fa ricorso alle cariche puntiformi: nei casi reali ogni carica ha dimensioni non nulle, (p.es. la nostra carica è distribuita dentro una sferetta di raggio finito), e quella che contribuisce a 2° membro della (1.32) è solo la porzione della carica (estesa) interna al volume V.

Il teorema di Gauss è conseguenza della legge di Coulomb, cioè della legge $1/r^2$ e, con l'ipotesi che il campo di una carica puntiforme (in quiete) è a simmetria sferica (campo centrale), è ad essa equivalente: infatti, se $\vec{E}(\vec{r}\,) = E_r(r)\,\hat{r}$, presa una sfera di raggio r con centro nella carica q, dalla (1.32) si ha

$$4\pi k q = \Phi_S(\vec{E}) = \int_S E_r(r)\,dS = 4\pi r^2 E_r(r) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}\,) = k\frac{q}{r^2}\,\hat{r} \tag{1.33}$$

quindi la (1.32), più l'ipotesi di simmetria sferica, assume il ruolo di equazione fondamentale dell'elettrostatica. Essa è una equazione di carattere "integrale", cioè concerne regioni finite di spazio, e può essere trasformata in una equazione di carattere "locale", cioè valida punto per punto: sia ΔV un volume arbitrario contenente il punto P in cui è presente solo una distribuzione di volume ρ, e sia q la carica in esso contenuta; per la (1.21) (definizione di divergenza) e la (1.32) (teorema di Gauss) si ha

$$\operatorname{div}\vec{E} \equiv \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Phi_{\Delta V}(\vec{E})}{\Delta V} = 4\pi k \lim_{\Delta V\to 0}\frac{q}{\Delta V} \equiv 4\pi k\rho(P) \tag{1.34}$$

cioè

$$\operatorname{div}\vec{E}(x,y,z) = 4\pi k\rho(x,y,z) \tag{1.35}$$

che è, appunto, la versione locale del teorema di Gauss. La (1.35), tuttavia, è valida solo nei punti in cui si ha (eventualmente) una distribuzione di volume: sono escluse le distribuzioni superficiali o lineari, oltreché le cariche puntiformi, quindi in questo senso la (1.32) è più generale della (1.35). Tuttavia, se ci ricordiamo che tutte le citate distribuzioni "singolari" debbono essere considerate come limiti di distribuzioni di volume, riconosciamo il carattere generale della (1.35), che quindi costituisce la prima equazione fondamentale dell'elettromagnetismo, o *1ª equazione di Maxwell.*

Concludiamo questo paragrafo dimostrando la "legge di densità" delle linee di forza, citata alla fine del 2° paragrafo: in una regione priva di sorgenti consideriamo un punto P_0 e una superficie "infinitesima" ΔS_0 contenente P_0 e ortogonale ad $\vec{E}(P_0)$; l'insieme delle linee di forza che attraversano ΔS_0 costituiscono quello che si chiama un *tubo di flusso* di sezione infinitesima (figura 1.6); sezioniamo questo tubo di flusso con una superficie ΔS attorno ad un punto P, anch'essa ortogonale ad $\vec{E}(P)$. Il flusso di $\vec{E}$ uscente dalla porzione di tubo di flusso delimitata dalle due superfici ΔS_0 e ΔS è nullo perché per ipotesi al suo interno non ci sono sorgenti; il flusso attraverso la sua superficie laterale è nullo perché, essendo costituita da linee di forza, $\vec{E}$ è tangente alla superficie, quindi il flusso entrante attaverso ΔS_0 e quello uscente attraverso ΔS sono uguali:

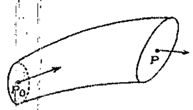

fig. 1.6

$$E(P_0)\Delta S_0 = E(P)\Delta S \quad \Rightarrow \quad \frac{E(P)}{E(P_0)} = \frac{\Delta S_0}{\Delta S} \tag{1.36}$$

cioè l'intensità del campo è inversamente proporzionale alla sezione del tubo di flusso. Se da ΔS_0 facciamo partire n linee di forza, queste stesse linee di forza, e solo esse, attraversano ΔS, quindi anche la loro densità è inversamente proporzionale alla sezione del tubo di flusso, e quindi è proporzionale all'intensità del campo elettrico.

1.6 Le leggi di trasformazione del campo elettrico

La (1.6) nel caso di cariche puntiformi, le (1.10), (1.16) e (1.17) nel caso di distribuzioni di cariche, permettono – in linea di principio – di determinare il campo elettrico per qualunque distribuzione delle sorgenti. Ad eccezione della (1.6) (nel caso di poche cariche), le altre espressioni comportano anche nei casi più semplici calcoli alquanto complessi. Tuttavia, tutte le volte che le sorgenti presentino sufficienti proprietà di simmetria, lo strumento giusto per determinare il campo elettrico è rappresentato dal teorema di Gauss, e va anche detto che i problemi risolubili solo con la (1.10) (o le altre) e non mediante il teorema di Gauss, sono veramente pochi e si trovano trattati solo su testi di carattere avanzato.

Per poter utilizzare le semplificazioni derivanti dalle proprietà di simmetria del problema, è necessario conoscere le leggi di trasformazione del campo elettrico per particolari trasformazioni delle sorgenti.

Per semplicità di enunciato faremo riferimento al caso in cui le sorgenti sono descritte da una distribuzione di volume ρ, ma sarà ovvio che tutto quanto diremo vale tale quale per distribuzioni superficiali, lineari, e anche per cariche puntiformi. Cominciamo con il caso delle isometrie (useremo notazioni più adatte al tipo di problema che vogliamo discutere).

Sia data una distribuzione $\rho(x)$, $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, e sia $\vec{E}(x)$ il campo elettrico generato da ρ. Sia $\psi(x)$ una isometria dello spazio:

$$\psi(x) \equiv Rx + a; \quad \psi^{-1}(x) = R^{-1}(x-a); \quad \Big(\psi(x)_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}x_j + a_i\Big)$$
$$^{t}RR = I; \; \det R = \pm 1 \tag{1.37}$$

e consideriamo la distribuzione

$$\rho'(x) = \rho\big(\psi^{-1}(x)\big) = \rho\big(R^{-1}(x-a)\big)\,. \tag{1.38}$$

Il significato di $\rho'(x)$ è questo: siccome $\rho'\big(\psi(x)\big) = \rho(x)$, la nuova distribuzione ρ' nel punto trasformato $(\psi(x))$ è uguale alla vecchia distribuzione ρ nel punto non trasformato (x), cioè ρ' si ottiene assoggettando rigidamente la distribuzione ρ alla stessa trasformazione a cui l'isometria ψ assoggetta i punti dello spazio: $x \to \psi(x)$ (questo è quello che si chiama "punto di vista attivo"). Così, per esempio, nel caso della traslazione $\psi(x) = x + a$, se ρ è concentrata attorno al punto x_0, ρ' è concentrata attorno al punto $x_0 + a$. Nella figura 1.7, nella quale oltre alle distribuzioni ρ e ρ' sono rappresentati anche i campi elettrici generati da ciascuna di esse, l'isometria consiste in una rotazione di 90° in verso orario attorno al punto P, seguita dalla traslazione individuata dal vettore $\vec{a} \equiv \overline{PP'}$.

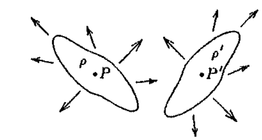

fig. 1.7

Come illustrato dalla figura 1.7, è evidente (e lo dimostreremo) che se ρ' si ottiene traslando, ruotando o riflettendo ρ in un certo modo, il campo elettrico $\vec{E}'(x)$ generato dalla distribuzione $\rho'(x)$ si ottiene traslando, ruotando o riflettendo nello stesso modo il campo $\vec{E}(x)$, generato dalla distribuzione $\rho(x)$: in altri termini, la distribuzione "si porta dietro il proprio campo".

Quanto appena affermato è espresso dal

Teorema. *Il campo elettrico $\vec{E}'(x)$ generato dalla distribuzione $\rho'(x)$ è dato da*

$$E_i'(x) = \sum\nolimits_j R_{ij} E_j\big(\psi^{-1}(x)\big). \tag{1.39}$$

Se nella (1.39) poniamo $\psi(x)$ al posto di x si ottiene, analogamente alla (1.38), $E_i'\big(\psi(x)\big) = \sum_j R_{ij}E_j(x)$; la presenza della matrice di rotazione R a secondo membro della (1.39) e non della (1.38) è dovuta al fatto che $\vec{E}$ è un campo vettoriale, mentre ρ è una funzione (campo) scalare: ruotare $\vec{E}$ significa trasportarlo nel punto ruotato, ruotandone conformemente la direzione.

La (1.39), è la legge generale di trasformazione di un qualsiasi campo vettoriale (campi di forze, campi di velocità, ecc.); per i campi pseudovettoriali (vettori assiali), come il campo magnetico, la legge di trasformazione differisce dalla (1.39), nel caso di trasformazioni con $\det R = -1$, per il segno.

Se dimostriamo il teorema per una carica puntiforme, il principio di sovrapposizione ci garantisce che vale per un numero qualsiasi di cariche e quindi anche per una distribuzione continua. Sia x_0 la posizione della carica q. L'isometria ψ porta la carica nel punto $\psi(x_0) = Rx_0 + a$, quindi

$$\begin{aligned} E_i'(x) &= kq\frac{x_i - (Rx_0 + a)_i}{\|x - (Rx_0 + a)\|^3} = kq\frac{(x - a - Rx_0)_i}{\|x - a - Rx_0\|^3} \\ &= \sum\nolimits_j R_{ij}\, kq\frac{\big(R^{-1}(x-a) - x_0\big)_j}{\|R^{-1}(x-a) - x_0\|^3} = \sum\nolimits_j R_{ij}E_j\big(\psi^{-1}(x)\big) \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{1.40}$$

Nella dimostrazione (penultimo passaggio) abbiamo solo utilizzato il fatto che la distanza $\|x - x'\|$ fra due punti è invariante per isometrie, e non la particolare dipendenza di $\vec{E}$ dalla distanza, quindi la (1.39) è indipendente dalla legge $1/r^2$.

Casi particolari:

$$\begin{aligned} &\psi(x) = x + a &\qquad& \vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r} - \vec{a}) \\ &\psi(x) = Rx && E_i'(x) = \textstyle\sum_j R_{ij}E_j(R^{-1}x) \\ &\psi(x) = -x && \vec{E}'(\vec{r}) = -\vec{E}(-\vec{r}). \end{aligned} \tag{1.41}$$

Corollario. *Se* $\rho\big(\psi(x)\big) = \rho(x) \quad \Rightarrow$

$$E_i\big(\psi(x)\big) = \sum\nolimits_j R_{ij}E_j(x). \tag{1.42}$$

Infatti $\rho(x) = \rho\big(\psi(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \rho'(x) = \rho(x)$ e siccome il campo elettrico è univocamente determinato dalle sorgenti, $\vec{E}'(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$ quindi dalla (1.39) con $\psi(x)$ al posto di x si ha subito la tesi.

Anche il significato di questo corollario è evidente: se le sorgenti sono invarianti per una

certa trasformazione (isometrica), anche il campo elettrico globalmente resta invariato per la stessa trasformazione: p.es. se le sorgenti sono invarianti per una rotazione (o una traslazione), l'intero campo elettrico (pensato come un corpo rigido) resta invariato per la stessa rotazione (o traslazione).

Tutto sommato, sia il teorema che il corollario esprimono dei concetti abbastanza intuitivi, tanto che il loro tacito uso è implicito nella frase "per ovvie ragioni di simmetria", spesso utilizzata in molti testi. Concetti intituitivi, si, ma non "scontati": alla base di tutto c'è il fatto che la legge di Coulomb è la stessa in qualsiasi luogo (lo spazio è "omogeneo e isotropo"); se lo spazio in cui viviamo fosse pervaso da un fluido (*etere*) non omogeneo e con proprietà dipendenti dalla direzione, cioè non isotropo, le ovvie ragioni di simmetria verrebbero meno.

L'insieme delle trasformazioni ψ tali che $\rho\big(\psi(x)\big) = \rho(x)$ costituiscono chiaramente un gruppo (sottogruppo delle isometrie), che chiameremo "il gruppo $\mathcal{G}$ di invarianza delle sorgenti"; è evidente che tanto più il gruppo di invarianza è ricco, e tante più informazioni si ottengono sul campo elettrico. Queste informazioni consistono in relazioni fra il campo elettrico nei vari punti appartenenti ad una stessa orbita per l'azione di $\mathcal{G}$ sui punti dello spazio (un'orbita è l'insieme dei punti che si ottiene da un dato punto per l'azione del gruppo su di esso): la (1.42) dice che la conoscenza di $\vec{E}$ in un punto P_0 determina il campo in tutti i punti $P = \psi(P_0)$ dell'orbita che contiene P_0; in particolare l'intensità di $\vec{E}$ è la stessa in tutti i punti di una stessa orbita.

Preso un punto P, lo stabilizzatore $\mathcal{G}_P$ di P è il sottogruppo di $\mathcal{G}$ che lascia invariato il punto P; se $\mathcal{G}_P$ non è banale, si ottengono informazioni direttamente sulla direzione di $\vec{E}(P)$ (in generale non sul verso e neppure sull'intensità: la (1.42) è un'equazione lineare e omogenea), in quanto $\vec{E}(P)$ deve essere invariante (cioè autovettore) per tutte le trasformazioni di $\mathcal{G}_P$:

$$E_i(P) = \sum\nolimits_j R_{ij}E_j(P) \qquad \forall\, R \in \mathcal{G}_P. \tag{1.43}$$

$\mathcal{G}_P$ può consistere solo di rotazioni e/o riflessioni (infatti le traslazioni non lasciano fisso alcun punto); spesso (dipende da $\mathcal{G}_P$) queste informazioni determinano completamente la direzione di $\vec{E}$ nel punto P, e quindi in tutti i punti dell'orbita di P.

(Di solito il gruppo di invarianza viene caratterizzato elencando alcuni suoi sottogruppi che lo generano completamente, per esempio le rotazioni e le traslazioni, oppure le rotazioni e le riflessioni, ecc.).

Esempi

1. Consideriamo il caso particolarmente importante di una distribuzione a simmetria sferica: $\rho = \rho(r)$. Il gruppo di invarianza delle sorgenti è il gruppo O_3 delle rotazioni e riflessioni; non sarà necessario utilizzarlo tutto: sono sufficienti le rotazioni. Sia P un punto qualsiasi: se P coincide con il centro O della distribuzione, $\mathcal{G}_P$ è l'intero gruppo per cui, se $\vec{E}(O)$ è definito, per la (1.43) deve essere $E_i(O) = \sum_j R_{ij}E_j(O)$, e ciò è possibile solo se $\vec{E}(O) = 0$ (se p.es. è presente una carica puntiforme nel centro, $\vec{E}(O)$ non è definito); altrimenti ($P \neq O$) $\mathcal{G}_P$ è il gruppo delle rotazioni attorno alla retta OP ed $\vec{E}(P)$ è invariante solo se parallelo a detta retta, cioè se è radiale. L'orbita di P è la superfice della sfera di centro O

passante per P sulla quale quindi $\vec{E}$ ha intensità costante, è radiale ed è ovunque diretto o verso l'esterno o verso l'interno: in definitiva $\vec{E}(\vec{r}\,) = E_r(r)\,\hat{r}$.

2. Distribuzione con simmetria cilindrica; preso l'asse z come asse di simmetria, $\rho = \rho(x^2 + y^2)$.
   Per esempio, un cilindro con carica uniformemente distribuita al suo interno, oppure un filo rettilineo indefinito con densità lineare λ costante. Il gruppo di invarianza contiene le rotazioni attorno all'asse z, le traslazioni parallele all'asse z e le rotazioni di 180° attorno ad ogni retta perpendicolare all'asse z. Ci sono anche le riflessioni, ma non ne avremo bisogno. Sull'asse z $\vec{E} = 0$ (se è definito); se P è un punto non appartenente all'asse z, $\mathcal{G}_P$ è la rotazione di 180° attorno alla retta per P ortogonale all'asse z, quindi $\vec{E}(P)$ deve essere parallelo a detta retta: campo "radiale piano"; l'orbita di P è il cilindro per P avente per asse l'asse z. Se chiamiamo $\vec{\varrho}$ il vettore di componenti $(x, y, 0)$, si ha $\vec{E}(\vec{r}\,) = E_\varrho(\varrho)\,\hat{\varrho}$.
3. Distribuzione con simmetria piana: $\rho = \rho(z)$. Per esempio, una carica uniformemente distribuita fra due piani paralleli, oppure un piano con densità superficiale costante σ. Il gruppo di invarianza contiene le traslazioni parallele al piano $z = 0$ e le rotazioni attorno ad ogni asse parallelo all'asse z (gli esempi dati sopra hanno qualche simmetria in più). Le rotazioni attorno alla retta parallela all'asse z passante per il punto P costituiscono lo stabilizzatore di P, per cui $\vec{E}$ è ovunque parallelo all'asse z. I piani z = costante sono le orbite sulle quali il campo è costante. Quindi $\vec{E}(\vec{r}\,) = \big(0, 0, E_z(z)\big)$.

Infine, talvolta ci sarà utile un'altra proprietà del campo elettrico: se cambiamo segno a tutte le sorgenti, il campo elettrico cambia segno:

$$\rho'(\vec{r}\,) = -\rho(\vec{r}\,) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}'(\vec{r}\,) = -\vec{E}(\vec{r}\,). \tag{1.44}$$

La trasformazione $q_i \to -q_i$ (o $\rho(x) \to -\rho(x)$) è detta *Coniugazione di carica*.
La coniugazione di carica non può essere una trasformazione di invarianza (salvo il caso banale $\vec{E} \equiv 0$), ma può esserlo composta con altre trasformazioni discrete.
Per esempio, se abbiamo due distribuzioni simmetriche rispetto ad un piano (piano $z = 0$) ma di cariche opposte, come in figura 1.8 (o anche nel caso di un **dipolo**: sistema costituito da due cariche q e $-q$), la composizione di una riflessione rispetto al piano $z = 0$ con la coniugazione di carica, $\rho'(x, y, z) \equiv -\rho(x, y, -z)$, è una trasformazione di invarianza delle sorgenti:

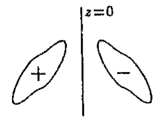

fig. 1.8

$\rho'(x, y, z) \equiv -\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z)$, per cui dalle (1.39) e (1.44), se R_{ij} è la matrice diagonale con gli elementi diagonali $R_{11} = R_{22} = 1$, $R_{33} = -1$,

$$E_i(x, y, -z) = -R_{ii} E_i(x, y, z) \tag{1.45}$$

cioè

$$\begin{cases} E_x(x, y, z) = -E_x(x, y, -z) \\ E_y(x, y, z) = -E_y(x, y, -z) \\ E_z(x, y, z) = E_z(x, y, -z)\,. \end{cases} \tag{1.46}$$

In particolare, quindi, sul piano $z = 0$ il campo elettrico (se è definito) ha solo la componente z, cioè è ortogonale al piano stesso.

1.7 Il campo elettrico di distribuzioni simmetriche

Riprendiamo in considerazione gli esempi del paragrafo precedente e utilizziamo il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrico.

1. Sorgenti a simmetria sferica: $\rho = \rho(r)$, $\vec{E}(\vec{r}\,) = E_r(r)\,\hat{r}$.
   Presa come ***superficie di Gauss*** (cioè superficie che sfruttiamo per utilizzare il teorema di Gauss) la sfera di raggio r concentrica con la distribuzione di carica, detta $Q(r)$ la carica contenuta dentro la sfera di raggio r, dal teorema di Gauss si ha

$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E_r(r) = 4\pi k Q(r) \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}\,) = k\,\frac{Q(r)}{r^2}\,\hat{r} \tag{1.47}$$

   dove

$$Q(r) \equiv \int_{r' \le r} \rho(r')\, dV = \int_{r' \le r} \rho(r')\, r'^2\, dr'\, d\Omega = 4\pi \int_0^r \rho(r')\, r'^2\, dr' \tag{1.48}$$

   (l'ultimo passaggio è reso possibile dal fatto che l'integrando $\rho(r')$ non dipende dagli angoli θ e ϕ, e l'angolo solido totale $\int d\Omega = 4\pi$).
   Quindi: se $\rho(r) = 0$ per $r > R$, il campo elettrico per $r > R$ è identico a quello di una carica puntiforme uguale alla carica totale, posta nel centro di simmetria; se $\rho(r) = 0$ per $r < R$, il campo elettrico è nullo per $r < R$ (questo è il caso, per esempio, di una sfera con distribuzione superficiale uniforme σ sulla sua superficie); se

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \equiv Q/\frac{4}{3}\pi R^3 & r \le R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}\,) = \begin{cases} k\dfrac{Q}{R^3}\,\vec{r} & r \le R \\ k\dfrac{Q}{r^2}\,\hat{r} & r \ge R \end{cases} \tag{1.49}$$

   Nelle figure 1.9a e 1.9b è riportato il campo elettrico rispettivamente di una distribuzione uniforme σ sulla superficie di una sfera di raggio R e quello di una distribuzione uniforme ρ_0 all'interno della stessa sfera.

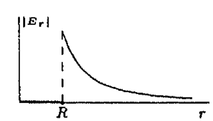

fig. 1.9a

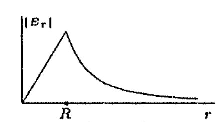

fig. 1.9b

2. Sorgenti a simmetria cilindrica: $\rho = \rho(\varrho)$ $(\varrho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}\,)$; $\vec{E}(\vec{r}\,) = E_\varrho(\varrho)\,\hat{\varrho}$.
   Presa come superficie di Gauss un cilindro di raggio ϱ e altezza h, con asse coincidente con l'asse z, il flusso attraverso le basi è nullo, mentre quello attraverso la superficie laterale è $2\pi\varrho h\, E_\varrho$, per cui, se $\lambda(\varrho)$ è la carica per unità di altezza contenuta nel cilindro di raggio ϱ $(\lambda(\varrho) = Q(\varrho)/h)$,

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{2k\lambda(\varrho)}{\varrho}\,\hat{\varrho}\,; \qquad \lambda(\varrho) = 2\pi \int_0^\varrho \rho(r)\, r\, dr \tag{1.50}$$

   Nel caso particolare di un filo rettilineo con distribuzione lineare costante λ, $\lambda(\varrho) = \lambda \quad \forall \varrho > 0$, e

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{2k\lambda}{\varrho}\,\hat{\varrho} \tag{1.51}$$

e quindi vediamo che il campo diverge come $1/\varrho$. Questo risultato, che abbiamo anticipato nel paragrafo 3, vale per una distribuzione lineare qualsiasi: vedremo nel paragrafo 10 che in ogni punto P di una distribuzione lineare la componente radiale di $\vec{E}$ diverge come $2k\lambda(P)/\varrho$ (per una distribuzione lineare generica il campo ha – in generale – anche altre componenti, ma queste restano finite e continue).

3. Distribuzione con simmetria piana: $\rho = \rho(z)$, $\quad \vec{E} = \big(0,\,0,\,E_z(z)\big)$.
Supponiamo che la distribuzione sia diversa da zero solo fra due piani: $\rho(z) \neq 0$ per $z_1 \leq z \leq z_2$. Nella regione priva di sorgenti $z \geq z_2$ (oppure $z \leq z_1$) prendiamo come superficie di Gauss un cilindro con le basi ortogonali all'asse z (figura 1.10): il flusso totale è nullo, quello attraverso la superficie laterale anche (tubo di flusso), quindi il flusso entrante in una base ($z = a$) è uguale a quello uscente dall'altra base ($z = b$). Siccome $\vec{E}$ è ortogonale alle basi e costante su ciascuna di esse, ne segue $E_z(a) = E_z(b) \quad \forall a,\, b \geq z_2;\ \forall a,\, b \leq z_1$, cioè il campo è costante sia per $z \geq z_2$ che per $z \leq z_1$, in generale con valori diversi nelle due regioni: infatti, se ora prendiamo come superficie di Gauss un cilindro come prima, ma ora con una base nella regione $z \leq z_1$ e l'altra nella regione $z \geq z_2$ (figura 1.10), troviamo che

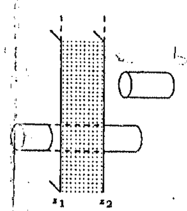

fig. 1.10

$$E_z(z \geq z_2) - E_z(z \leq z_1) = 4\pi k \int_{z_1}^{z_2} \rho(z')\,dz' \equiv 4\pi k\sigma \tag{1.52}$$

dove con σ abbiamo indicato la carica per unità di area contenuta fra i piani $z = z_1$ e $z = z_2$.
In questo caso, siccome $\vec{E} = \big(0,\,0,\,E_z(z)\big)$, il problema è unidimensionale per cui si può arrivare semplicemente allo stesso risultato anche utilizzando la (1.35) (cioè la forma locale del teorema di Gauss) che assume la forma

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{d\,E_z}{dz} = 4\pi k\rho(z). \tag{1.53}$$

Quindi, sappiamo che il campo è costante nelle regioni senza sorgenti, conosciamo la discontinuità quando si passa da una regione all'altra, ma questa volta il teorema di Gauss non ci permette di determinare il campo: tra poco capiremo perché.
Supponiamo ora che la nostra distribuzione sia una distribuzione superficiale piana σ, costante, sul piano $z = 0$: in questo caso il gruppo di invarianza delle sorgenti contiene anche la riflessione rispetto al piano $z = 0$, come pure le rotazioni di 180° rispetto ad ogni retta giacente in detto piano. Allora l'orbita di ogni punto P è costituita sia dal piano per $P \quad z = z_0$ che da quello simmetrico $z = -z_0$, per cui si ottiene che $E_z(-z) = -E_z(z) \quad \forall z \neq 0$. Quindi, per la (1.52),

$$\begin{cases} E_z(z) = \ \ 2\pi k\sigma & \text{per } z > 0 \\ E_z(z) = -2\pi k\sigma & \text{per } z < 0 \end{cases} \tag{1.54}$$

Quindi la distribuzione superficiale produce una discontinuità pari a $4\pi k\sigma$ nella

componenete normale del campo (in questo caso l'unica): anche questo, come già anticipato, è un risultato generale valido per qualsiasi distribuzione superficiale. Per esempio, se abbiamo una distribuzione costante σ sulla superficie di una sfera di raggio R, sappiamo (dalla (1.47)) che dentro la sfera il campo è nullo, mentre all'esterno è

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = k\frac{4\pi\sigma R^2}{r^2}\,\hat{r} \qquad r > R \tag{1.55}$$

e vediamo, anche in questo caso, che la componente radiale del campo subisce una discontinuità pari a $4\pi k\sigma$ attraverso la distribuzione superficiale.
Le linee di forza escono dal piano (da entrambe le parti) se $\sigma > 0$, entrano se $\sigma < 0$.
Supponiamo ora di avere due piani paralleli rispettivamente con distribuzioni costanti σ e $-\sigma$. Il campo elettrico si ottiene sommando i campi prodotti da ciascuna delle due distribuzioni (principio di sovrapposizione): i due campi sono concordi fra i due piani e discordi nelle due regioni esterne (nella figura 1.11 le frecce superiori rappresentano il campo generato dalla distribuzione positiva, quelle inferiori quello generato dalla distribuzione negativa), quindi

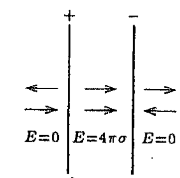

fig. 1.11

$$\begin{cases} E = 4\pi k\sigma & \text{fra i due piani} \\ E = 0 & \text{all'esterno} \end{cases} \tag{1.56}$$

Un sistema del genere è detto *condensatore*, in quanto "condensa" il campo nella regione compresa fra i due piani (due piani paralleli con distribuzioni uguali possiamo quindi chiamarlo un "anticondensatore", in quanto il campo è diverso da zero solo all'esterno).
Torniamo alla distribuzione $\rho(z)$ fra i due piani $z = z_1$ e $z = z_2$. Possiamo dividere l'intervallo $z_1,\ z_2$ in n strati di ampiezza Δz, e considerare il campo elettrico come la sovrapposizione dei campi prodotti da questi n strati: per $n \to \infty$ ciascuno di questi strati finisce per generare il campo di una distribuzione superficiale piana di densità $\rho(z_i)\Delta z$, quindi campi opposti per $z > z_2$ e per $z < z_1$. Di conseguenza anche la sovrapposizione di tutti questi campi ha la stessa proprietà: $E_z(z \geq z_2) = -E_z(z \leq z_1)$. Questa è l'informazione che ci mancava per determinare il campo della distribuzione $\rho(z)$: se non ci sono altre sorgenti

$$E_z(z) = \begin{cases} \ \ 2\pi k \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \rho(z')\,dz' & \text{per } z \geq z_2 \\ -2\pi k \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} \rho(z')\,dz' & \text{per } z \leq z_1 \end{cases} \tag{1.57}$$

Abbiamo detto "se non ci sono altre sorgenti"; questa è la ragione per cui simmetrie e teorema di Gauss non sono stati sufficienti a determinare il campo: simmetrie e teorema di Gauss sono compatibili con la presenza di altre sorgenti lontane con le stesse simmetrie, per esempio la distribuzione $\rho(z)$ potrebbe trovarsi all'interno di un condensatore. In effetti la (1.52) determina il campo a meno di un campo costante parallelo all'asse z.

Un'ultima osservazione: può venire il sospetto che la ragione per cui il campo elettrico di una distribuzione piana uniforme σ è costante dalle due parti della distribuzione possa scaturire da una qualche proprietà di invarianza delle sorgenti. Dovrebbe trattarsi di una proprietà peculiare della legge $1/r^2$, perché noi la abbiamo dedotta usando il teorema di Gauss: la risposta è sì, ed ha le sue radici nel fatto che il campo di una carica puntiforme resta invariato se $q \to \lambda^2 q$ e $\vec r \to \lambda \vec r$, $\forall\lambda > 0$: una carica di 1 C produce alla distanza di 1 m lo stesso campo che una carica di 100 C produce alla distanza di 10 m. Questa è quella che si chiama *invarianza di scala*: se tutte le lunghezze vengono cambiate per un fattore e le cariche per lo stesso fattore al quadrato, il campo elettrico resta invariato. Ma in questo modo una distribuzione uniforme su un piano resta inalterata ($\sigma = q/\Delta S \equiv \lambda^2 q/\lambda^2\Delta S$), e di conseguenza $\vec E(\vec r) = \vec E(\lambda\vec r)$, cioè genera un campo indipendente dalla distanza (se invece la superficie non è piana le sue dimensioni cambiano).

1.8 Il potenziale del campo elettrico

Il campo elettrico di una carica puntiforme è un campo centrale, quindi conservativo; grazie al principio di sovrapposizione è conservativo anche il campo elettrico di più cariche puntiformi, e quello delle distribuzioni continue (le cariche devono essere in quiete). Il potenziale del campo di una carica puntiforme è dato da (lo si confronti con il potenziale gravitazionale dovuto a una massa puntiforme)

$$\varphi(r) = k\frac{q}{r} \tag{1.58}$$

avendo posto $\varphi(\infty) = 0$. Per una distribuzione di volume

$$\varphi(\vec r) = k\int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\,dV \tag{1.59}$$

e analoghe per le distribuzioni superficiali e per quelle lineari. Si noti che siccome il campo elettrico è un campo di forza per unità di carica, anche il potenziale elettrico è l'energia potenziale per unità di carica.

Richiamiamo le proprietà fondamentali dei campi conservativi, con riferimento al campo elettrico.

i) Dato un qualsiasi circuito chiuso γ orientato, si definisce **circuitazione** del campo elettrico (la definizione si applica a qualsiasi campo vettoriale, anche non conservativo)

$$\oint_\gamma \vec E\cdot d\vec s \stackrel{\rm def}{=} \int_\gamma E_t(s)\,ds \tag{1.60}$$

dove $E_t(s)$ è, nel punto di ascissa curvilinea s di γ, la componente di $\vec E$ tangente alla curva: $E_t \equiv \vec E\cdot\hat\tau$ ($\hat\tau$ è il versore tangente alla curva) e abbiamo introdotto la definizione di elemento di linea orientata $d\vec s \equiv \hat\tau\,ds$. Siccome il campo elettrico è conservativo la sua circuitazione è sempre nulla

$$\oint_\gamma \vec E\cdot d\vec s = 0 \tag{1.61}$$

e l'integrale di linea fra due punti P_1 e P_2 è indipendente dal percorso.

ii) Il potenziale è definito a meno di una costante additiva: se P_0 è un punto arbitrario

$$\varphi(P) = -\int_{P_0}^{P} \vec E\cdot d\vec s. \tag{1.62}$$

Quindi, se le sorgenti sono fisse e q è una carica "esploratrice", $-q\varphi(P)$ è il lavoro fatto dalle forze del campo elettrico sulla carica q quando questa viene spostata dal punto P_0 al punto P: $q\varphi(P)$ è quindi il lavoro (positivo o negativo) che occorre fare dall'esterno (cioè contro le forze del campo) per portare la carica da P_0 a P. In generale $q\varphi(P_2) - q\varphi(P_1)$ è il lavoro che occorre fare per portare la carica dal punto P_1 al punto P_2.

iii) La relazione fra il campo elettrico e il potenziale è uguale a quella che si ha fra forza e (energia) potenziale:

$$\vec E(x,y,z) = -\,{\rm grad}\,\varphi(x,y,z) \equiv -\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\,\frac{\partial\varphi}{\partial y},\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big). \tag{1.63}$$

L'operatore *gradiente* (grad) sovente viene anche indicato con il simbolo ∇ ("nabla")

$${\rm grad} \equiv \nabla \equiv \Big(\frac{\partial}{\partial x},\,\frac{\partial}{\partial y},\,\frac{\partial}{\partial z}\Big). \tag{1.64}$$

Poiché (teorema di Schwartz) per ogni funzione (con derivate seconde "miste" continue) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, definita la **rotazione** (o **rotore**) del campo elettrico (o di qualunque altro campo vettoriale) come

$${\rm rot}\,\vec E \stackrel{\rm def}{=} \Big(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z},\,\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x},\,\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\Big) \equiv \nabla\wedge\vec E \tag{1.65}$$

dalla (1.63) si ha

$${\rm rot}\,\vec E(x,y,z) = 0 \tag{1.66}$$

per cui si dice che il campo elettrico è un campo *irrotazionale*. Nel capitolo 7 vedremo il significato geometrico della rotazione di un campo vettoriale; la parola stessa fa capire che ha a che fare, nel caso in cui il campo vettoriale sia il campo delle velocità di un fluido, con i moti rotatori del fluido: un campo di velocità è irrotazionale se non ci sono vortici.

La (1.66) è condizione necessaria perché un campo vettoriale sia conservativo; è anche sufficiente se lo spazio è semplicemente connesso (cioè ogni circuito chiuso è riducibile con continuità ad un punto): quando discuteremo i campi variabili (nel tempo) incontreremo casi in cui la (1.66) è soddisfatta, ma il campo elettrico non è conservativo.

iv) Il campo elettrico è in ogni punto (non singolare) ortogonale alla superficie equipotenziale passante per quel punto ed è diretto nel verso in cui il potenziale decresce. Le superfici equipotenziali integrano le informazioni grafiche sul campo elettrico fornite dalle linee di forza: siccome le superfici equipotenziali di una carica puntiforme sono sfere, anche in presenza di più sorgenti – analogamente a quanto già