UNIVERSITÀ DI PISA
INGEGNERIA AEROSPAZIALE: CORSO DI FISICA GENERALE II E ELETTRONICA
Appello n. 1 - 04/06/2018
Soluzioni

PROBLEMA I

1)
Il campo elettrico $\vec{E}(\mathbf{O})$ nel centro $\mathbf{O}$ dell'anello è dato dalla seguente espressione:
$\vec{E}(\mathbf{O}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|\vec{r}|^3}(-r\cos(\phi)\mathbf{i} - r\sin(\phi)\mathbf{j})\lambda_0\cos(\phi)rd\phi = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 r}\mathbf{i}$
Nello sviluppo dei calcoli abbiamo utilizzato le relazioni $\int_0^{2\pi}\cos^2(\phi)d\phi = \pi$ e $\int_0^{2\pi}\sin(\phi)\cos(\phi)d\phi = 0$

2)
Il campo elettrico $\vec{E}$ lungo l'asse dell'anello, che si può assumere coincidente con l'asse z del sistema di riferimento, è dato dalla seguente espressione:
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(-r\cos(\phi)\mathbf{i} - r\sin(\phi)\mathbf{j} + z\mathbf{k})\lambda_0\cos(\phi)rd\phi = -\frac{\lambda_0 r^2}{4\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i}$

3)
Scelta una qualsiasi coppia di punti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sull'asse dell'anello
$V(\mathbf{A}) - V(\mathbf{B}) = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{x} = -\int_{z_A}^{z_B}\frac{\lambda_0 r^2}{4\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = 0 \;\forall\; z_A,\, z_B$, dato che $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) = 0$. Di conseguenza, il potenziale elettrostatico lungo l'asse dell'anello è 0 in ogni punto.

4)
La forza elettrostatica risultante esercitata dall'anello su di un filo rettilineo indefinito coincidente con l'asse dell'anello e con densità lineare di carica pari a λ_1 è data dalla seguente espressione:
$\vec{F} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1 r^2}{4\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz\mathbf{i} = -\frac{\lambda_0\lambda_1}{2\epsilon_0}\mathbf{i}$
Nota: per svolgere l'integrale si è utilizzata la sostituzione $z = r\tan(\theta)$, con dominio di integrazione $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.

5)
Il lavoro fatto dalla forza di attrito nel tratto $[+\infty,\, 0]$ è dato dalla seguente espressione:
$L(\vec{F}_A) = \int_{+\infty}^{0}\frac{\mu q\lambda_0 r^2}{4\epsilon_0(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz = -\frac{\mu\lambda_0 q}{4\epsilon_0}$
Nota: per svolgere l'integrale si è utilizzata la sostituzione $z = r\tan(\theta)$, con dominio di integrazione $0 \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$.
Il lavoro fatto dalla forza di attrito è pari alla variazione di energia cinetica della particella e, nel caso che la particella venga lanciata con la velocità minima necessaria per raggiungere il centro dell'anello, la velocità della particella stessa nel centro dell'anello è nulla.
$-\frac{1}{2}mv_{min}^2 = -\frac{\mu\lambda_0 q}{4\epsilon_0} \Rightarrow v_{min} = (\frac{\mu\lambda_0 q}{2\epsilon_0 m})^{\frac{1}{2}}$

PROBLEMA 2

1) Il condensatore è a facce piane parallele e la capacità è $C = \frac{\epsilon_0\pi\rho_0^2}{d}$. L''equazione per la scarica del condensatore è $0 = R_e I + \frac{Q}{C}$, con $I = \frac{dQ}{dt}$, nella quale $Q(t)$ è la carica sul condensatore in funzione del tempo, e condizione iniziale sulla carica $Q(0) = Q_0$. Si ottiene la soluzione $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{R_e C}}$.
2) All'interno del condensatore il campo magnetico è generato dalla corrente di spostamento, parallela all'asse del condensatore. Si utilizza l'equazione $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_c + \mu_0\epsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt}$, con $\vec{J}_c = 0$ all'interno del condensatore. Il campo elettrico all'interno del condensatore è $\vec{E}(t) = -\frac{\sigma(t)}{\epsilon_0}\vec{k}$, con $\vec{k}$ versore z in coordinate cilindriche. Si ipotizzi che la lastra con carica negativa si trovi alla quota $z = -\frac{d}{2}$ e la lastra con carica positiva si trovi alla

quota $z = \frac{d}{2}$. Si ottiene $\vec{E}(t) = -\frac{Q_0}{\epsilon_0 \pi \rho_0^2} e^{-\frac{t}{R_e C}} \vec{k}$ e, di conseguenza, $\vec{\nabla} \times \vec{B}(t) = \frac{\mu_0 Q_0}{\pi \rho^2 R_e C} e^{-\frac{t}{R_e C}} \vec{k}$. Per motivi di simmetria il campo magnetico $\vec{B}$ ha componente solo azimutale che può essere determinata mediante il teorema di Ampère. Si ottiene $2\pi\rho B_\phi(t) = \pi\rho^2 \frac{\mu_0 Q_0}{\pi \rho_0^2 R_e C} e^{-\frac{t}{R_e C}}$ e, di conseguenza, $B_\phi(t) = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi \rho_0^2 R_e C} e^{-\frac{t}{R_e C}} \rho$, che dipende unicamente dalla distanza ρ dall'asse del condensatore e dal tempo.
3) La variazione del campo magnetico $\vec{B}(t)$ genera una forza elettromotrice indotta nella spiretta. Il flusso del campo magnetico attraverso la spinetta è $\phi(\vec{B}(t)) = \int_0^a A e^{-\frac{t}{R_e C}} \rho a d\rho$, con $A = \frac{\mu_0 Q_0}{2\pi \rho_0^2 R_e C}$. Si ottiene $\phi(\vec{B}(t)) = \frac{Aa^3}{2} e^{-\frac{t}{R_e C}}$. Si ha $\epsilon_i(t) = -\frac{d\phi(\vec{B}(t))}{dt}$ e, di conseguenza, $\epsilon_i(t) = \frac{Aa^3}{2} \frac{1}{R_e C} e^{-\frac{t}{R_e C}}$.
L'equazione per la spiretta è $\epsilon_i(t) = RsI(t) + L_s \frac{dI(t)}{dt}$, nella quale $I(t)$ è la corrente nella spinetta, con la condizione iniziale $I(0) = 0$. Si ottiene $I(t) = K(e^{-\frac{t}{R_e C}} - e^{-\frac{R_s}{L_s} t})$, con $K = \frac{\mu_0 Q_0 a^3}{4\pi \rho_0^2 R_s (ReC)^2} \frac{1}{R_s - \frac{L_s}{R_e C}}$.
4) Dalla relazione $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$, che esprime la forza esercitata da un campo magnetico $\vec{B}$ su un tratto di circuito $d\vec{l}$ nel quale scorre una corrente I, si ottiene $\vec{F} = aI_{\frac{1}{2}} B_{\frac{1}{2}} \vec{e}_\rho$, nella quale $I_{\frac{1}{2}}$ e $B_{\frac{1}{2}}$ sono rispettivamente la corrente nella spiretta ed il campo magnetico nell'istante nel quale la carica sul condensatore si è dimezzata. Si noti che il contributo dovuto al lato della spinetta che giace sull'asse del condensatore è nullo per il fatto che per $\rho = 0$ il campo magnetico è nullo e che i contributi dei due lati della spinetta ortogonali all'asse della spinetta hanno verso opposto e si annullano. Il solo contributo significativo è dovuto al lato della spinetta esterno all'asse del condensatore e parallelo ad esso.
5) Si trascurano gli effetti dovuti alla presenza della spinetta e si determina l'energia dissipata per effetto Joule mediante la differenza tra l'energia immagazzinata dal condensatore all'istante $t = 0$ e l'istante nel quale la carica sul condensatore si è dimezzata. $E_J = \frac{Q^2(0)}{2C} - \frac{Q^2(\frac{1}{2})}{2C}$. Si ottiene $E_J = \frac{3}{4} \frac{Q_0^2}{2C}$.