Università di Pisa - Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Fisica Generale II e Elettronica

Appello 2 - 26/06/2017

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) Dato che la distanza d tra le due sfere sia $d > 2r$, non si ha sovrapposizione tra le due distribuzioni di carica, l'energia elettrostatica U_0 di ciascuna delle due sfere è data dall'integrale di volume esteso a tutto lo spazio di $\frac{\epsilon_0}{2}E^2$, dove E è il campo elettrostatico generato alla distribuzione di carica sferica. Si ottiene $U_0 = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{R}$.
2) Nel caso che tra i centri delle due sfere si abbia una distanza $d > 2R$, la forza tra le due sfere è pari alla forza tra due cariche puntiformi $+Q$ e $-Q$ poste nei centri delle due sfere. Di conseguenza, la energia elettrostatica di interazione è $U_{int} = -\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{d}$ e la energia elettrostatica complessiva del sistema costituito dalle due sfere è $U_{tot} = 2U_0 + U_{int}$.

3) L'energia cinetica delle due sfere è pari alla variazione di energia elettrostatica cambiata di segno. A distanza infinita, si ha $U_{tot} = 2U_0$. A distanza $d = 2R$, si ha $U_{tot} = 2U_0 - \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{2R}$. Si ha $2\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{2R}$. Si ottiene $v = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{Q^2}{2MR}}$

4) Il campo elettrico all'interno di una sfera uniformemente carica è dato da $\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\mathbf{r}$. Di conseguenza, in un punto P qualsiasi all'interno della regione nella quale le due sfere sono sovrapposte, il campo elettrico totale è dato da $\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\mathbf{r}_1$ - $\frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\mathbf{r}_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\,\mathbf{d}$, dove $\mathbf{r}_1$ ed $\mathbf{r}_2$ sono i vettori posizione di P rispetto al centro rispettivamente della sfera di carica positiva e della sfera di carica negativa, e $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1$ - $\mathbf{r}_2$. Di conseguenza il campo elettrico è uniforme e parallelo a $\mathbf{d}$.

5) Nell'istante nel quel i centri delle due sfere coincidono, la densità di carica e il campo elettrostatico sono nulli e l'energia elettrostatica totale e' 0. Di conseguenza, si ha $2\frac{1}{2}Mv^2 = 2U_0$. Si ottiene $v = \sqrt{\frac{1}{4\pi}\frac{6}{5}\frac{Q^2}{MR}}$.

PROBLEMA 2

1) Dato che il campo magnetico è uniforme, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira è $\phi_B(x) = B_0 \cdot S(x)$, con $S(x)$ area della porzione della spira immersa nel campo magnetico, in funzione della coordinate x del vertice della spira. Si ha $S(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2$ e, di conseguenza, $\phi_B(x) = B_0\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.
2) La f.e.m. indotta indotta è $V = -\frac{d}{dt}\phi_B(x) = -2\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 x v_0$. Si può sostiture $x(t) = v_0 t$ e si ottiene $V = -2\frac{\sqrt{3}}{3}B_0 v_0^2 t$. La corrente è $I = -2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{B_0}{R}v_0^2 t$. Il verso di percorrenza della corrente è orario.
3) La forza magnetica alla quale è sottoposta la spira è data dalla somma dei contributi dovuti ai due lati della spira immersi nel campo magentico. $\vec{F}_m = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. La forza magnetica complessiva $\vec{F}_m$ ha solamente componente lungo l'asse delle x ed ha verso negativo, e si oppone al ingresso della spira nella regione di campo magnetico. Il modulo della forza è $\frac{4}{3}B_0^2\frac{v_0^3}{R}t^2$.
4) La potenza W erogata dall'operatore è pari a $\vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_0$, con $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m$. Si ottiene $W = \frac{4}{3}B_0^2\frac{v_0^4}{r}t^2$.
5) L'equazione del moto della spira è $m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{3}B_0^2\frac{x^2}{R}\frac{dx}{dt}$.
L'equazione della maglia è $RI = \frac{2\sqrt{3}}{3}B_0 x\frac{dx}{dt}$.
Si ottiene $v(x) = v_0 - \frac{4}{9}\frac{B_0^2}{mR}x^3$ e $I(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{B_0}{R}xv(x)$.