Università di Pisa - Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Fisica Generale II e Elettronica

Appello 3 - 16/07/2018

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) Si indicano con 1 e 4 le due lastre esterne connesse mediante il conduttore e, di conseguenza, equipotenziali. Si indicano con 2 e 3 le due lastre interne, la lastra 2 è quella connessa al polo positivo del generatore di tensione. Si fissa un sistema di riferimento cartesiano con gli assi x ed y nel piano individuato dalle lastre e l'asse z ha verso positivo dalla lastra 1 alla lastra 4.
Regione esterna alle quattro lastre: il campo elettrico è nullo;
Regione compresa tra le lastre 2 e 3: il campo elettrico è uniforme ed è diretto dalla lastra 2 alla lastra 3; il modulo è dato dalla equazione $E_z d = V_0 \Rightarrow E_z = \frac{V_0}{d}$.
Regione compresa tra le lastre 1 e 2 e tra le lastre 3 e 4: nelle due regioni il campo elettrico è uguale ed è uniforme; il modulo può essere determinato sfruttando il fatto che le lastre 1 e 4 sono allo stesso potenziale.
$\int_1^4 \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{x} = E_z d + V_0 + E_z d = 2E_z d + V_0 = 0 \Rightarrow E_z = -\frac{V_0}{2d}$

2) Si possono scrivere le seguenti equazioni per le densità di carica superficiali σ_i sulle quattro superfici:
$\sigma_1 + \sigma_4 = 0$, dato che la carica complessiva sulle due lastre esterne è nulla.
$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$, dato che la carica complessiva sulle due lastre interne è nulla.
$\frac{\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\epsilon_0} = -\frac{V_0}{2d}$, che determina il valore del campo elettrico nella regione compresa tra le lastre 1 e 2.
$\frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{V_0}{d}$, che determina il valore del campo elettrico nella regione compresa tra le lastre 2 e 3.
Si trova: $\sigma_1 = -\frac{\epsilon_0 V_0}{2d}$, $\sigma_2 = \frac{3\epsilon_0 V_0}{2d}$, $\sigma_3 = -\frac{-3\epsilon_0 V_0}{2d}$, $\sigma_4 = \frac{\epsilon_0 V_0}{2d}$.

3) Quando la lastra 4 si trova alla distanza $d + z$ dalla lastra 3, il campo elettrico E nelle regioni comprese tra le lastre 1 e 2 e tra le lastre 3 e 4, può essere determinato imponendo che la differenza di potenziale tra le lastre 1 e 4 sia nulla: $E_z d + V_0 + E_z(d + z) = 0 \Rightarrow E_z = -\frac{V_0}{2d+z}$, che si riduce al valore trovato in precedenza, nel caso $z = 0$. La densità di carica sulla lastra 1 è $\sigma_1 = -\frac{\epsilon_0 V_0}{2d+z}$, la densità di carica sulla lastra 4 è $\sigma_4 = -\sigma_1$.
Il campo elettrico nel quale è immersa la lastra 4 è generato dalla sola densità di carica σ_1 ed è pari a $-\frac{V_0}{2(2d+z)}$. La forza esterna F_E che deve essere applicata per spostare la lastra 4 è $F_E = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \frac{1}{(2d+z)^2}$.
Il lavoro compiuto dalla forza F_E per allontanare la lastra 4 alla distanza $2d$ dalla lastra 3 è $L(F_E) = \int_d^{2d} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \frac{1}{(2d+z)^2} dz = \frac{1}{24} \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{d}$.

4) Il lavoro compiuto dal generatore di tensione è $L_g = V_0 \Delta Q$, dove ΔQ è la variazione di carica sulla lastra 2, connessa al polo positivo del generatore, tra la configurazione iniziale, nella quale la lastra 4 è alla distanza d, e quella finale, nella quale la lastra 4 è alla distanza $2d$ dalla lastra 3. Nella configurazione iniziale si ha $Q_{2i} = \frac{3\epsilon_0 S V_0}{2d}$. Per determinare la densità di carica sulla lastra 2 nella configurazione finale, si utilizza la relazione $\frac{\sigma_{1f} + \sigma_{2f}}{\epsilon_0} = \frac{V_0}{d}$ che determina il campo elettrico nella regione compresa tra le lastre 2 e 3. Dalla risposta al quesito 3, si ha $\sigma_{1f} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{3d}$, di conseguenza $\sigma_{2f} = \frac{4\epsilon_0 V_0}{3d}$ e $Q_{2f} = \frac{4\epsilon_0 S V_0}{3d}$. Si ottiene $L_g = -\frac{\epsilon_0 S V_0}{6d}$.

5) Si possono scrivere le seguenti equazioni:
$V_0 = RI(t) + E_z(t)d$, per la maglia, dove $E_z(t)$ è il campo elettrico tra le lastre 2 e 3;
$I(t) = S\frac{d\sigma_2(t)}{dt}$, che definisce la corrente che scorre nella maglia;

$\frac{\sigma_1(t)+\sigma_2(t)}{\epsilon_0} = E_z(t)$;
$\frac{\sigma_1(t)}{\epsilon_0}d + \frac{\sigma_1(t)+\sigma_2(t)}{\epsilon_0}d + \frac{\sigma_1(t)}{\epsilon_0}d = 0$, dato che le lastre 1 e 4 sono allo stesso potenziale. Si ottiene $\sigma_1(t) = -\frac{1}{3}\sigma_2(t)$. Data la condizione iniziale $\sigma_2(0) = 0$, si ottiene $\sigma_2(t) = \frac{3\epsilon_0 V_0}{2d}(1 - e^{-\lambda t})$, con $\lambda = -\frac{2d}{3\epsilon_0 SR}$. La densità superficiale di carica sulle altre lastre si ottiene dalle relazioni: $\sigma_1(t) = -\frac{1}{3}\sigma_2(t)$, $\sigma_3(t) = -\sigma_2(t)$, e $\sigma_4(t) = -\sigma_1(t)$.
Il campo elettrico è $E_z(t) = \frac{\sigma_1(t)}{\epsilon_0}$, nelle regioni comprese tra le lastre 1 e 2 e tra le lastre 3 e 4; $E_z(t) = \frac{\sigma_1(t)+\sigma_2(t)}{\epsilon_0}$, nella regione compresa tra le lastre 2 e 3.

PROBLEMA 2

1) Si ha il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso la superficie delimitata dalla spira $\phi(\vec{B}) = Bh(x_2 - x_1)$, la forza elettromotrice indotta fem$_{ind} = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -Bh(v_2 - v_1)$. Si ha la equazione del circuito $-Bh(v_2 - v_1) = RI$.
2) Si ha la corrente $I(t)$ in funzione delle velocità delle due sbarrette $I(t) = \frac{Bh(v_2(t) - v_1(t))}{R}$.
3) Si ha la forza magnetica sulla sbarretta 2, $F_2(t) = I(t)hB$, con $I(t = 0) = -\frac{Bh(-v_1(t=0)}{R} = \frac{Bhv_0}{R}$, si ottiene $F_2(t = 0) = \frac{(Bh)^2 v_0}{R}$. La direzione della forza coincide con la direzione della rotaia e il verso coincide con il verso di $\vec{v}_1$.
4) Si hanno le equazioni del moto per le due sbarrette $m\frac{dv_1}{dt} = -IhB$ e $m\frac{dv_2}{dt} = IhB$ e la equazione del circuito $-Bh(v_2 - v_1) - RI = 0$. Si ottiene la equazione $v_2 - v_1 = -\frac{R}{Bh}I$, dalla quale si ottene $\frac{dv_2}{dt} - \frac{dv_1}{dt} = -\frac{R}{Bh}\frac{dI}{dt}$. Si ottiene la equazione $\frac{dI}{dt} = -2\frac{(Bh)^2}{mR}I$, si ottiene la soluazione $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, con $\tau = \frac{mR}{2(Bh)^2}$ e $I_0 = \frac{Bh}{R}v_0$.
5) Si ottengono le velocità delle sbarrette, $v_1(t) = v_1(t = 0) + \int_0^t \frac{dv_1}{dt}dt = \frac{v_0}{2}(1 + e^{-t/\tau})$ e $v_2(t) = v_2(t = 0) + \int_0^t \frac{dv_2}{dt}dt = \frac{v_0}{2}(1 - e^{-t/\tau})$.