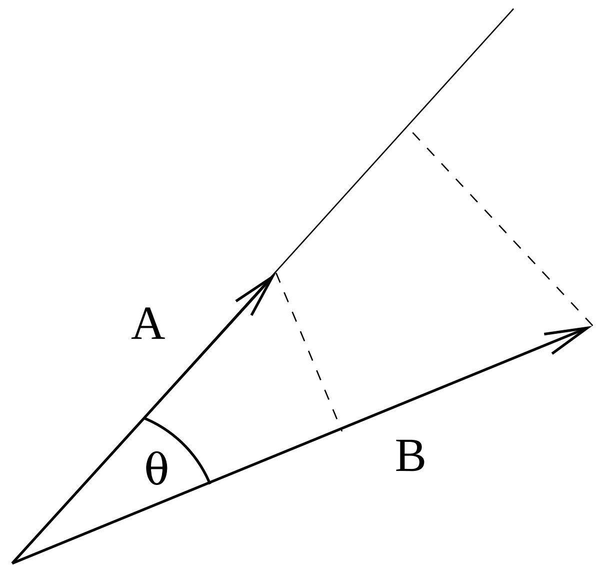
Prodotto scalare (prodotto interno): $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

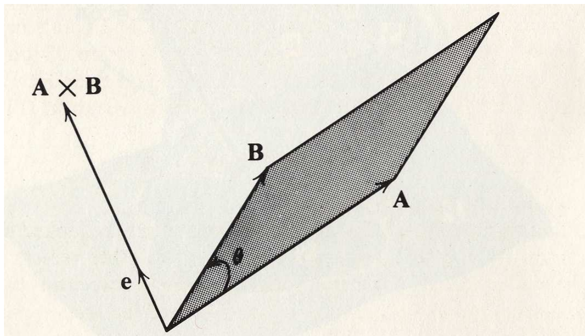


$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A\,B\,\cos\theta$$

Il risultato è uno scalare; il prodotto scalare è commutativo:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Prodotto vettoriale (prodotto esterno): $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$



Il risultato è un vettore perpendicolare al piano che contiene i vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Il verso cambia scambiando l'ordine dei vettori:

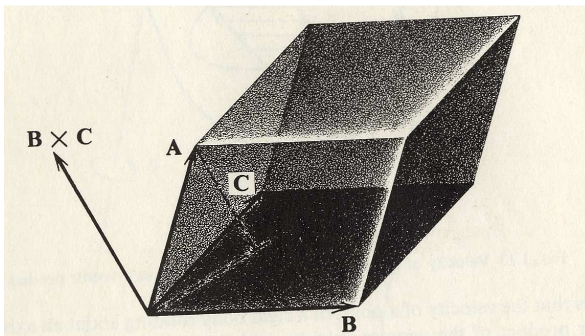
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

Area del parallelogramma di spigoli $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = A\, B\, \sin\theta\, \mathbf{e}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Triplo prodotto scalare: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$



Il risultato (è uno scalare) non cambia scambiando i prodotti scalare/vettoriale:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

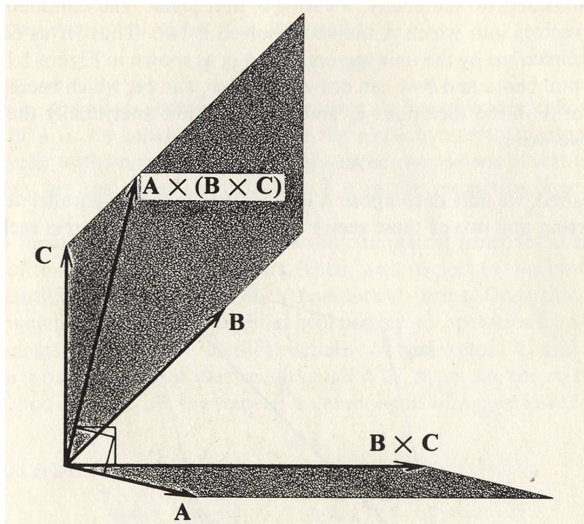
ed è invariante rispetto alla permutazione ciclica dei vettori componenti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Triplo prodotto vettoriale $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$



con:

$$m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$n = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\, \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\, \mathbf{C}$$

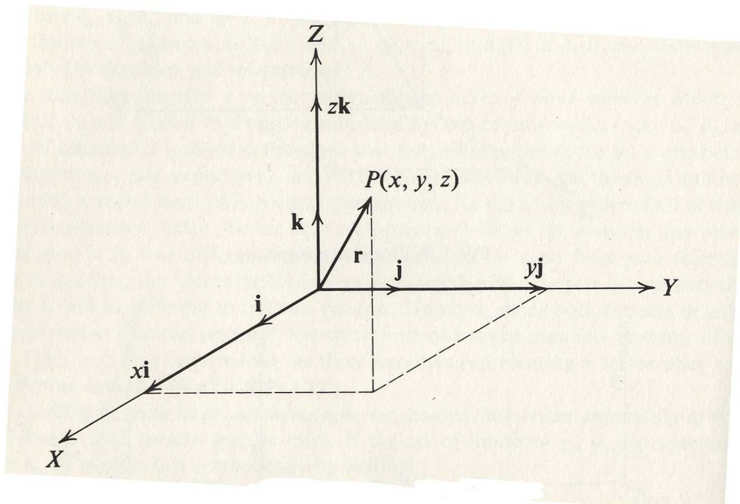
Il risultato è un vettore nel piano formato dai vettori $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = m\mathbf{B} + n\mathbf{C}$$

Triplo prodotto vettoriale (cont.)

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ (B_2C_3 - B_3C_2) & (B_3C_1 - B_1C_3) & (B_1C_2 - B_2C_1) \end{vmatrix}$$

Coordinate cartesiane

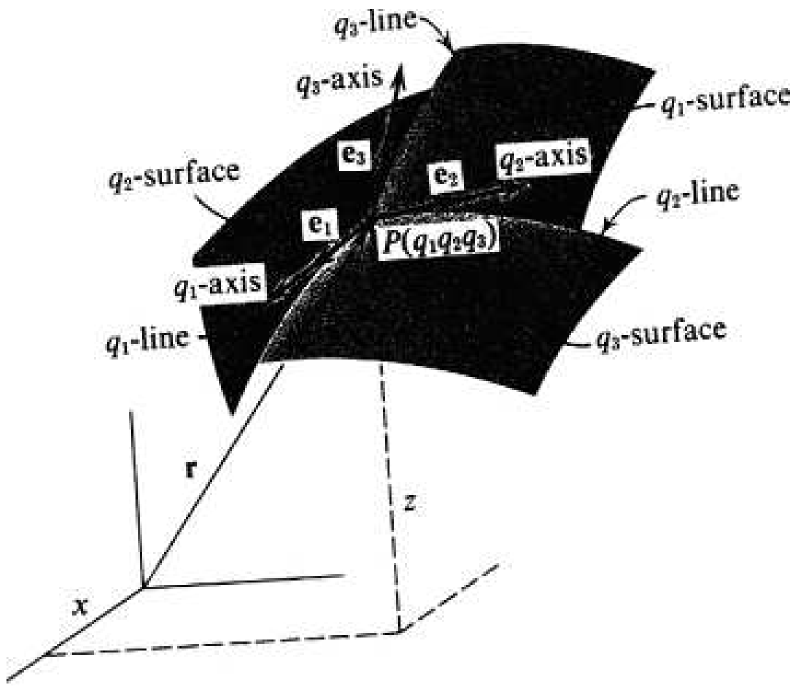


$$
\begin{aligned}
x &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r} \\
y &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r} \\
z &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} = (P - O) &= x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z \\
&= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
$$

Coordinate curvilinee



$$P = P\,(x, y, z)$$

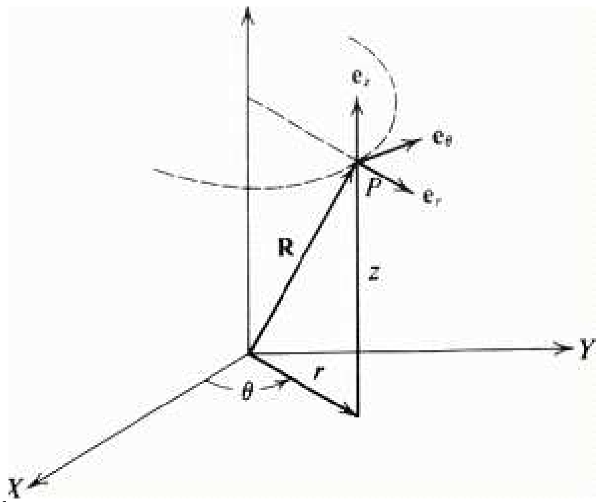
$$P = P\,(q_1, q_2, q_3)$$

$$\begin{cases} q_1 = q_1\,(x, y, z) \\ q_2 = q_2\,(x, y, z) \\ q_3 = q_3\,(x, y, z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x\,(q_1, q_2, q_3) \\ y = y\,(q_1, q_2, q_3) \\ z = z\,(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

La coordinata curvilinea q_i non ha necessariamente la dimensione di una lunghezza

Coordinate cilindriche

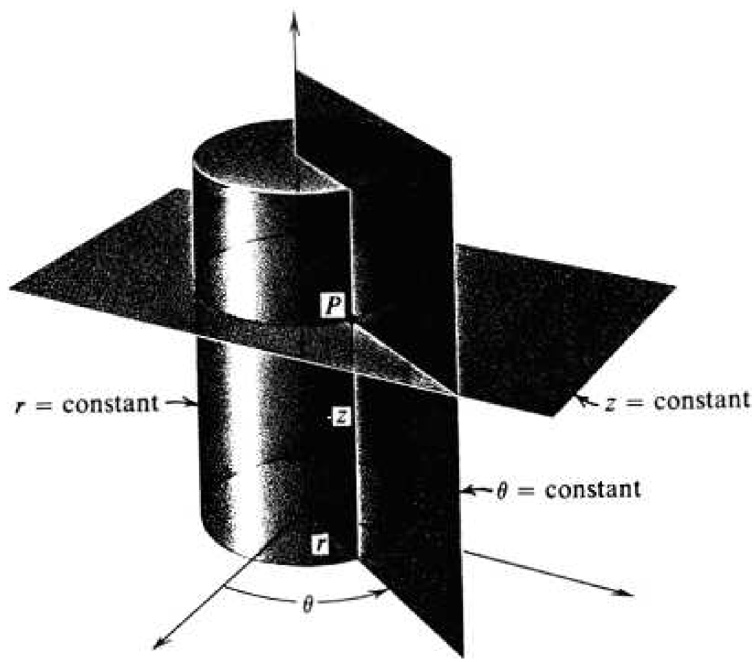


$$\begin{cases} q_1 & = r \quad 0 \leq r < \infty \\ q_2 & = \theta \quad 0 \leq \theta < 2\pi \\ q_3 & = z \quad -\infty < z < \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

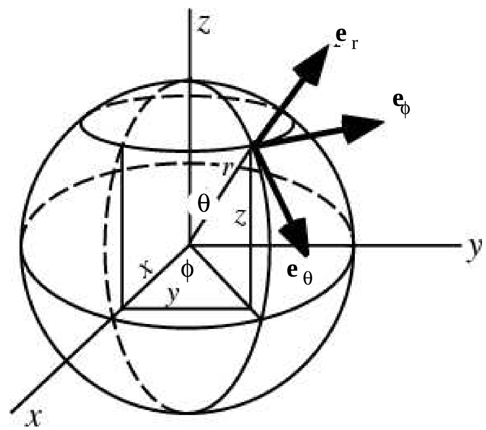
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \tan^{-1}(y/x) \\ z &= z \end{aligned}$$

Coordinate cilindriche: superfici coordinate



- r = costante: cilindro coassiale all'asse Z;
- θ = costante: semi-piano del fascio di asse Z;
- z = costante: piano perpendicolare all'asse Z;

Coordinate sferiche

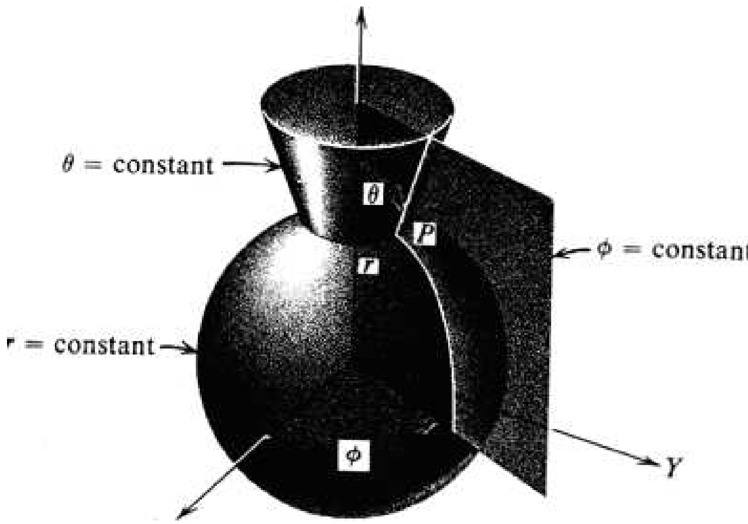


$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\phi \\
y &= r \sin\theta \sin\phi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \cos^{-1} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
\phi &= \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
q_1 = r & 0 \le r < \infty \\
q_2 = \theta & 0 \le \theta \le \pi \\
q_3 = \phi & 0 \le \phi < 2\pi
\end{cases}
$$

Coordinate sferiche: superfici coordinate



- r = costante: sfere concentriche con centro nell'origine;
- θ = costante: semi-cono circolare di asse Z;
- ϕ = costante: semi-piano del fascio di asse Z.

Funzioni di scalari e vettori

- Vettore funzione di uno scalare, per es. posizione di un punto materiale in funzione del tempo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

- Scalare funzione di uno vettore, per es. distribuzione di temperatura in un solido:

$$T = T(\mathbf{r})$$

- Vettore funzione di un vettore, per es. moto rotatorio di corpo rigido:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

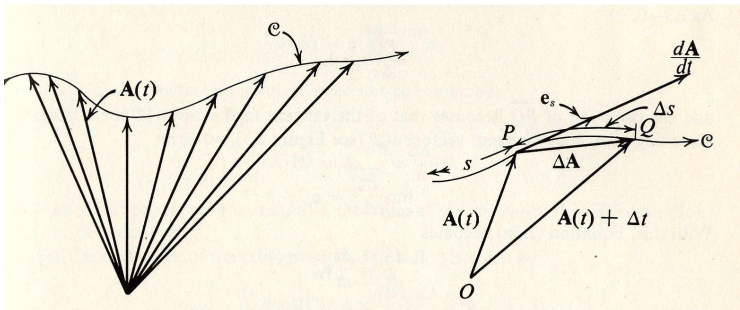
Più in generale, uno scalare o un vettore può essere funzione di un vettore (per es. posizione) e di uno scalare (per es. tempo):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(\mathbf{r}, t)$$

Se $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$, riscrivendo il vettore in funzione delle componenti in un sistema di riferimento *fisso* nello spazio, equivale a fornire le tre funzioni:

$$A_1 = A_1(t); \quad A_2 = A_2(t); \quad A_3 = A_3(t).$$

Derivata di un vettore $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$

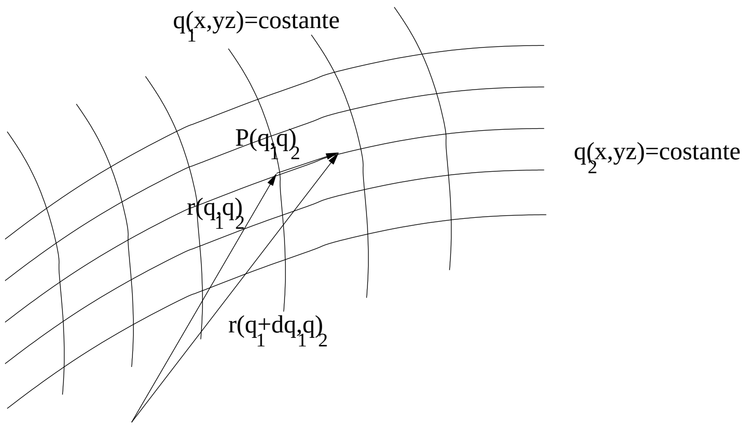


$\mathbf{e}_s$ versore tangente alla curva $\mathcal{C}$.
Per esempio:

$$\boxed{\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_s = V\mathbf{e}_s}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(Q-P)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(Q-P)}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\
&= \frac{ds}{dt} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(Q-P)}{\Delta s} \\
&= \frac{ds}{dt}\mathbf{e}_s
\end{aligned}$$

Versori in un sist. di coordinate curvilinee



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\mathbf{r}\left(q_1 + \Delta q_1, q_2\right) - \mathbf{r}\left(q_1, q_2\right)}{\Delta q_1}$$

$$= \frac{ds}{dq_1}\mathbf{e}_1 = h_1 \mathbf{e}_1$$

Ma: $\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$,

quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_m}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_m}\mathbf{e}_z$$

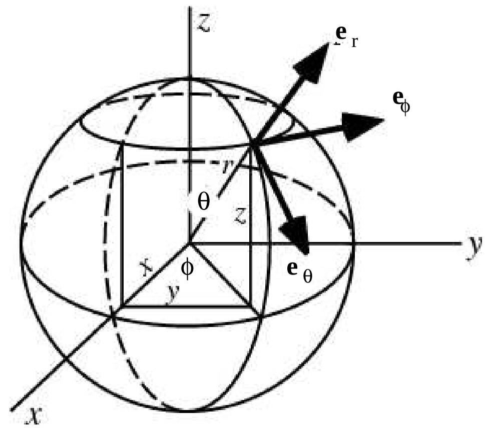
$$= h_m \mathbf{e}_m \quad m = 1, 2, 3$$

da cui:

$$h_m^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_m}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_m}\right)^2$$

$$\mathbf{e}_m = \frac{1}{h_m}\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial q_m}\mathbf{e}_y + \frac{\partial z}{\partial q_m}\mathbf{e}_z\right)$$

Esempio: versori in coordinate sferiche



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + r\cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y$$

$$- r\sin\theta\,\mathbf{e}_z = h_\theta \mathbf{e}_\theta$$

da cui:

$$h_\theta = r$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\mathbf{e}_y - \sin\theta\,\mathbf{e}$$

analogamente si dimostra che:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$h_r = 1$$

$$h_\phi = r\sin\theta$$

Distanza, aree, volumi in un sist. di rif.to curvilineo ortogonale

$\boxed{\text{Distanze}}$

$$ds \equiv d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

$$= \mathbf{e}_1 \, h_1 \, dq_1 + \mathbf{e}_2 \, h_2 \, dq_2 + \mathbf{e}_3 \, h_3 \, dq_3$$

$$= \mathbf{e}_1 \, ds_1 + \mathbf{e}_2 \, ds_2 + \mathbf{e}_3 \, ds_3$$

$$ds^2 = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} = (h_1 \, dq_1)^2 + (h_2 \, dq_2)^2 + (h_3 \, dq_3)^2$$

$\boxed{\text{Aree}}$

$$dS_3 \, \mathbf{e}_3 = h_1 \, dq_1 \, \mathbf{e}_1 \times \, h_2 \, dq_2 \, \mathbf{e}_2$$

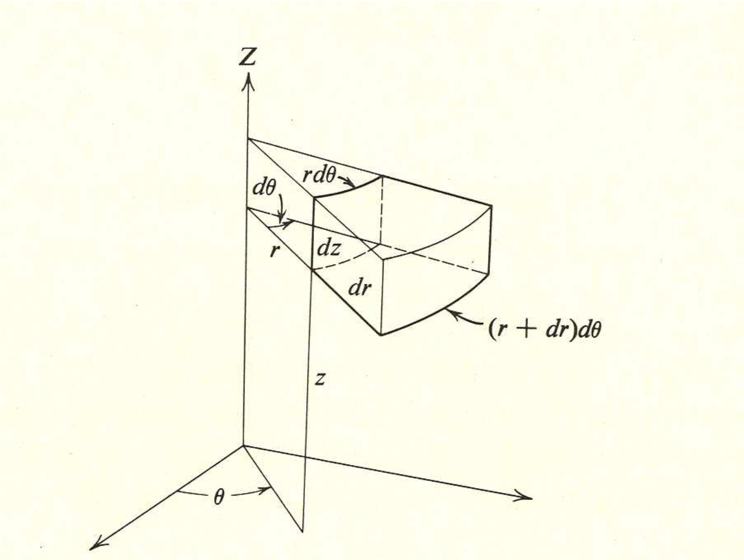
$\boxed{\text{Volumi}}$

$$d\mathcal{V} = h_1 \, dq_1 \, \mathbf{e}_1$$

$$\cdot \, (h_2 \, dq_2 \, \mathbf{e}_2 \times h_3 \, dq_3 \, \mathbf{e}_2)$$

$$= h_1 \, h_2 \, h_3 \, dq_1 \, dq_2 \, dq_3$$

Esempio: coordinate cilindriche



(b)

$$d\mathbf{s} = dr\,\mathbf{e}_r + r\,d\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_3$$

$$dS_r\,\mathbf{e}_r = rd\theta\,\mathbf{e}_\theta \times dz\,\mathbf{e}_z = r\,d\theta\,dz\,\mathbf{e}_r$$

$$dS_\theta\,\mathbf{e}_\theta = dz\,\mathbf{e}_z \times dr\,\mathbf{e}_r = dr\,dz\,\mathbf{e}_\theta$$

$$dS_z\,\mathbf{e}_z = dr\,\mathbf{e}_r \times rd\theta\,\mathbf{e}_\theta = r\,dr\,d\theta\,\mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} d\mathcal{V} &= dr\,\mathbf{e}_r \cdot (rd\theta\,\mathbf{e}_\theta \times \; dz\,\mathbf{e}_z) \\ &= dr\,r\,d\theta\,dz \end{aligned}$$

Regole di derivazione per vettori funzione di uno scalare

1. le derivate di ordine superiore di $\mathbf{A}(t)$ sono calcolate analogamente al caso scalare;

2. se

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t); \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

3. se

$$u = u(t) \text{ e } \mathbf{A} = \mathbf{A}(t); \quad \frac{d\,(u\mathbf{A})}{dt} = u\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A}\frac{du}{dt}$$

4. se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t) \text{ e } \mathbf{B} = \mathbf{B}(t); \quad \frac{d\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\right)}{dt} = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}$$

(l'ordine non è importante; il prodotto scalare è commutativo)

5.

$$\frac{d\left(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right)}{dt} = \mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\times\mathbf{B}$$

(l'ordine è essenziale; il prodotto vettoriale NON è commutativo)

6.

$$\frac{d\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C})}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt}$$

7.

$$\frac{d\,\left[\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\right]}{dt}=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}\times(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\times\mathbf{C})+\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{C}}{dt})$$

(occhio alle parentesi!!!)

Se $\mathbf{A}$ è costante in modulo, ma non in direzione, allora la derivata di $\mathbf{A}$ è perpendicolare ad $\mathbf{A}$.

Infatti, se $|\mathbf{A}| = A =$ costante:

$$\frac{dA^2}{dt} = 0 = \frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})}{dt} = 2\frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A}$$

La derivata di un versore è perpendicolare al versore.

$\boxed{\text{Attenzione: i versori sono costanti in modulo, ma non in direzione!}}$

Se: $\mathbf{A}(t) = A_i \mathbf{e}_i$ (sommatoria sull'indice i)

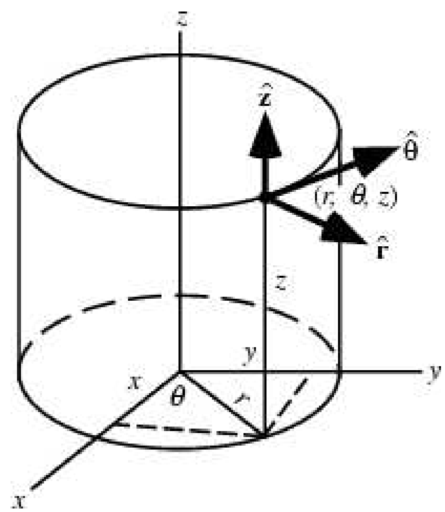
allora:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\left(A_i \mathbf{e}_i\right)}{dt} = \frac{dA_i}{dt}\mathbf{e}_i + A_i \frac{d\mathbf{e}_i}{dt}$$

In un sistema di riferimento cartesiano i versori sono costanti:

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 0 \quad i = x, y, z$$

Esempio: velocità in un sist. di coord. cilindriche



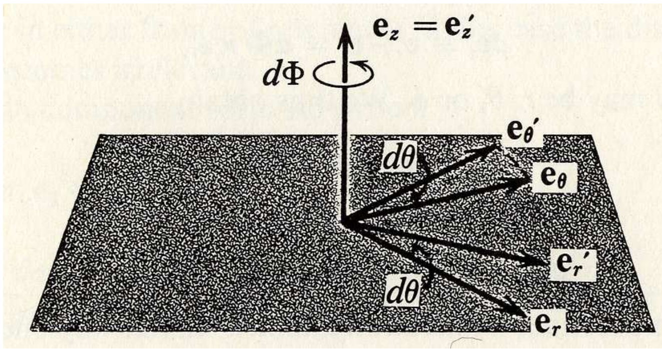
$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z\right) \\
&= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \\
&= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

poichè:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \qquad ds = r d\theta$$

$$\mathbf{R} = (P - O) = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z$$

Derivate dei versori (coordinate cilindriche)



$$
\begin{aligned}
d\mathbf{e}_r &= d\theta \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = d\theta \mathbf{e}_\theta \\
d\mathbf{e}_\theta &= d\theta \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\theta = -d\theta \mathbf{e}_r \\
d\mathbf{e}_z &= d\theta \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0
\end{aligned}
$$

riassumendo:

$$
\begin{aligned}
\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta &= \mathbf{e}_\theta \\
\partial \mathbf{e}_\theta / \partial \theta &= -\mathbf{e}_r \\
\partial \mathbf{e}_i / \partial r &= 0 \\
\partial \mathbf{e}_i / \partial z &= 0
\end{aligned}
$$

Vogliamo calcolare ($i = r, \theta, z$):

$$d\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}_i^{'} - \mathbf{e}_i = d\mathbf{\Phi} \times \mathbf{e}_i = d\theta \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_i$$

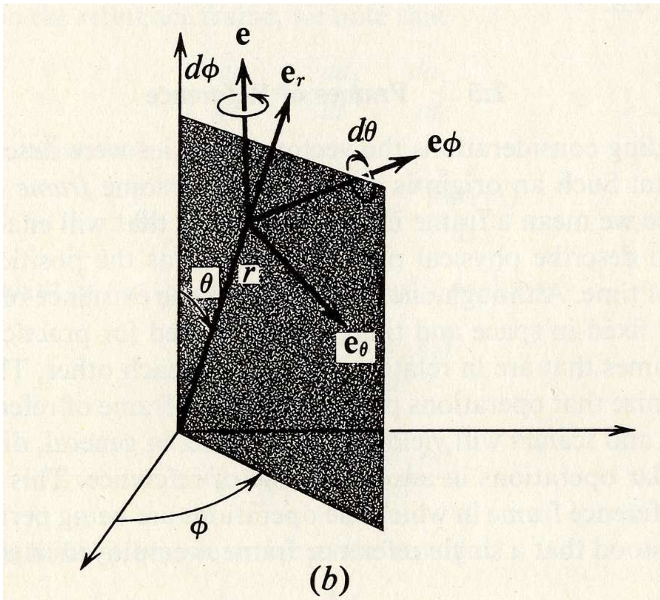
Derivate dei versori (coordinate cilindriche)

In alternativa, scrivendo le componenti di versori $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ nel sist. di riferimento cartesiano e derivando rispetto a θ, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y \\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\theta \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\cos\theta\mathbf{e}_x - \sin\theta\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_r \\
\frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} &= 0
\end{aligned}
$$

Le derivate rispetto a (r, z) sono nulle.

Derivate dei versori (coordinate sferiche)



In coordinate sferiche:

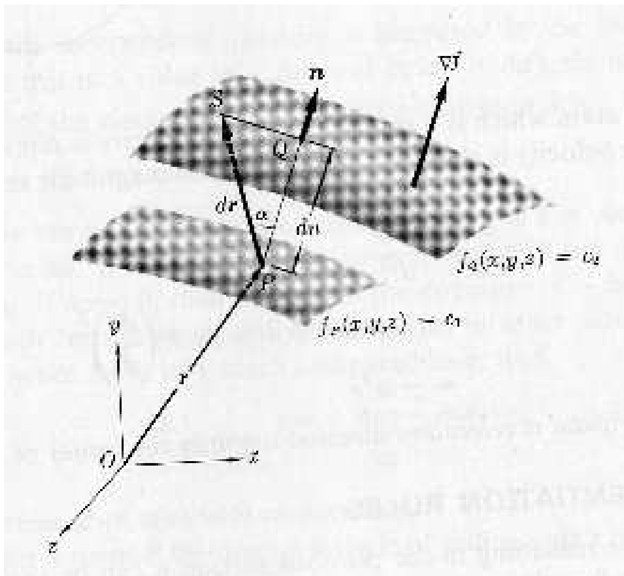
$$d\boldsymbol{\Phi} = d\phi \mathbf{e} + d\theta \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_r &= d\theta \mathbf{e}_\theta + d\phi \sin\theta \mathbf{e}_\phi \\ d\mathbf{e}_\theta &= -d\theta \mathbf{e}_r + d\phi \cos\theta \mathbf{e}_\phi \\ d\mathbf{e}_\phi &= -d\phi \sin\theta \mathbf{e}_r - d\phi \cos\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

Vogliamo calcolare ($i = r, \theta, \phi$):

$$d\mathbf{e}_i \equiv \mathbf{e}_i^{'} - \mathbf{e}_i = d\boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{e}_i$$

Derivata di uno scalare funzione di un vettore (gradiente)



$$\phi_Q = \phi_P + PQ\frac{\partial \phi}{\partial n} = \phi_S$$

$$\begin{aligned}\phi_S - \phi_P &= PQ\frac{\partial \phi}{\partial n} \\ &= PS\cos\alpha\frac{\partial \phi}{\partial n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\,\phi &= \mathbf{n}\frac{\partial \phi}{\partial n}\cdot d\mathbf{s} \\ &= \text{grad}\phi\cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi &= \phi\,(\mathbf{r}) \\ d\mathbf{s} &= ds\,\mathbf{e} = (S[Q] - P)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{ds} = \text{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}}$$

Superfici di livello (gradiente)

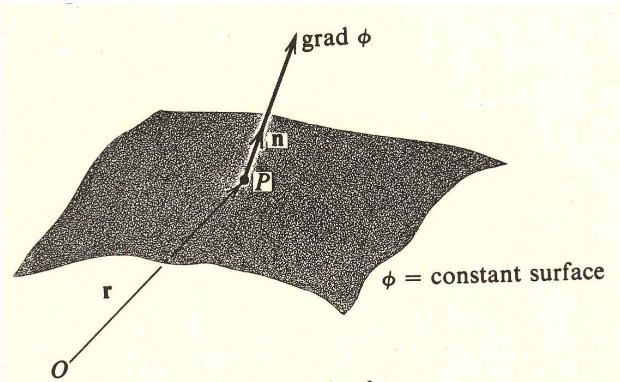


FIG. 2.6 Level surface.

Se $\mathcal{S}$ è una superficie di livello per la funzione scalare ϕ:

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

per qualsiasi spostamento $d\mathbf{s}$ nel piano della iso-superficie. In altri termini, qualunque sia il versore $\mathbf{e}$ che giaccia nel piano:

$$\text{grad } \phi \cdot \mathbf{e} = 0$$

ovvero il gradiente di una funzione scalare è perpendicolare, in ogni punto, alle superfici di livello della funzione ϕ.

Gradiente in coordinate cartesiane

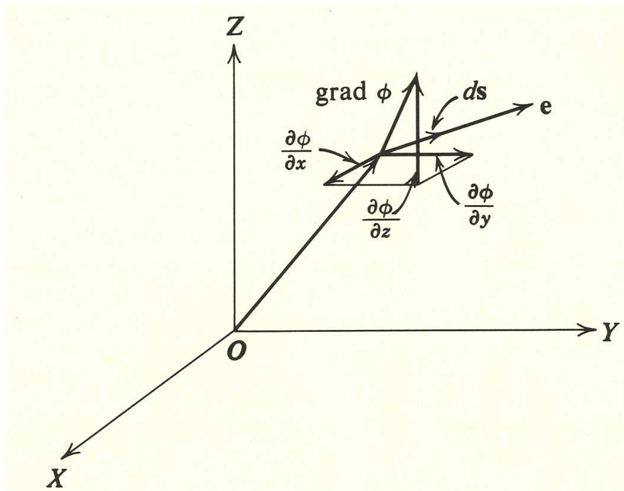


Fig. 2.5 Gradient.

$$\begin{aligned}\phi &= \phi\,(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) \\ d\mathbf{s} &= dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z = ds\,\mathbf{e}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \\ &\cdot \ (dx\,\mathbf{e}_x + dy\,\mathbf{e}_y + dz\,\mathbf{e}_z) \\ &= \mathsf{grad}\,\phi \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{ds} = \mathsf{grad}\,\phi \cdot \mathbf{e}}$$

Gradiente in coordinate curvilinee

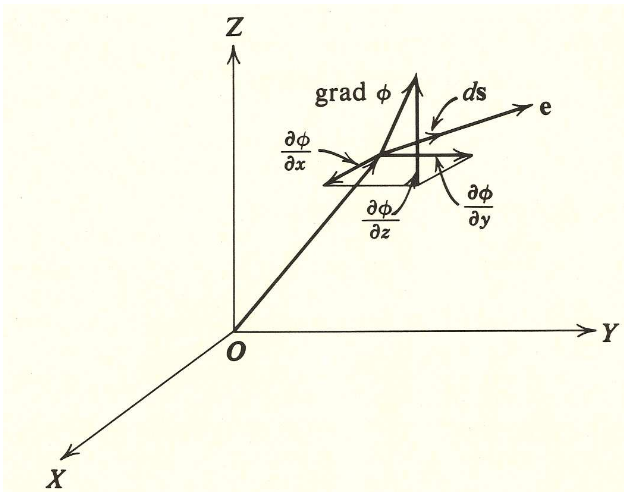


FIG. 2.5 Gradient.

$$
\begin{aligned}
d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3} dq_3 \\
&= \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1} ds_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2} ds_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3} ds \\
&= \Bigg(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\mathbf{e}_3 \\
&\cdot\ (ds_1\,\mathbf{e}_x + ds_2\,\mathbf{e}_2 + ds_3\,\mathbf{e}_3) \\
&= \mathsf{grad}\,\phi \cdot d\mathbf{s}
\end{aligned}
$$

$$\phi = \phi\,(\mathbf{r}) = \phi(q_1, q_2, q_3)$$

$$d\mathbf{s} = \textstyle\sum_i ds_i\,\mathbf{e}_i \quad ds_i = h_i\,dq_i$$

Derivata di un vettore funzione di un vettore

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\,(\mathbf{r}) = A_1\,\mathbf{e}_1 + A_2\,\mathbf{e}_2 + A_3\,\mathbf{e}_3$$

derivando si ottiene:

$$d\mathbf{A} = \{(dA_1)\mathbf{e}_1 + (dA_2)\mathbf{e}_2 + (dA_3)\mathbf{e}_3\} + \{A_1(d\mathbf{e}_2) + A_2(d\mathbf{e}_2) + A_3(d\mathbf{e}_3)\}$$

abbiamo già visto che: $dA_i = d\,\mathbf{s}\cdot \mathrm{grad} A_i$ inoltre si può mostrare che:

$$\{A_1(d\mathbf{e}_2) + A_2(d\mathbf{e}_2) + A_3(d\mathbf{e}_3)\} = (d\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}_1)\,\mathbf{e}_1 + (d\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}_2)\,\mathbf{e}_2 + (d\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}_3)\,\mathbf{e}_3$$

in cui i vettori $\mathbf{x_i}$ dipendono da A_i e $d\mathbf{e}_i$ (tra gli esercizi).

Derivata di uno vettore funzione di un vettore (cont.)

Introducendo la notazione: $\mathbf{W}_i \equiv \text{grad}A_i + \mathbf{x}_i$ si può scrivere:

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \{(dA_1)\mathbf{e}_1 + (dA_2)\mathbf{e}_2 + (dA_3)\mathbf{e}_3\} + \{A_1(d\mathbf{e}_2) + A_2(d\mathbf{e}_2) + A_3(d\mathbf{e}_3) \\ &= [d\mathbf{s} \cdot (\text{grad}A_1 + \mathbf{x}_1)]\,\mathbf{e}_1 + [d\mathbf{s} \cdot (\text{grad}A_2 + \mathbf{x}_2)]\,\mathbf{e}_2 + [d\mathbf{s} \cdot (\text{grad}A_3 + \mathbf{x} \\ &= (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_1)\,\mathbf{e}_1 + (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_2)\,\mathbf{e}_2 + (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{W}_3)\,\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ovvero, posto $d\mathbf{s} = \mathbf{e}\,ds$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{W}_1)\,\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{W}_2)\,\mathbf{e}_2 + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{W}_3)\,\mathbf{e}_3$$

$\frac{d\mathbf{A}}{ds}$ dipende da nove numeri: dal tensore $\nabla\mathbf{A}$

L'operatore differenziale ∇ Del (o Nabla)

$$\text{grad}\ \phi = \left(\mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) = \nabla\, \phi$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\nabla \quad &= \quad \left(\mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3} \right) \quad \text{coor. curv.} \\
&= \quad \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{coor. cilindriche} \\
&= \quad \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad \text{coor. sferiche}
\end{aligned}$$

Divergenza e rotore di un campo vettoriale

$$\begin{array}{c}\nabla\cdot\mathbf{A}\\ \nabla\times\mathbf{A}\end{array} = \left(\mathbf{e}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}+\mathbf{e}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}+\mathbf{e}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\ \begin{array}{c}\cdot\\ \times\end{array}\ (\mathbf{e}_1 A_1+\mathbf{e}_2 A_2+\mathbf{e}_3 A_3)$$

Attenzione! Nell'effettuare i prodotti bisogna applicare l'operatore di derivazione anche ai versori.

In coordinate cartesiane:

$$\text{div}\,\mathbf{A}\equiv\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{A}\equiv\nabla\times\mathbf{A}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \partial_x & \partial_y & \partial_y\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

Esempio: divergenza in coord. cilindriche

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \cdot (\mathbf{e}_1 A_1 + \mathbf{e}_2 A_2 + \mathbf{e}_3 A_3) \\
&= \mathbf{e}_r \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial r} + A_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + A_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial r} + A_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} \right) \\
&+ \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \cdot \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + A_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial \theta} + A_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} \right) \\
&+ \mathbf{e}_z \cdot \left(\mathbf{e}_z \frac{\partial A_r}{\partial z} + A_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial A_\theta}{\partial z} + A_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(A_r + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\, A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r\, A_z) \right]
\end{aligned}$$

Divergenza in coordinate curvilinee ortogonali

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1\, h_2\, h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2\, h_3\, A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3\, h_1\, A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1\, h_2\, A_3)\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, A_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r\, A_z)\right] \\
&= \frac{1}{r^2\, \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\, \sin\theta\, A_r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\, \sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial \phi}(r\, A_\phi)\right]
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\text{La divergenza di un vettore è uno scalare}}$$

Rotore in coordinate curvilinee ortogonali

Si può mostrare che:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} \quad &= \quad \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3} \begin{vmatrix} h_1\,\mathbf{e}_1 & h_2\,\mathbf{e}_2 & h_3\,\mathbf{e}_3 \\ \partial_{q_1} & \partial_{q_2} & \partial_{q_3} \\ h_1\,A_1 & h_2\,A_2 & h_3\,A_3 \end{vmatrix} \\
&= \quad \frac{1}{h_2\,h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2}\,(h_3\,A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}\,(h_2\,A_2) \right] \mathbf{e}_1 \\
&+ \quad \frac{1}{h_3\,h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3}\,(h_1\,A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}\,(h_3\,A_3) \right] \mathbf{e}_2 \\
&+ \quad \frac{1}{h_1\,h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}\,(h_2\,A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}\,(h_1\,A_1) \right] \mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Il rotore di un vettore è un vettore}}$

Rotore in coordinate cilindriche e sferiche

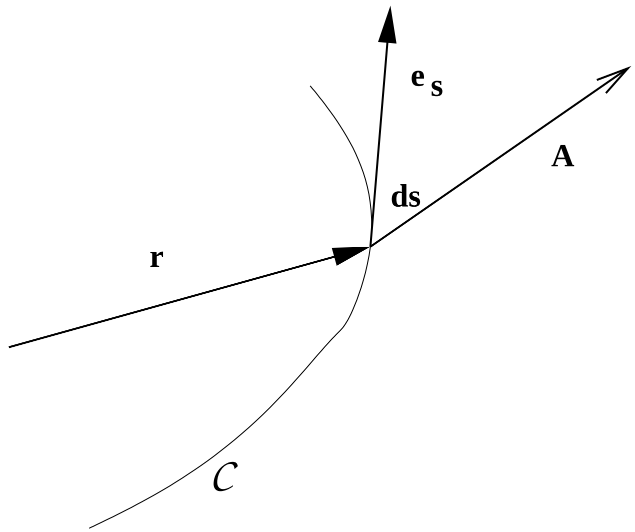
$$\boxed{\text{Coordinate cilindriche}}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\,\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ A_r & r\,A_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\text{Coordinate sferiche}}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\,\mathbf{e}_\theta & r\,\sin\theta\,\mathbf{e}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ A_r & r\,A_\theta & r\,\sin\theta\,A_\phi \end{vmatrix}$$

Integrali di linea



$d\mathbf{s} = ds\,\mathbf{e}_s$; $\mathbf{e}_s$ versore tangente alla curva $\mathcal{C}$.

$$\int_{\mathcal{C}} \phi(\mathbf{r})\, d\mathbf{s} \qquad \text{vettore}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{scalare}$$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{s} \qquad \text{vettore}$$

$\boxed{\text{Circolazione:}}$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

Integrali di superficie

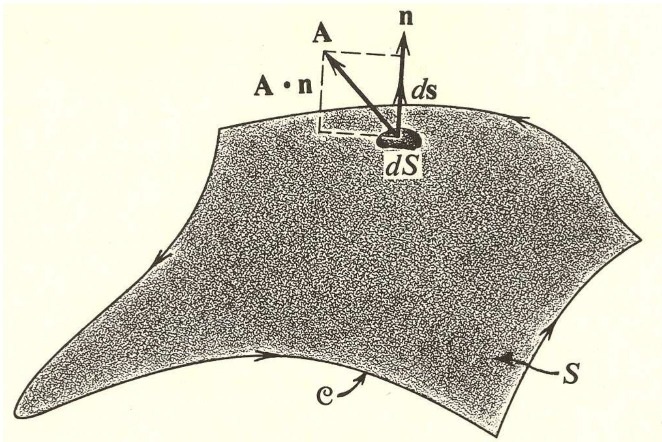


FIG. 3.3 Surface integral.

$d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n}$; $\mathbf{n}$ versore normale alla superficie S.

$$\iint_{\mathcal{S}} \phi d\mathbf{S} \qquad \text{vettore}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{scalare}$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \times d\mathbf{S} \qquad \text{vettore}$$

Integrali estesi ad una superficie chiusa

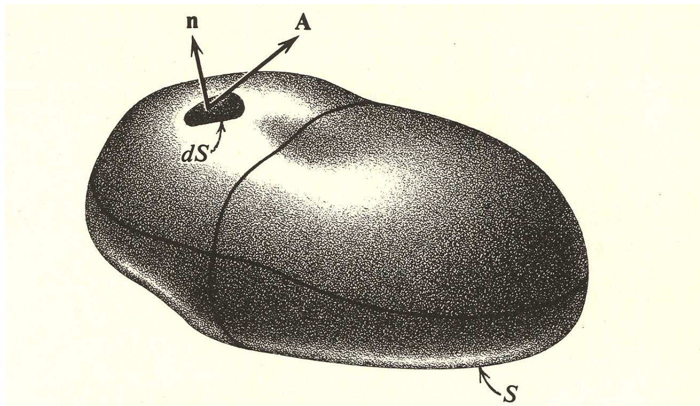


FIG. 3.4 Integral over a closed surface.

$d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n}$; $\mathbf{n}$ versore normale alla superficie S.

$\oiint_{\mathcal{S}} \phi\, d\mathbf{S}$	vettore
$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$	scalare*
$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$	vettore

*) Flusso netto del vettore $\mathbf{A}$ attraverso la superficie chiusa $\mathcal{S}$.

Integrali di volume

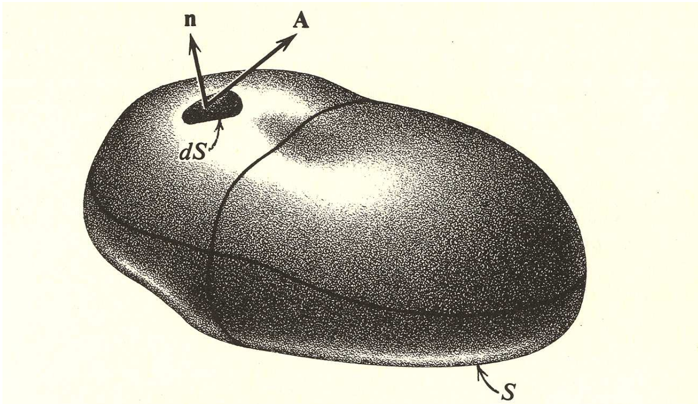
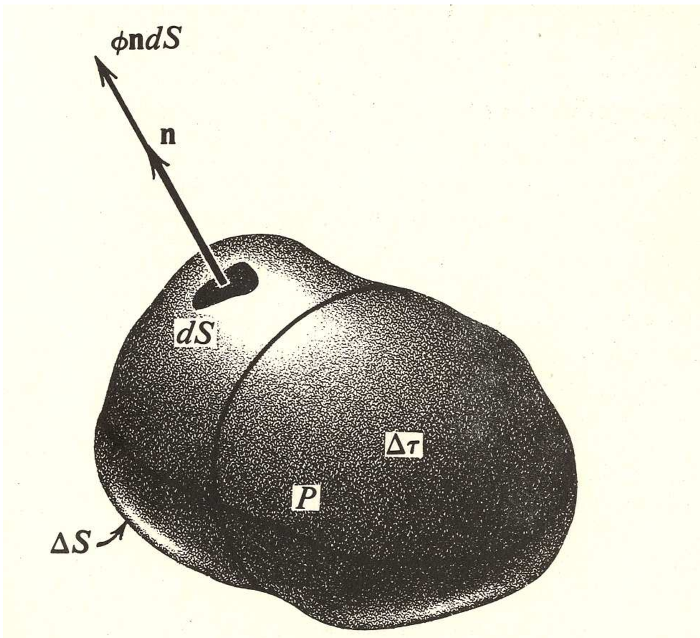


FIG. 3.4 Integral over a closed surface.

$$\iiint_{\mathcal{R}} \phi\left(\mathbf{r}\right)\, d\mathcal{V} \quad \text{scalare}$$

$$\iiint_{\mathcal{R}} \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) d\mathcal{V} \quad \text{vettore}$$

Il gradiente come limite di un integrale di superficie

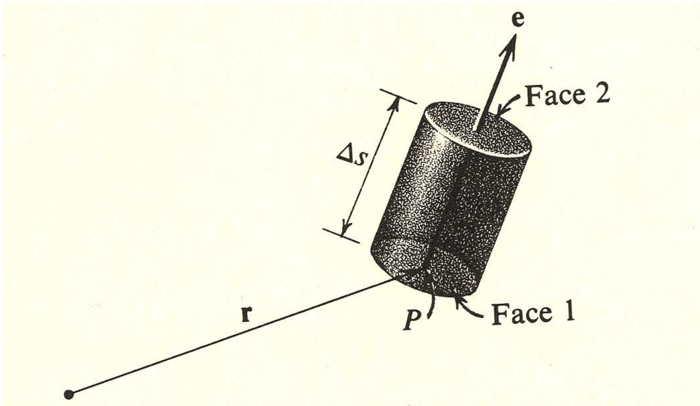


Vogliamo dimostrare che:

dato un punto P in campo scalare $\phi(\mathbf{r})$, un volume infinitesimo $\Delta\tau$ che circonda il punto P, racchiuso dalla superficie ΔS:

$$\boxed{\text{grad}\phi \equiv \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\oiint_{\Delta S}\phi\,\mathbf{n}dS.}$$

Il gradiente come limite di un integrale di superficie

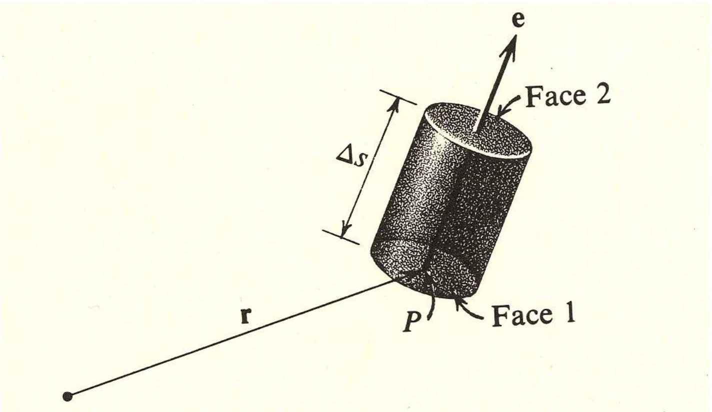


e calcoliamo $\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}$.

$$\oiint_{\Delta S} \phi\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})\, dS = \iint_{\text{wall}} \phi\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})\, dS + \iint_{\text{Face 1}} \phi\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})\, dS + \iint_{\text{Face 2}} \phi\,(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e})\, dS$$

Chiamiamo :

$$\mathbf{U} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oiint_{\Delta S} \phi\, \mathbf{n} dS.$$



$$\iint_{\text{wall}} \phi\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e})\,dS = 0 \qquad \mathbf{n}\perp\mathbf{e} \quad \text{sulla sup. laterale}$$

$$\iint_{\text{Face 1}} \phi\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e})\,dS = -\phi\,(P)\,\Delta\sigma \qquad \mathbf{n} = -\mathbf{e} \quad \text{sulla faccia 1}$$

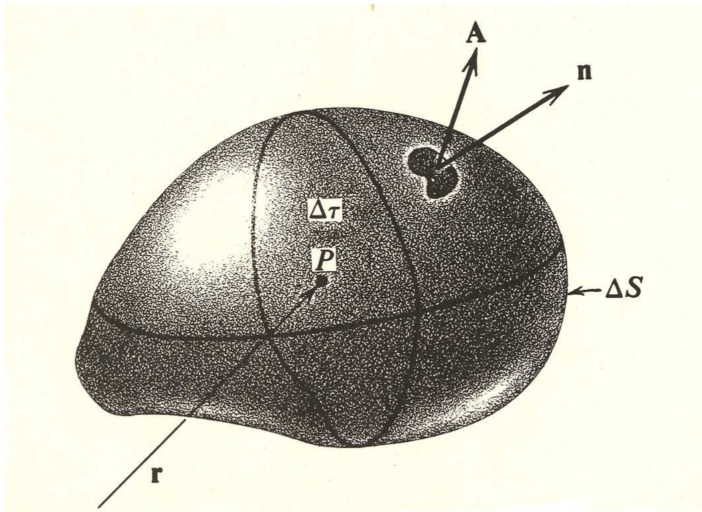
$$\iint_{\text{Face 2}} \phi\,(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e})\,dS = \left(\phi\,(P) + \frac{d\,\phi}{ds}\Delta s + \mathcal{O}\Delta s^2\right)\Delta\sigma \qquad \mathbf{n} = \mathbf{e}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}\cdot\mathbf{e} &= \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\oiint_{\Delta S}\phi\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}\,dS \\
&= \lim_{\substack{\Delta\sigma\to 0\\ \Delta s\to 0}}\frac{1}{\Delta\sigma\,\Delta s}\left(\frac{d\,\phi}{ds}\Delta s+\mathcal{O}\Delta s^2\right)\Delta\sigma \\
&= \frac{d\,\phi}{ds} = \mathsf{grad}\,\phi\cdot\mathbf{e}
\end{aligned}
$$

Poichè il versore $\mathbf{e}$ è stato scelto arbitrariamente:

$$
\boxed{\mathbf{U} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\oiint_{\Delta S}\phi\,\mathbf{n}dS = \mathsf{grad}\,\phi}
$$

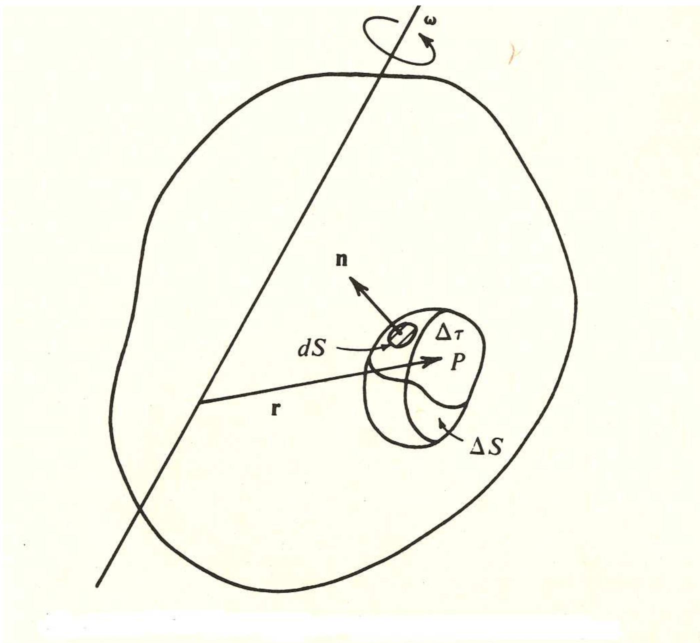
La divergenza come limite di un integrale di flusso



Dato un punto P in campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, un volume infinitesimo $\Delta\tau$ che circonda il punto P, racchiuso dalla superficie ΔS:

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}dS.}$$

Il rotore quale limite di un integrale di superficie



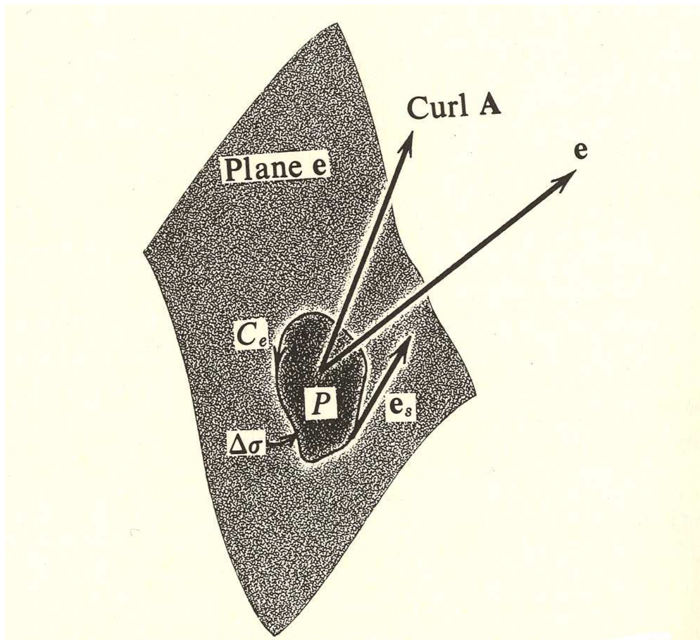
Dato un punto P in campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, un volume infinitesimo $\Delta\tau$ che circonda il punto P, racchiuso dalla superficie ΔS:

$$\boxed{\mathrm{rot}\mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oiint_{\Delta S} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS.}$$

Riepilogo........

$$\boxed{\nabla \begin{pmatrix} \phi \\ \cdot\mathbf{A} \\ \times\mathbf{A} \end{pmatrix} \equiv \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oiint_{\Delta S} \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A}\cdot \\ -\mathbf{A}\times \end{pmatrix} \mathbf{n}\, dS.}$$

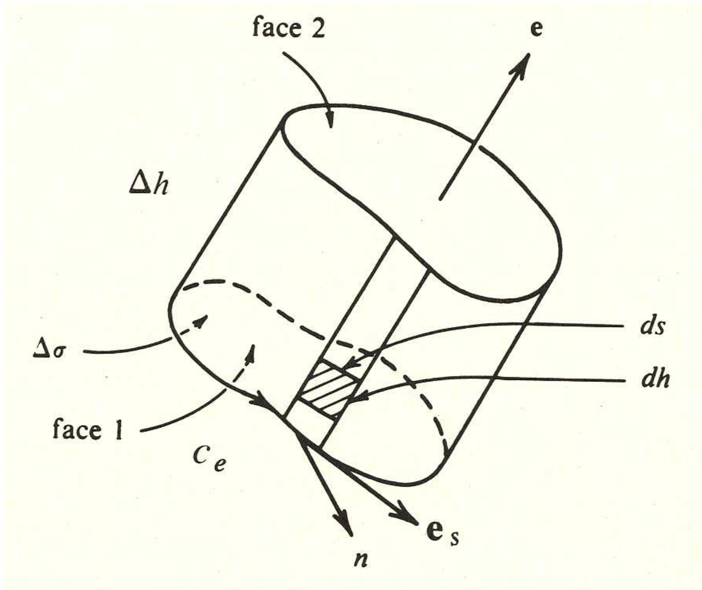
La circolazione quale componente del rotore



Dato un punto P in campo vettoriale $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)$, un circuito infinitesimo $\mathcal{C}_e$ che circonda il punto P, indicato con $\mathbf{e}$ il versore normale alla superficie racchiusa dal circuito:

$$\boxed{\mathbf{e} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{A} = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_{\mathcal{C}_e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_s ds.}$$

La circolazione quale componente del rotore



$$\mathbf{e}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\oiint_{\Delta S}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{A})\,dS$$

$$= \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\oiint_{\Delta S}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,dS$$

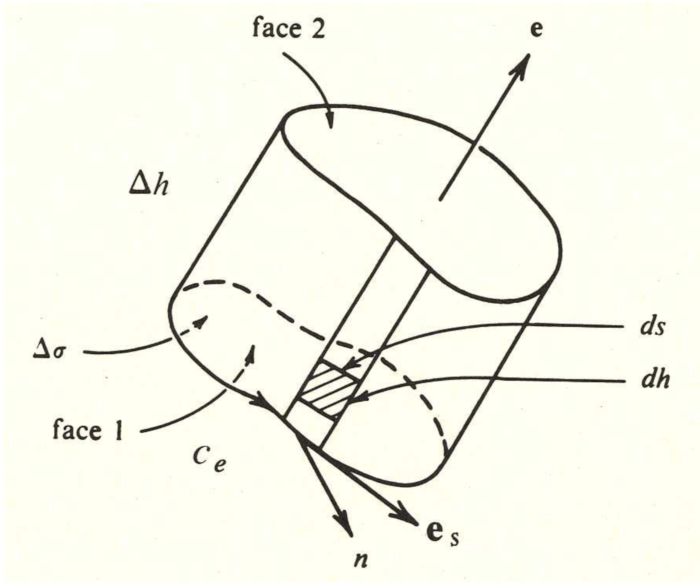
$$\Delta\tau = \Delta\sigma\,\Delta h$$

$$\oiint_{\Delta S}...dS = \iint_{\mathsf{wall}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,dS$$

$$+\iint_{\mathsf{face\ 1}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,dS$$

$$+\iint_{\mathsf{face\ 2}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,dS$$

La circolazione quale componente del rotore (cont.)



$$\oiint_{\Delta S} \ldots dS = \iint_{\text{wall}} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{n})\, dS$$

$$= \int_0^{\Delta h} \left[\oint_{\mathcal{C}_e} \left(\mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{e} \times \mathbf{n}}_{\mathbf{e}_s} \right) ds \right]$$

Poniamo:

$$f(h) = \oint_{\mathcal{C}(h)} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_s)\ ds = f(0) + f'(0)\, h + \ldots$$

Integrando:

$$\int_0^{\Delta h}\left[\oint_{\mathcal{C}(h)}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_s)\;ds\right]dh=\int_0^{\Delta h}f(h)\,dh=f(0)\,\Delta h+f'(0)\,\frac{\Delta h^2}{2}+....$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}\cdot\mathsf{rot}\mathbf{A}&=\lim_{\substack{\Delta\sigma\to0\\\Delta h\to0}}\frac{1}{\Delta\sigma\,\Delta h}\oiint_{\Delta S}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{A})\,dS\\&=\lim_{\substack{\Delta\sigma\to0\\\Delta h\to0}}\frac{1}{\Delta\sigma\,\Delta h}\left[f(0)\,\Delta h+f'(0)\,\frac{\Delta h^2}{2}+...\right]\\&=\lim_{\Delta\sigma\to0}\frac{1}{\Delta\sigma}\oint_{\mathcal{C}_e}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_s\,ds.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{e}\cdot\mathsf{rot}\mathbf{A}=\lim_{\Delta\sigma\to0}\frac{\Delta h}{\Delta\tau}\oint_{\mathcal{C}_e}\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_s ds.}$$

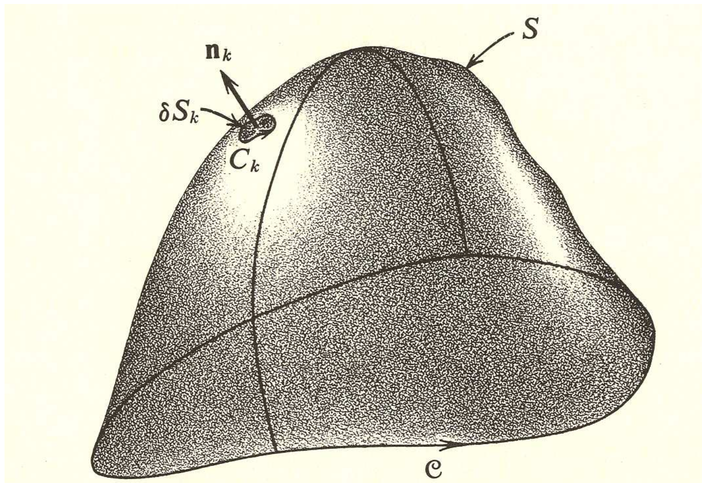
Teorema della divergenza (o di Gauss-Ostrogradskj)

$$\boxed{\oiint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla \cdot \mathbf{A}\, d\mathcal{V}}$$

scegliendo: $\mathbf{A} = \phi\,(\mathbf{r})\,\mathbf{c}$, con $\mathbf{c}$ vettore costante e $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, si ottiene:

$$\boxed{\oiint_S \phi\mathbf{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla\phi\, d\mathcal{V}}$$

Il teorema di Stokes



Dato un circuito $\mathcal{C}$ ed una qualsiasi superficie S che ad esso si appoggi:

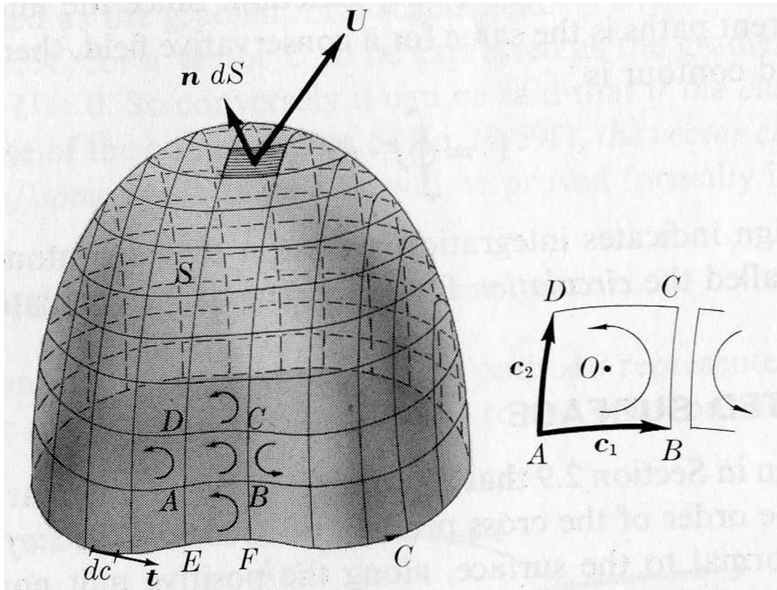
$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS}$$

Ne consegue che:

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} = 0}$$

qualunque sia la sup. chiusa S.

Il rotore è un campo solenoidale.



Sviluppando il campo $\mathbf{A}$ in serie

di Taylor rispetto ad O:

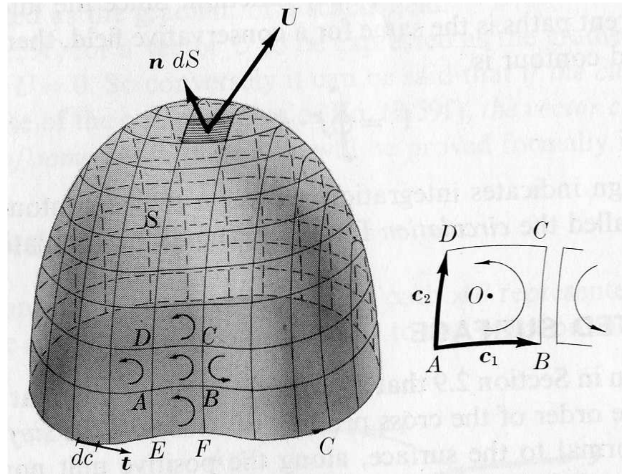
$$(\mathbf{A})_{AB} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}_2 \cdot \nabla\right)\mathbf{A} + \mathcal{O}\, c^2$$

$$(\mathbf{A})_{DC} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}_2 \cdot \nabla\right)\mathbf{A} + \mathcal{O}\, c^2$$

$$(\mathbf{A})_{AD} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{A} + \mathcal{O}\, c^2$$

$$(\mathbf{A})_{BC} = \mathbf{A} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{c}_1 \cdot \nabla\right)\mathbf{A} + \mathcal{O}\, c^2$$

$\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ sono vettori di modulo infinitesimo.



$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{A})_{AB} \cdot \mathbf{c}_1 + (\mathbf{A})_{BC} \cdot \mathbf{c}_2 - (\mathbf{A})_{DC} \cdot \mathbf{c}_1 - (\mathbf{A})_{AD} \cdot \mathbf{c}_2$$

$$= \mathbf{c}_2 \cdot \left[\left(\mathbf{c}_1 \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \right] - \mathbf{c}_1 \cdot \left[\left(\mathbf{c}_2 \cdot \nabla \right) \mathbf{A} \right]$$

$$= \left[\left(\mathbf{c}_1 \cdot \nabla \right) \mathbf{c}_2 - \left(\mathbf{c}_2 \cdot \nabla \right) \mathbf{c}_1 \right] \cdot \mathbf{A}$$

$$= \left[\left(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 \right) \times \nabla \right] \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 \right) \cdot \left(\nabla \times \mathbf{A} \right)$$

$$= \left(\nabla \times \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

Riepilogo: I teoremi della divergenza e di Stokes

$$\boxed{\oiint_S \begin{pmatrix} \phi \\ \mathbf{A}\cdot \\ \mathbf{A}\times \end{pmatrix} \mathbf{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \nabla \begin{pmatrix} \phi \\ \cdot\mathbf{A} \\ \times - \mathbf{A} \end{pmatrix} d\mathcal{V} \qquad \text{Gauss}}$$

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \text{Stokes}}$$

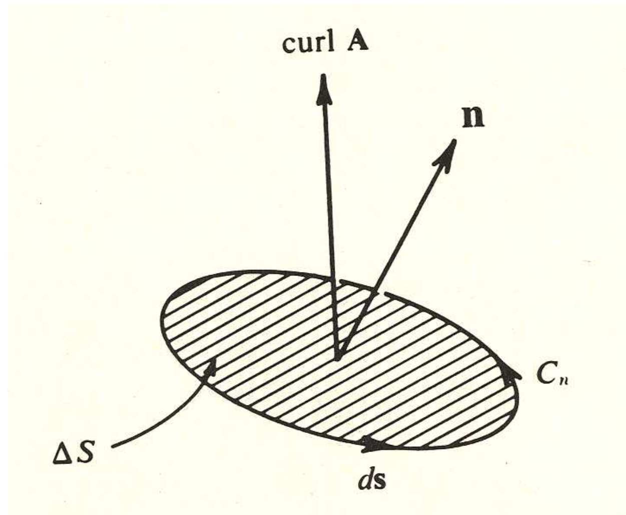
Campi conservativi (irrotazionali) e potenziale scalare

Se

$$\boxed{\mathbf{A} = \text{grad}\phi}$$

in un dominio Ω, allora si dice che $\mathbf{A}$ è un campo vettoriale conservativo in Ω e la funzione ϕ è detta potenziale scalare di $\mathbf{A}$ in Ω.

Campi irrotazionali e potenziale scalare (cont.)



Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{A} = \text{grad}\phi$ e si applichi:

$$\mathbf{n}\, dS \cdot \text{rot}\,(\text{grad}\phi) = \oint_{\mathcal{C}_n} \text{grad}\phi \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}_n} d\phi = 0$$

Poichè la direzione $\mathbf{n}$ è arbitraria, ne consegue che:

$$\boxed{\text{rot}\,(\text{grad}\phi) = \nabla \times \nabla\phi = 0}$$

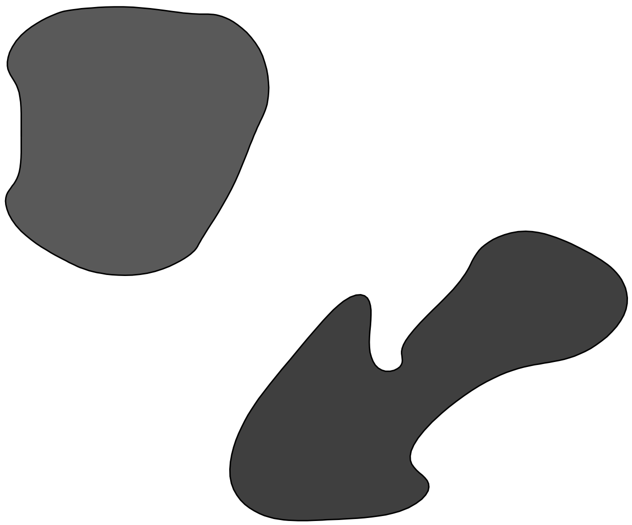
Se il rotore di un campo vettoriale $\mathbf{A}$ è nullo in una certa regione Ω dello spazio, il campo si definisce irrotazionale in Ω.

Ogni campo vettoriale conservativo è irrotazionale.

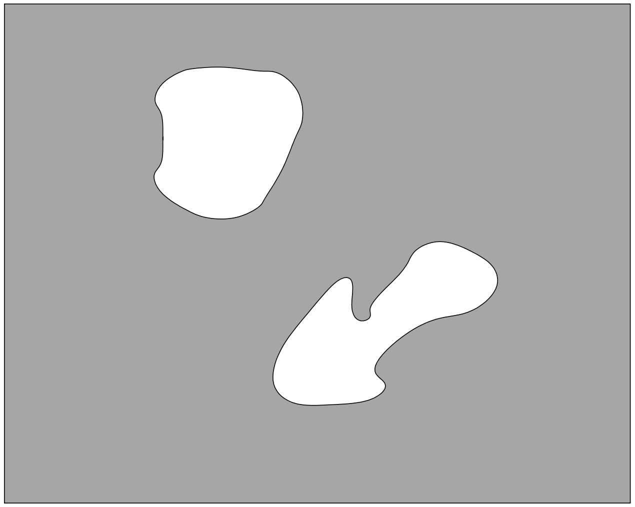
Viceversa, se in Ω il campo $\mathbf{A}$ è irrotazionale, esso può essere espresso come il gradiente di un *potenziale scalare*, $\mathbf{A} = \nabla\phi$ se il dominio Ω soddisfa certe condizioni topologiche, ovvero se il dominio è *a connessione semplice*.

Alcune nozioni di topologia

Una regione dello spazio si definisce $\boxed{\text{connessa}}$ se due punti qualsiasi appartenenti alla regione possono essere collegati mediante una curva (o percorso) senza che questa attraversi la frontiera della regione.



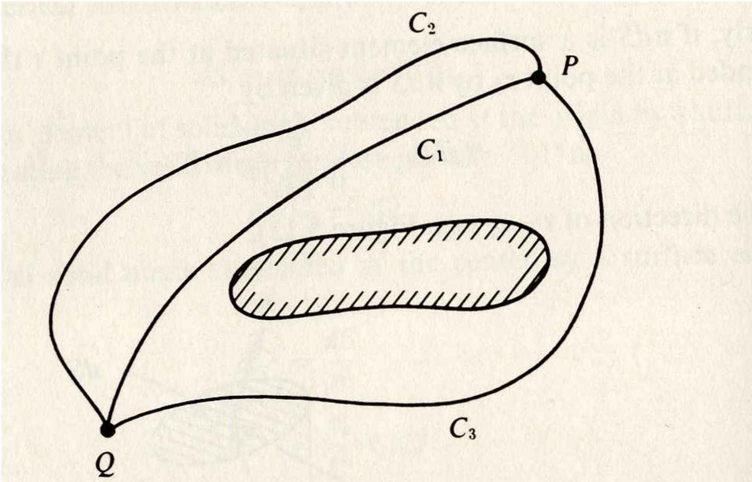
(a) Regione NON connessa.



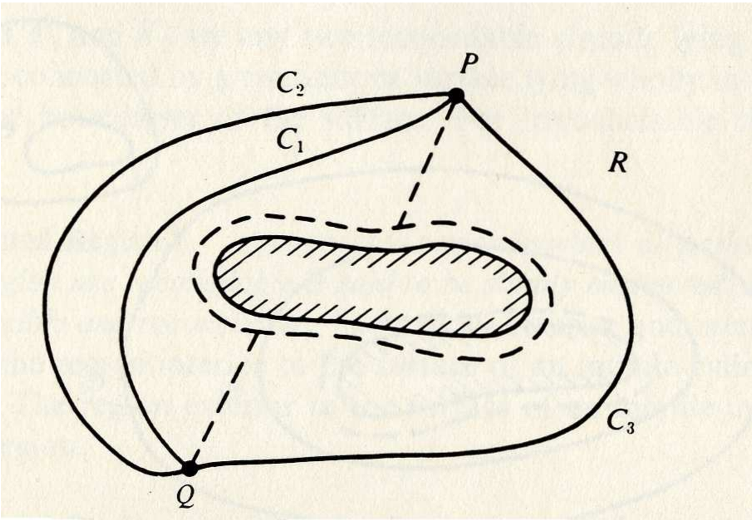
(b) Regione connessa.

Percorsi riconciliabili ed irriconciliabili

Prese due curve qualunque $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ che colleghino i punti P e Q, queste si definiscono (ir)riconciliabili se (non) possono essere portate a coincidere senza mai abbandonare la regione.



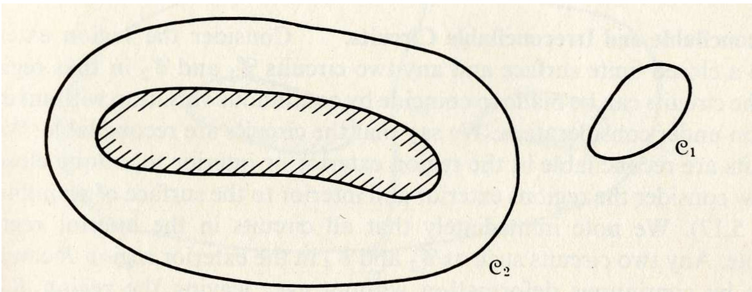
(c) Corpo chiuso: tutti i percorsi sono riconciliabili.



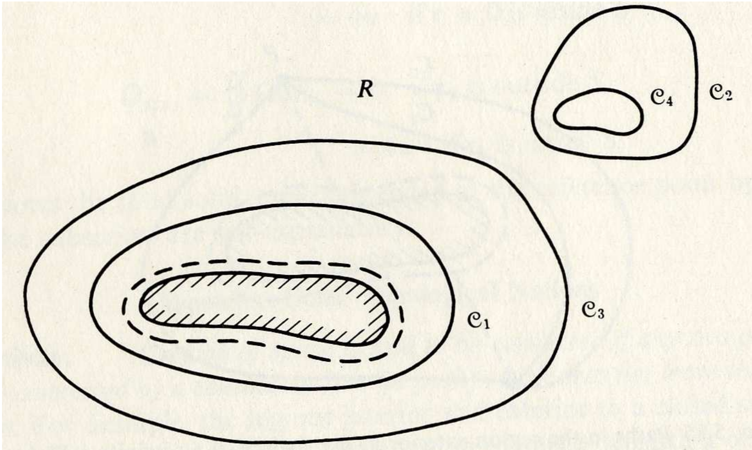
(d) Cilindroide indefinito: i percorsi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono riconciliabili; i percorsi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ sono irriconciliabili.

Circuiti riducibili ed irriducibili

Un circuto $\mathcal{C}$ si definisce riducibile/irriducibile se esso può (non può) essere ridotto ad un punto senza mai abbandonare la regione.



(e) Corpo chiuso: tutti i circuiti sono riducibili.



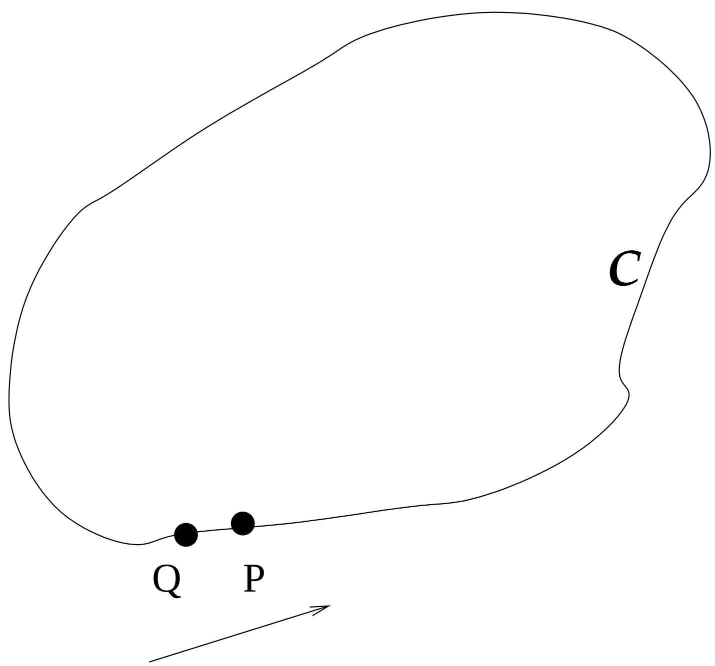
(f) Cilindroide indefinito: i circuiti $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_4$ sono riducibili; $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ sono irriducibili.

Condizioni necessarie per la conservatività

Le tre proposizioni seguenti sono equivalenti:

- Il campo $\mathbf{A}$ è conservativo in Ω, ovvero $\mathbf{A} = \mathrm{grad}\phi$.
- $$\Gamma_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$
  per ogni curva chiusa $\mathcal{C}$ contenuta in Ω.
- Dati due punti P e Q appartenenti a Ω, l'integrale
  $$\int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$
  assume lo stesso valore per tutte le curve che uniscono P a Q.

Campi irrotazionali e circolazione

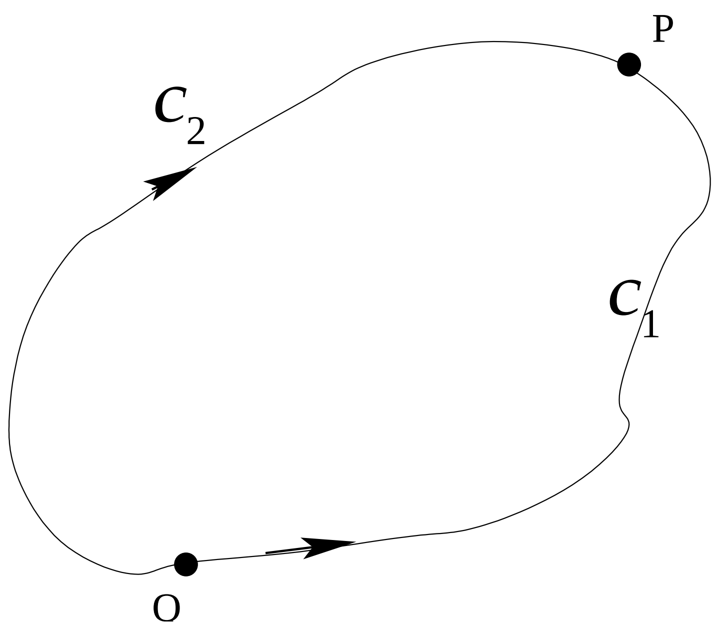


$$\mathbf{A} = \mathsf{grad}\phi$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathcal{C}} &= \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\mathcal{C}} \mathsf{grad}\phi \cdot d\mathbf{s} \\ &= \lim_{Q \to P} \int_P^Q d\,\phi \\ &= \lim_{Q \to P} \left(\phi(Q) - \phi(P)\right)\end{aligned}$$

La circolazione Γ è nulla se la funzione ϕ è ad un sol valore.

Campi irrotazionali in regioni *semplicemente connesse*



$$\mathbf{A} = \mathsf{grad}\phi$$

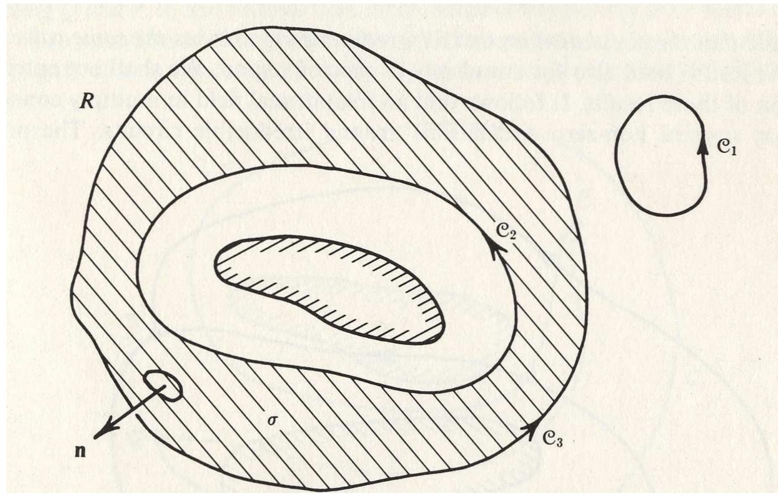
$$\Gamma = \int_{\substack{Q \\ \mathsf{via}\mathcal{C}_1}}^{P} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} - \int_{\substack{Q \\ \mathsf{via}\mathcal{C}_2}}^{P} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$$

$$= \iint_{\sigma} \mathsf{rot}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$$

$$[\phi(P) - \phi(Q)]_{\mathcal{C}_1} = [\phi(P) - \phi(Q)]_{\mathcal{C}_2}$$

Il potenziale ϕ è una funzione ad un sol valore in una regione semplicemente connessa.

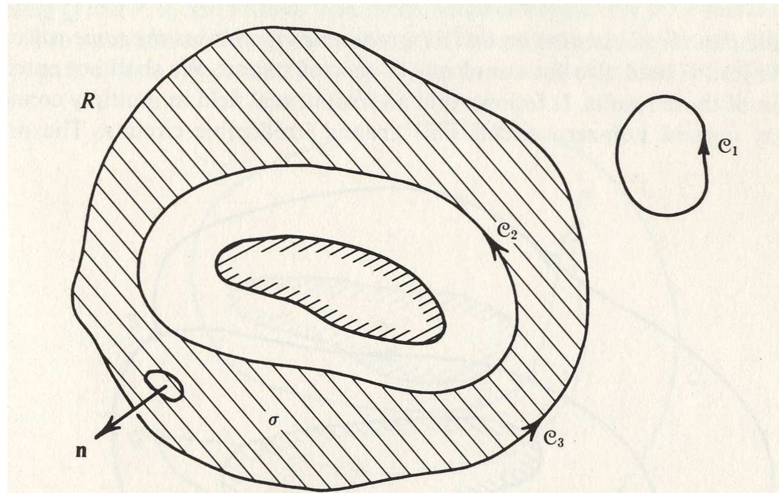
Campi irrotazionali in regioni doppiamente connesse



In una regione dello spazio doppiamente connessa la circolazione di un vettore irrotazionale intorno ad un circuito riducibile ($\mathcal{C}_1$) è nulla.

$$\Gamma_{\mathcal{C}_1} = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\sigma_1} \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

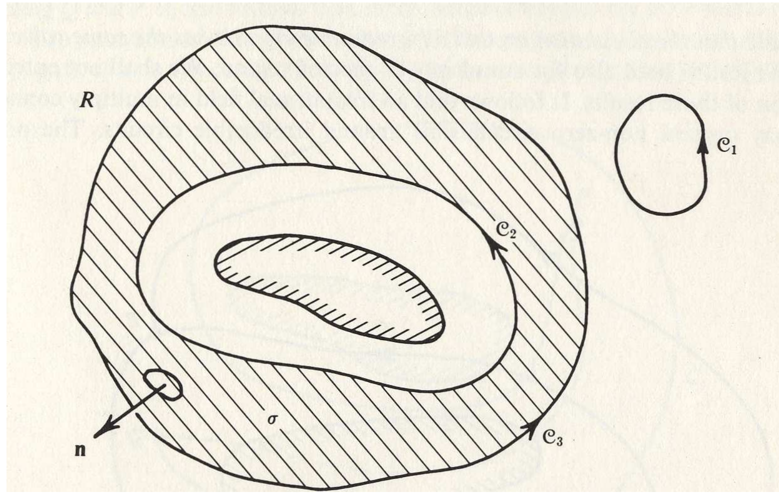
Campi irrotazionali in regioni doppiamente connesse



In una regione dello spazio doppiamente connessa la circolazione di un vettore irrotazionale intorno ad un circuito irriducibile ($\mathcal{C}_2$) NON è, in generale, nulla (NON è possibile applicare il Th. di Stokes).

$$\Gamma_{\mathcal{C}_1} = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = ?$$

Campi irrotazionali in regioni doppiamente connesse



In una regione dello spazio doppiamente connessa la circolazione di un vettore irrotazionale intorno a due qualsiasi circuiti irriducibili assume lo stesso valore (in generale $\neq 0$).

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\mathcal{C}_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\sigma} \text{rot}\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\mathcal{C}_2} = \Gamma_{\mathcal{C}_3}$$

Campi solenoidali e potenziale vettore

$$\boxed{\mathrm{div}\mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS.}$$

Se $\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{v}$, poichè, per il Th. di Stokes: $\oiint_S \mathrm{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \equiv 0$ ne consegue che la divergenza del rotore di un vettore è identicamente nulla: $\boxed{\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\mathbf{v}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \times \mathbf{v}\right) \equiv 0}$

Se $\nabla \cdot \mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = 0$ in una regione Ω dello spazio, semplicemente connessa rispetto alle superfici, è possibile rappresentare il campo $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)$ tramite il rotore di un altro campo $\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right)$

$$\boxed{\mathbf{A} = \nabla \times \left(\mathbf{B} + \nabla\psi + \mathbf{c}\right)}$$

Campi solenoidali

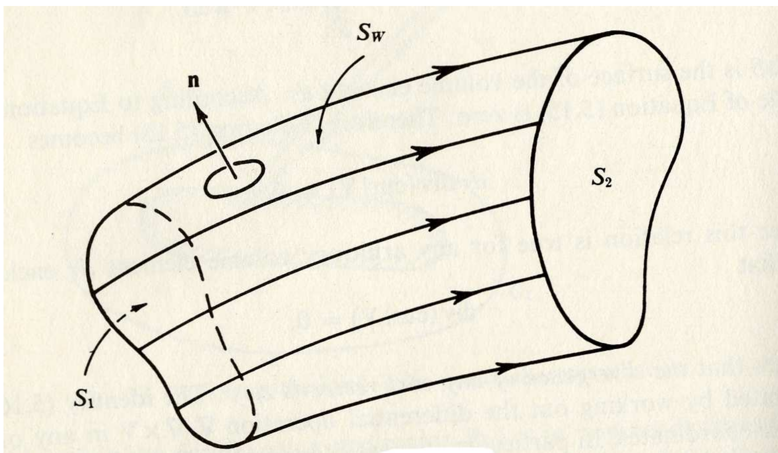
$$\boxed{\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{R}} \mathrm{div}\mathbf{A}\, d\mathcal{V}} \tag{1}$$

Se il campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$ è solenoidale in una regione Ω, ovvero div$\mathbf{A} = 0$, in virtù del T. della divergenza, Eq. (1):

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0 \qquad S \subseteq \Omega}$$

In un campo vettoriale solenoidale il flusso del vettore attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Campi solenoidali



Tubo di flusso

Se $\mathbf{A}$ è un campo solenoidale e

$$\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_w$$

$$0 = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_w} (..)\ dS$$
$$+ \iint_{S_1} (..)\ dS + \iint_{S_2} (..)\ dS$$

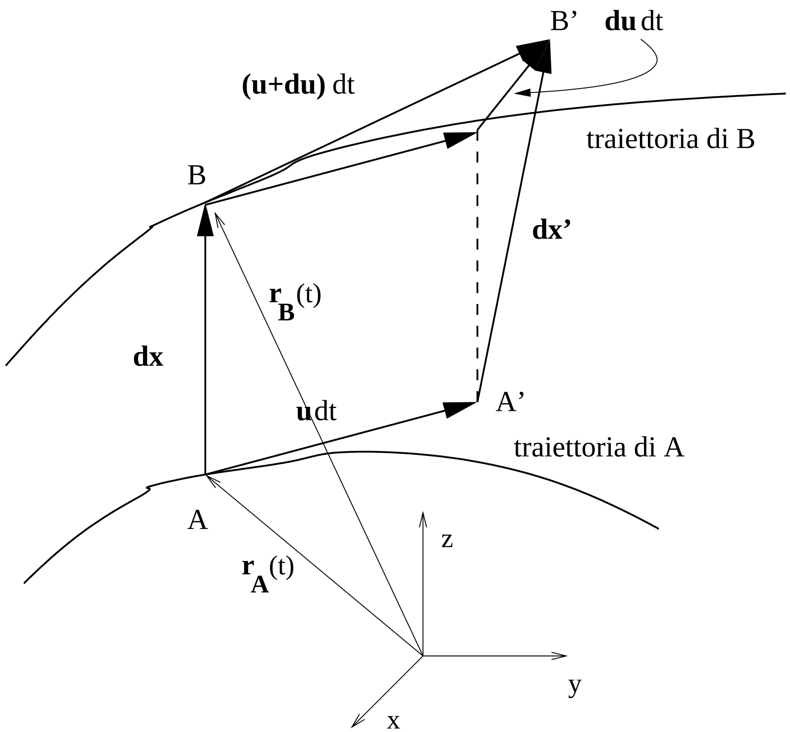
$\iint_{S_w} = 0$ poichè $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$ sulla la superficie S_w.

In un campo solenoidale il flusso del campo vettoriale è costante in ciascuna sezione di un tubo di flusso

$\nabla \mathbf{u}$ in coord. cilindriche

$$
\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= \left(\mathbf{e}_r \partial_r + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\partial_\theta\right)(\mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta) \\
&= \mathbf{e}_r \partial_r (\mathbf{e}_r u_r) + \mathbf{e}_r \partial_r (\mathbf{e}_\theta u_\theta) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\partial_\theta (\mathbf{e}_r u_r) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\partial_\theta (\mathbf{e}_\theta u_\theta) \\
&= \mathbf{e}_r \left[\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} u_\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] \\
&+ \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\left[\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} u_\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] \\
&= \mathbf{e}_r \left[\mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right] + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\left[\mathbf{e}_\theta u_r + \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \mathbf{e}_r u_\theta + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right] \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r + \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta
\end{aligned}
$$

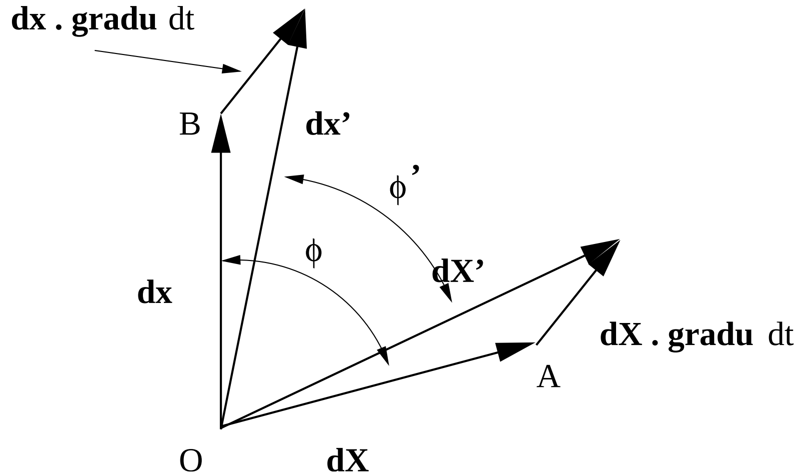
Velocità di deformazione lineare



$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_B(t) &= \mathbf{u}_A(t) + \mathbf{dx}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathcal{O}\,dx^2 \\
&= \mathbf{u} + \mathbf{dx}\cdot(\boldsymbol{\Omega}+\mathbf{E}) + \mathcal{O}\,dx^2 \\
&= \mathbf{u} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{dx} + \mathbf{dx}\cdot\mathbf{E} + \mathcal{O}\,dx^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{dx}' = \mathbf{dx} + (\mathbf{dx}\cdot\mathbf{E})\;dt \\
+\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{dx}\right)\;dt + \mathcal{O}\,dx^2\,dt
\end{aligned}
$$

Velocità di deformazione angolare



$$\mathbf{dx}' = \mathbf{dx} + (\mathbf{dx}\cdot\mathbf{E})\,dt + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{dx}\right)dt + \mathcal{O}\,dx^2\,dt$$

$$\mathbf{dX}' = \mathbf{dX} + (\mathbf{dX}\cdot\mathbf{E})\,dt + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{dX}\right)dt + \mathcal{O}\,dx^2\,dt$$