Università di Pisa - Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Fisica Generale II e Elettronica

Appello 6 - 27/01/2017

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) Il campo elettrico è radiale. Si ha

per $r < R_0$, $\mathrm{E}_r = 0$,

per $R_0 < r < 2R_0$, $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$,

per $2R_0 < r < \frac{5}{2}R_0$, $\mathrm{E}_r = 0$,

per $\frac{5}{2}R_0 < r < 4R_0$, $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$,

per $4R_0 < r < 5R_0$, $E_r = 0$,

per $r > 5R_0$, $\mathrm{E}_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$.

Il potenziale elettrostatico è

per $r < R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{17Q}{20R_0}$,

per $R_0 < r < 2R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{2R_0} + \frac{7Q}{20R_0})$,

per $2R_0 < r < \frac{5}{2}R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{7Q}{20R_0}$,

per $\frac{5}{2}R_0 < r < 4R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{4R_0} + \frac{Q}{5R_0})$,

per $4R_0 < r < 5R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{5R_0}$,

per $r > 5R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$.

2) $\sigma(R_0) = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$, $\sigma(2R_0) = -\frac{Q}{4\pi(2R_0)^2}$, $\sigma(\frac{5}{2}R_0) = \frac{Q}{4\pi(\frac{5}{2}R_0)^2}$, $\sigma(4R_0) = -\frac{Q}{4\pi(4R_0)^2}$, $\sigma(5R_0) = \frac{Q}{4\pi(5R_0)^2}$,

3) Per il condensatore interno si ha $\Delta V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R_0}$ e, di conseguenza, capacità $C_i = 4\pi\epsilon_0(2R_0)$. Per il condensatore esterno si ha $\Delta V_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{20R_0}$ e, di conseguenza, capacità $C_e = 4\pi\epsilon_0(\frac{20}{3}R_0)$. Si ha $\Delta V_{tot} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{13Q}{20R_0}$ e, di conseguenza, $C_{tot} = C_e = 4\pi\epsilon_0(\frac{20}{13}R_0)$. Questi valori della capacità verificano la relazione $\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_i} + \frac{1}{C_e}$ per la capacità di due condensatori in serie.

4) Il campo elettrico è radiale. Si ha

per $r < R_0$, $\mathrm{E}_r = 0$,

per $R_0 < r < 2R_0$, $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$,

per $r > 2R_0$, $\mathrm{E}_r = 0$.

Il potenziale elettrostatico è

per $r < R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R_0}$,

per $R_0 < r < 2R_0$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{Q}{r} - \frac{Q}{2R_0})$,

per $r > 2R_0$, $V(r) = 0$.

La variazione di energia elettrostatica ΔU è dovuta alla variazione del campo elettrico nelle regioni con $\frac{5}{2}R_0 < r < 4R_0$, e per $r > 5R_0$, nelle quali il campo elettrico si annulla. $\Delta U = -\frac{\epsilon_0}{2}(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0})^2 4\pi(\frac{1}{5R_0} - \frac{1}{4R_0} + \frac{2}{5R_0})$.

5) $\sigma(R_0) = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$, $\sigma(2R_0) = -\frac{Q}{4\pi(2R_0)^2}$, $\sigma(\frac{5}{2}R_0) = 0$, $\sigma(4R_0) = 0$, $\sigma(5R_0) = 0$,

PROBLEMA 2

1) Nei due conduttori paralleli si ha la stessa densità di corrente $J = \frac{I}{\pi R^2}$, nei due conduttori la corrente è

diretta in versi opposti.
2) Il campo magnetico generato dal conduttore "1" ha solo componente azimutale rispetto ad un sistema di riferimento cilindrico con asse z coincidente con l'asse del conduttore "1", si ha

per $r \leq R$, $\vec{B_1}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2} r \vec{e}_{\phi_1}$,

per $r > R$, $\vec{B_1}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\vec{e}_{\phi_1}$.

Il campo magnetico generato dal conduttore "2" ha solo componente azimutale rispetto ad un sistema di riferimento cilindrico con asse z coincidente con l'asse del conduttore "2". Dato che il verso della corrente nel conduttore "2" è opposto al verso della corrente nel conduttore "1", si ha

per $r \leq R$, $\vec{B_2}(r) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2} r \vec{e}_{\phi_2}$,

per $r > R$, $\vec{B_2}(r) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\vec{e}_{\phi_2}$.

Il campo magnetico complessivo è la somma vettoriale dei due campi magnetici.
3) I soli punti appartenenti alla retta congiungente i centri dei conduttori nei quali il campo magnetico è nullo si possono trovare solamente all'interno dei conduttori stessi, nella regione esterna. Si indica con r la distanza dal punto medio del segmento che congiunge il centro dei due conduttori. Dall'equazione

$\frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{(r+\frac{d}{2})} - \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R^2}(r - \frac{d}{2}) = 0$, si ottiene $r = \pm(R^2 + \frac{d^2}{4})^{\frac{1}{2}}$.

4) Il campo magnetico sul segmento congiungente il centro dei due conduttori ha solamente componente ortogonale al segmento, di intensità pari a $B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x})$, nella quale x è la distanza dal centro di uno dei due conduttori. Presa una sezione rettangolare di lato pari alla distanza tra le superfici dei due conduttori, e altezza a, il flusso del campo magnetico attraverso questa sezione è $\phi(B) = \frac{\mu_0 I a}{\pi}\ln(\frac{d-R}{R})$.
5) La induttanza per unità di lunghezza della linea bifilare è data da $L = \frac{\phi(B)}{aI}$, si ottiene $L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln(\frac{d-R}{R})$. Nel limite $R << d$ l'induttanza è data da $L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{R}$.