbf{e}}_\varphi$
$\hat{\mathbf{e}}_x$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
$\hat{\mathbf{e}}_y$	$\sin\theta\sin\varphi$	$\cos\theta\sin\varphi$	$\cos\varphi$
$\hat{\mathbf{e}}_z$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	0

Per le componenti di un vettore $\boldsymbol{V}$:

$V_x = V_r \sin\theta \cos\varphi + V_\theta \cos\theta \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi$
$V_y = V_r \sin\theta \sin\varphi + V_\theta \cos\theta \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi$
$V_z = V_r \cos\theta - V_\theta \sin\theta$

in notazione matriciale:

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix}$$