

Università di Pisa - Dipartimento di Ingegneria Civile e Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Fisica Generale II e Elettronica

Appello 5 - 9/01/2017

Soluzioni

PROBLEMA 1

1) Le piastre inizialmente sono scariche, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, $Q_4 = 0$, in ogni istante successivo alla chiusura dell'interruttore si ha $Q_1 + Q_3 = 0$ e $Q_2 + Q_4 = 0$.

2) Si possono scrivere le seguenti equazioni per le densità di carica superficiali σ_i sulle quattro superfici:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_4 = 0$$

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d = V_0$$

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d = 0$$

$$\text{Si trova: } \sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_2 = -\frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_3 = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_4 = \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}.$$

Il campo elettrico nella regione esterna alle quattro lastre: il campo elettrico è nullo;

Regione compresa tra le lastre 1 e 2: il campo elettrico è uniforme ed è diretto dalla lastra 1 alla lastra 2; il modulo è $E = \frac{2}{3} \frac{V_0}{d}$.

Regione compresa tra le lastre 2 e 3: il campo elettrico è uniforme ed è diretto dalla lastra 2 alla lastra 3; il modulo è $E = \frac{1}{3} \frac{V_0}{d}$.

Regione compresa tra le lastre 3 e 4: il campo elettrico è uniforme ed è diretto dalla lastra 4 alla lastra 3; il modulo è $E = \frac{1}{3} \frac{V_0}{d}$.

$$3) \text{ Si ha: } \sigma_1 = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_2 = -\frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_3 = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}, \sigma_4 = \frac{1}{3} \frac{\epsilon_0 V_0}{d}.$$

4) Quando la lastra 1 si trova alla distanza $d + z$ dalla lastra 2, si possono scrivere le seguenti equazioni per le densità di carica superficiali σ_i sulle quattro superfici:

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_4 = 0$$

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} (d + z) + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d = V_0$$

$$\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4)}{2\epsilon_0} d = 0$$

$$\text{Si trova: } \sigma_1(z) = \frac{2\epsilon_0 V_0}{3d+z}, \sigma_2(z) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{3d+z}, \sigma_3(z) = -\frac{2\epsilon_0 V_0}{3d+z}, \sigma_4(z) = \frac{\epsilon_0 V_0}{3d+z}.$$

Regione compresa tra le lastre 1 e 2: il campo elettrico è uniforme ed è diretto dalla lastra 1 alla lastra 2; il modulo è $E = \frac{2V_0}{3d+z}$.

La forza esterna \mathbf{F}_E necessaria per allontanare la lastra 1 dalla lastra 2 ha modulo $F_E(z) = \sigma_1(z)SE(z)$. Si ottiene $F_E(z) = \frac{4\epsilon_0 V_0^2 S}{(3d+z)^2}$. Il lavoro compiuto dalla forza esterna \mathbf{F}_E è $L_E = \int_0^d \frac{4\epsilon_0 V_0^2 S}{(3d+z)^2} dz$.

5) Il lavoro compiuto dal generatore di tensione è $L_g = V_0 \Delta Q$, dove ΔQ è la variazione di carica sulla lastra 1, connessa al polo positivo del generatore, tra la configurazione iniziale, nella quale la lastra 1 è alla distanza d dalla lastra 2, e quella finale, nella quale la lastra 1 è alla distanza $2d$ dalla lastra 2.

Nella configurazione iniziale si ha $Q_1(d) = \frac{2\epsilon_0 S V_0}{3d}$. Nella configurazione finale si ha $Q_1(2d) = \frac{\epsilon_0 V_0 S}{2d}$. Il

lavoro del generatore è $L_g = -\frac{\epsilon_0 V_0 S}{6d}$.

PROBLEMA 2

1) Il filo conduttore è costituito da tre tratti connessi in serie, per i due tratti di lunghezza complessiva l e resistività ρ_l , la resistenza è data da $R_l = \frac{\rho_l l}{\pi a^2}$, per il tratto di lunghezza b e resistività ρ_b la resistenza è data da $R_b = \frac{\rho_b b}{\pi a^2}$. La resistenza complessiva del filo è $R = R_l + R_b = \frac{\rho_l l + \rho_b b}{\pi a^2}$. Di conseguenza, la corrente è la stessa in ciascun tratto del filo ed è $I = \frac{V \pi a^2}{\rho_l l + \rho_b b}$. La potenza dissipata per effetto Joule nel tratto di filo di lunghezza l è $W_l = R_l I^2$, nel tratto di filo di lunghezza b è $W_b = R_b I^2$. La potenza complessiva è $W = (R_l + R_b) I^2 = \frac{\rho_l l + \rho_b b}{\pi a^2} I^2$.

2) Il lavoro compiuto dal generatore nell'intervallo di tempo ΔT è $L_g = VI \Delta T$. Si ha $L_g = \frac{V^2 \pi a^2}{\rho_l l + \rho_b b} \Delta T$.

3) Dalla relazione $J = \frac{1}{\rho} E$, tra il campo elettrico, la resistività e la densità di corrente, applicata ai tratti di filo rispettivamente di lunghezza l e b , si determina il campo elettrico nei due tratti di filo $E_l = \frac{\rho_l I}{\pi a^2}$ e $E_b = \frac{\rho_b I}{\pi a^2}$ ed ha lo stesso verso della corrente.

Per determinare la densità carica σ presente sulla superficie che separa il tratto di filo con resistività ρ_l , a sinistra, e ρ_b , a destra, si applica il teorema di Gauss, utilizzando un cilindro con basi parallele alla superficie di separazione, $(E_b - E_l) \pi a^2 = \frac{\sigma \pi a^2}{\epsilon_0}$, dalla quale si ottiene $\sigma = \epsilon_0 (E_b - E_l)$. La carica complessiva presente sulla superficie è $Q = \pi a^2 \sigma$. Sull'altra superficie di separazione, che separa il tratto di filo con resistività ρ_b , a sinistra, e resistività ρ_l , a destra, mediante lo stesso ragionamento, si ottiene che la carica presente è $-Q$. La somma delle cariche presenti sulle superfici di separazione dei diversi tratti di filo è 0.

4) Si immagini una spira rettangolare costituita dal generatore di tensione continua V chiuso mediante due connessioni parallele al filo conduttore rettilineo di lunghezza totale $l + b$. Si può scrivere l'equazione $V - \frac{d\phi(B)}{dt} = RI$, e di conseguenza $V - vB(l + b) = RI$, dalla quale si ottiene $I = \frac{(V - vB(l + b))}{R}$.

5) La forza esercitata dal campo magnetico sul filo per unità di lunghezza è data dalla relazione $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$; integrando su tutto la lunghezza del filo si ottiene $F = IB(l + b)$, che in modulo è pari alla forza esterna che si deve applicare per mantenere costante la velocità del filo.