Università di Pisa - Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Fisica Generale II e Elettronica

Appello 3 - 17/07/2017

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) Il campo elettrico è diretto radialmente e in modulo vale
$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R_0^3}$ per $r \leq R_0$
$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$ per $r \geq R_0$, con $q = \frac{4\pi}{3}\rho R_0^3$.
Il potenziale elettrico è
$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2 + \frac{1}{\epsilon_0}(\frac{q}{4\pi R_0} + \frac{1}{6}\rho R_0^2)$ per $0 \leq r \leq R_0$,
$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$ per $r \geq R_0$.
2) Si determina l'energia elettrostatica U della distribuzione di carica mediante l'integrale $\frac{\epsilon_0}{2}\int_0^\infty E^2 dV$, suddividendo l'integrale nella parte interna alla sfera U_{int} e nella parte esterna alla sfera U_{ext}. Si ottiene $U_{int} = \frac{1}{10}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R_0}$ e $U_{ext} = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}q^2 R_0$. Si ottiene $U = U_{int} + U_{ext} = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R_0}$.

3) Il campo elettrico è diretto radialmente e in modulo vale
$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R_0^3}$ per $r \leq R_0$,
$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$ per $R_0 \leq r < R_1$,
$E_r(r) = 0$ per $R_1 < r < R_2$,
$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$ per $r > R_2$, con $q = \frac{4\pi}{3}\rho R_0^3$.
Il potenziale elettrico è
$V(r) = -\frac{\rho}{6\epsilon_0}r^2 + \frac{\rho}{6\epsilon_0}R_0^2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$, per $0 \leq r \leq R_0$,
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}q(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$, per $R_0 \leq r \leq R_1$,
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R_2}$, per $R_1 \leq r \leq R_2$,
$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$, per $r \geq R_2$.

4) La carica indotta sulla superficie interna del guscio metallico è $-q$, sulla superficie esterna è q, con $q = \frac{4\pi}{3}\rho R_0^3$.
L'energia elettrostatica è $U = U_{int} + U_{ext} - U_{guscio}$, con U_{guscio} l'energia elettrostatica perduta a causa della presenza del guscio metallico nel quale il campo elettrico è 0. Si trova $U_{guscio} = \frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$.

5) Dal bilancio energetico si ottiene $\frac{1}{2}mv_{min}^2 = q_1 V(0)$, con $V(0)$ il potenziale elettrostatico nell'origine. $V(0) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}R_0^2 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})$.

PROBLEMA 2

1) Il campo magnetico al centro della spira è ortogonale al piano della spira ed ha modulo $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{b}$. Il campo magnetico sull'asse della spira ha solamente componente lungo l'asse ed ha modulo $B_z(z) = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ib^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}$.
2) Il coefficiente di mutua induzione tra le due spire è $M = \frac{\mu_0}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}a^2\cos(\alpha)$, nella quale abbiamo fatto l'approssimazione che il campo magnetico sia lo stesso su tutta la superficie della spira quadrata.
3) Il flusso del campo magnetico generato dalla spira circolare attraverso la superficie della spira quadrata può essere approssimato con $\phi(B) = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{b}a^2\cos(\omega_0 t)$, utilizzando per il campo magnetico il valore al centro della spira. La corrente indotta è $i_{ind}(t) = \frac{1}{R}\frac{\mu_0}{2}\frac{i}{b}a^2\omega_0\sin(\omega_0 t)$ che scorre inizialmente in senso orario.

4) La potenza dissipata per effetto Joule sulla spira quadrata è $W = Ri_{ind}^2(t)$, che può essere riscritta con $W = \frac{1}{R}B^2a^4\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$, con $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{b}$.
5) Il momento che è necessario applicare per mantenere la spira in rotazione è $\vec{M} = \frac{1}{R}B^2a^4\omega_0\sin^2(\omega_0 t)\vec{j}$, con $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{b}$.